Math. P.
578 Z
Tichomandrizki.

M. TIKHOMANDRITZKY.

Théorie des intégrales et des fonctions elliptiques.

ТЕОРІЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИХЪ ФУНКЦІЙ.

М. Тихомандрицкаго,

доктора чистой математики, ординарнаго профессора Императорскаго Харьковскаго Университета и Харьковскаго Практическаго Технологическаго Института, члена Математическихъ Обществъ Харьковскаго и Московскаго, непремѣннаго члена Императорскаго Общества Любителей Естествознанія, Антропологіи и Этнографіи, состоящаго при Московскомъ Университетѣ.

Приложеніе къ Запискамъ Харьковскаго Университета 1895 г.

ХАРЬКОВЪ.

Типографія Зильберберга, Рыбная ул., домъ № 25-й.

1895.

2376

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

ТЕОРІЯ
ЭЛЛИПТИЧЕСКИХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ
и
ЭЛЛИПТИЧЕСКИХЪ ФУНКЦІЙ.

M. TIKHOMANDRITZKY.

Théorie des intégrales et des fonctions elliptiques.

ТЕОРІЯ
ЭЛЛИПТИЧЕСКИХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ
И
ЭЛЛИПТИЧЕСКИХЪ ФУНКЦІЙ.

Tichom

М. ТИХОМАНДРИЦКАГО,

доктора чистой математики, ординарнаго профессора Императорскаго Харьковскаго Университета и Харьковскаго Практическаго Технологическаго Института, члена Математическихъ Обществъ Харьковскаго и Московскаго, непремѣннаго члена Императорскаго Общества Любителей Естествознанія, Антропологіи и Этнографіи, состоящаго при Московскомъ университетѣ.

ХАРЬКОВЪ.

Типографія Зильберберга, Рыбная ул., домъ № 25-й.

1895.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

На основанiи ст. 41, § 1, п. 4 и ст. 138 Унив. Уст. печатать и выпустить въ свѣтъ разрѣшается. 1895 г. Марта 20-го.

За Ректора Университета *А. Лебедевъ.*

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Въ настоящее время Теорія эллиптическихъ функцій распадается на двѣ части, рѣзко отдѣляющіяся одна отъ другой: въ первой эллиптическія функціи разсматриваются только въ зависимости отъ аргумента, во второй и отъ модуля. Въ германской математической литературѣ за послѣднее время появилось два капитальныхъ труда, посвященныхъ этой второй части теоріи эллиптическихъ функцій, а именно: *Felix Klein* „Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen“, ausgearbeitet und vervolständigt v. Dr. *Robert Friecke*. 2 Bände. Leipzig, Teubner, 1890—1892, и „Elliptische Functionen und algebraische Zahlen“, academische Vorlesungen von *H. Weber*, Braunschweig, Vieweg und Sohn, 1891. Во французской—первый томъ столь же капитальнаго труда Гальфена, къ сожалѣнію неоконченнаго: „Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications“, par *G. H. Halphen*, Paris, 1886, посвященъ главнымъ образомъ первой части той же теоріи, [хотя и попадаются мѣстами формулы, относящіяся ко второй части. Второй томъ содержитъ разныя приложенія теоріи эллиптическихъ функцій, третій отрывки, относящіеся ко второй части этой теоріи]. Наше нынѣ предлагаемое соотечественнымъ любителямъ математики сочиненіе тоже посвящено, какъ и сейчасъ упомянутый первый томъ труда Гальфена, первой части теоріи эллиптическихъ функцій. Идея этого сочиненія начала зарождаться у насъ года за три до выхода въ свѣтъ перваго тома сочиненія Гальфена, появленіе котораго однако не только не заставило насъ бросить эту идею, но побудило скорѣе приняться за ея реализацію. Однако другія занятія и разныя обстоятельства не позволили мнѣ приступить къ этому ранѣе весны 1889 г. Послѣ энергичной двухлѣтней работы наступилъ опять перерывъ, скорѣе вслѣдствіе неимѣнія въ виду возможности издать это сочиненіе, чѣмъ вслѣдствіе занятій по изданію въ это время послѣдовательно трехъ другихъ моихъ со-

чиненій *). Когда же съ возобновненіемъ изданія „Записокъ Императорскаго Харьковскаго университета" явилась въ 1894 г. возможность напечатать это сочиненіе какъ приложеніе къ „Запискамъ", то мы и приступили къ окончанію его осенью 1894 г. Не бросили же мы идею о нашемъ сочиненіи при появленіи сочиненія Гальфена потому, что между ними общаго развѣ только то, что въ обоихъ вмѣсто Якобіевскихъ эллиптическихъ функцій разсматриваются главнымъ образомъ Вейерштрассовскія. Дѣло въ томъ, что этотъ почтенный трудъ рано умершаго ученаго, носитъ на себѣ печать той переходной эпохи, въ которую онъ составлялся, когда Вейерштрассовскія функціи только начинали пріобрѣтать права гражданства въ наукѣ и вытѣснять Якобіевскія, вслѣдствіе чего онъ и исходитъ изъ послѣднихъ и вводитъ искусственно первыя, тогда какъ въ нашемъ изложеніи Вейерштрассовскія появляются естественно, почти сами собою, Якобіевскія же появляются впослѣдствіи какъ отношенія различныхъ Θ-функцій. Самое начальное опредѣленіе эллиптическихъ функцій у Гальфена, хотя и приведшее въ восторгъ тѣхъ, кто любитъ всѣ аналитическія теоріи строить на геометрическихъ основаніяхъ, совершенно искусственно и неспособно къ перенесенію на высшія трансцендентныя—Абелевы. Я же напротивъ вполнѣ раздѣляю мнѣніе Вебера (стр. 3), что самымъ естественнымъ исходнымъ пунктомъ теоріи эллиптическихъ функцій слѣдуетъ признать эллиптическіе интегралы: тогда теоріи всѣхъ трансцендентныхъ съ алгебраическими дифференціалами развиваются естественно и просто по одному общему плану. По этому плану въ нашемъ разсужденіи подъ заглавіемъ: „Обращеніе гиперэллиптическихъ интеграловъ" (Харьковъ, 1885 г.) выведены основанія теоріи гиперэллиптическихъ интеграловъ; въ недавно-вышедшемъ сочиненіи: „Основанія теоріи Абелевыхъ интеграловъ" то-же сдѣлано для самыхъ общихъ Абелевыхъ интеграловъ, т. е. зависящихъ отъ какой угодно неявной алгебраической функціи. Въ предлагаемомъ нынѣ сочиненіи по тому же плану весьма просто развивается теорія эллиптическихъ функцій, какъ то показываетъ подробное оглавленіе книги.

Мы разсматриваемъ сперва интегралы, не приводя ни къ которой изъ принятыхъ каноническихъ формъ подрадикальный полиномъ, при-

*) 1. „Курсъ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій" (съ примѣрами для упражненій) Харьковъ, 1891 г.

2. „Краткій курсъ Высшей Алгебры". Изданіе 2-е исправленное и дополненное. Харьковъ, 1892 г.

3. „Основанія теоріи Абелевыхъ интеграловъ". Изданіе Харьковскаго Математическаго Общества. Харьковъ, 1894 г.

водя его только къ 3-ьей степени (какъ для гиперэллиптическихъ интеграловъ онъ приводится къ нечетной степени $2\varrho + 1$ въ нашемъ выше-упомянутомъ разсужденіи); затѣмъ, когда Вейерштрассовская форма почти сама собою появляется, мы, давъ кромѣ нашего еще выводы Эрмита и Миттагъ-Леффлера, придерживаемся въ дальнѣйшемъ этой формы.

Общая Θ-функція появляется при этомъ совершенно естественно, и мы занимаемся лишь ею, пока разложеніе ея на множители не приводитъ къ $\sigma(u)$ Вейерштрасса, а разложеніе въ тригонометрическіе ряды къ функціямъ Якоби (которыя оказываются, и тѣ и другія, частными видами общей Θ-функціи), съ каковыхъ моментовъ разсматриваются и эти послѣднія, въ какой мѣрѣ то оказывается необходимымъ и достаточнымъ послѣ разсмотрѣнія свойствъ общей Θ-функціи *).

Послѣ того, какъ появляются Θ-функціи, изъ самого ихъ опредѣленія выводятся ихъ функціональныя уравненія, изъ которыхъ въ свою очередь развиваются ихъ разныя свойства. Разсмотрѣніе частныхъ такихъ функцій и приводитъ, какъ уже сказано выше, къ функціямъ амплитуды Якоби.

Изъ разнаго рода разложеній эллиптическихъ функцій и Θ-функцій разложенія однѣхъ на частныя дроби и въ безконечныя произведенія другихъ, какъ естественно представляющіяся, разъ мы ознакомились съ дробнымъ характеромъ первыхъ и цѣлымъ послѣднихъ, поставлены на первомъ планѣ. Это—разложенія по теоремамъ Миттагъ-Леффлера и Вейерштрасса, полученныя однако здѣсь потому способу, который указанъ нами въ статьѣ нашей: „Разложеніе тригонометрическихъ и эллиптическихъ функцій на частныя дроби и въ безконечныя произведенія" **). Эти разложенія, двойныя, въ главѣ XI настоящаго сочиненія преобразуются въ простыя. Въ слѣдующей главѣ XII выводятся разложенія Θ-функцій и эллиптическихъ, равно какъ и логариѳмовъ отъ нихъ, въ тригонометрическіе ряды. Здѣсь, какъ выше упомянуто, появляются впервые Якобіевскія θ-функціи и выводится соотношеніе между произведеніями θ по четыре, слѣдуя Якоби.

*) Способы введенія Θ-функцій въ теорію эллиптическихъ функцій раньше были указаны нами въ нашихъ замѣткахъ: Ueber das Umkehrproblem der elliptischen Integrale, Math. Ann. Bd. XXII, 1883 г., подъ тѣмъ же заглавіемъ 2. Note въ Bd. XXV, 1884 г., а на русскомъ языкѣ: „Замѣтка о введеніи Θ-функцій въ теорію эллиптическихъ функцій", въ „Сообщеніяхъ и протоколахъ Математическаго Общества при Императорскомъ Харьковскомъ университетѣ за 1883 г., вып. I, стр. 47—67, и „Обращеніе эллиптическихъ интеграловъ", тамъ же 1884 г. вып. III, стр. 187—196.

**) Помѣщенной въ „Сообщеніяхъ Харьковскаго Математическаго Общества", 2-ая серія, т. II, 1889 г., стр. 166—208.

Послѣдняя глава, XIII, посвящена разложенію нашихъ функцій въ ряды, расположенные по степенямъ аргумента u, что выполняется главнымъ образомъ по литографированному мемуару Вейерштрасса: „Zur Theorie der elliptischen Functionen“ Göthingen, 1883. Здѣсь приходится пользоваться тѣми частными дифференціальными уравненіями, которымъ удовлетворяютъ Θ- и σ-функціи, разсматриваемыя въ зависимости не только отъ аргументовъ, но также и отъ инваріантовъ. Эта глава, заключая элементы, относящіеся ко второй части теоріи эллиптическихъ функцій, представляется какъ бы переходною отъ одной части къ другой, и потому натурально является послѣднею въ нашемъ сочиненіи, посвященномъ изложенію первой части этой теоріи.

Теоремы сложенія и вычитанія эллиптическихъ функцій, какъ слѣдствія Абелевой теоремы, выведены въ надлежащихъ мѣстахъ (главы V и IX, § 132—133); что же касается до умноженія и дѣленія аргумента, то это по связи съ преобразованіемъ эллиптическихъ функцій относится ко второй части и потому не входитъ въ наше сочиненіе. Если обстоятельства позволятъ намъ заняться этой второй частью, можетъ быть мы напишемъ и вторую часть; но во всякомъ случаѣ предлагаемое теперь сочиненіе слѣдуетъ разсматривать какъ законченное, на которое слѣдующее, если оно будетъ написано, будетъ опираться, какъ на основаніе.

По принятому плану до того натурально все развивается и вытекаетъ одно изъ другого, что къ другимъ авторамъ: Абелю, Якоби, Бріо и Букэ, Гальфену, Шварцу, Вейерштрассу, Бирману, приходилось обращаться чаще лишь для провѣрки полученныхъ результатовъ, и только изрѣдка за разъясненіями и указаніями способовъ преодолѣнія частныхъ трудностей; одна послѣдняя глава въ этомъ отношеніи составляетъ исключеніе, будучи большею частью позаимствована у Вейерштрасса, какъ уже сказано выше, иногда у Гальфена.

Въ сокращенномъ видѣ предлагаемое нынѣ изложеніе первой части теоріи эллиптическихъ функцій уже нѣсколько лѣтъ подъ рядъ преподается нами на лекціяхъ въ Императорскомъ Харьковскомъ университетѣ студентамъ 6-го и 8-го семестровъ. Такъ какъ я съ самаго начала трактую перемѣнную какъ комплексную величину, то для слушателей и читателей незнакомыхъ съ теоріей функцій комплекснаго перемѣннаго во „введеніи“ сообщаются необходимыя свѣдѣнія изъ этой теоріи.—Опытный преподаватель можетъ, пользуясь нашей книгой, прочитать нѣсколько, различно составленныхъ, болѣе краткихъ курсовъ теоріи эллиптическихъ функцій.

Едва-ли найдется другая какая-либо отрасль математическаго анализа, столь богатая какъ своей литературой, такъ и системами изложенія, какъ теорія эллиптическихъ функцій; нѣкоторыя изъ другихъ системъ изложенія можетъ быть и будутъ немного проще; но едва-ли найдется какая-либо иная, кромѣ принятой въ этомъ сочиненіи, которая въ тоже время была бы столь же естественна и столь обща, какъ эта, будучи распространима и на высшія трансцендентныя, гиперэллиптическія и Абелевы.

Общіе методы, захватывая бо́льшую область въ наукѣ, въ то же время позволяютъ лучше отдѣлить общее отъ частнаго, главное отъ второстепеннаго, родовое отъ видового, и такимъ образомъ глубже проникнуть въ теорію и въ то-же время лучше постичь связь разныхъ частностей, ихъ соединеніе въ одно стройное цѣлое. Крупный шагъ впередъ въ наукѣ даетъ новое освѣщеніе и тому, что раньше было извѣстно.

Предлагаемое нынѣ сочиненіе написано именно подъ вліяніемъ успѣховъ, сдѣланныхъ теоріей Абелевыхъ интеграловъ, благодаря работамъ Вейерштрасса и Нётера.

Будучи посвящено предмету такого крупнаго значенія, какое имѣютъ теперь эллиптическія функціи въ математическомъ анализѣ, сочиненіе это, въ случаѣ удачнаго выполненія, должно имѣть нѣкоторое значеніе и само по себѣ; но какъ разработанное по тому общему плану, по которому теперь излагаются и теоріи гиперэллиптическихъ и Абелевыхъ интеграловъ, оно для желающаго перейти потомъ къ изученію этихъ теорій получаетъ еще новое значеніе, подготовительнаго къ нимъ курса.

Представляемая этимъ сочиненіемъ моя лепта на алтарь науки можетъ дѣйствительно сдѣлаться таковою конечно лишь въ томъ только случаѣ, если этому труду посчастливится обратить на себя вниманіе нашихъ соотечественныхъ любителей математики, на судъ которыхъ я и отдаю свой опытъ новаго изложенія теоріи эллиптическихъ функцій.

М. Тихомандрицкій.

Харьковъ.
2-го Марта 1895 г.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

§		Стр.
	Предисловіе	V
	Введеніе. *Необходимыя свѣдѣнія изъ теоріи функцій комплекснаго перемѣннаго*	I
	Мотивы къ этому введенію	I
1.	Комплексная перемѣнная; отвѣчающая ей точка на плоскости XOY. Геометрическое значеніе модуля и аргумента	—
2.	Нейманова сфера	II
3.	Плоскость антиподовъ	III
4.	Соотношеніе между величинами z и z', опредѣляющими точку на горизонтальной плоскости и ей соотвѣтственную на плоскости антиподовъ	—
5.	Функція комплексной перемѣнной	V
6.	Частное дифференціальное уравненіе второго порядка, которому удовлетворяетъ функція комплекснаго перемѣннаго	VII
7.	Интегралъ отъ UdV, взятый по кривой	—
8.	Случай U и V комплексныхъ функцій	VIII
9.	Интегралъ по кривой отъ функціи комплекснаго перемѣннаго	IX
10.	Преобразованіе двойнаго интеграла, распространеннаго на нѣкоторую площадь, въ простой, взятый по ея контуру	X
11.	Снятіе нѣкоторыхъ ограниченій вида площади, сдѣланныхъ въ пред. §	XII
12.	Односвязныя и многосвязныя площади	XIII
13.	Распространеніе формулы преобразованія § 10 на многосвязную площадь	—
14.	Интегралъ по сомкнутой кривой отъ полнаго дифференціала функціи двухъ независимыхъ перемѣнныхъ	XIII
15.	Теорема Коши	XIV
16—17.	Слѣдствія изъ нея	XV
18.	Полюсы и существенно-особенныя точки функціи комплекснаго перемѣннаго. Интегралъ вокругъ полюса	XVI
19.	Случай полюсовъ высшихъ порядковъ	XIX
20.	Вычетъ (residu)	XX
21.	Значенія интеграла по кривой, лежащей въ площади, заключающей полюсы	XXI
22.	Выраженіе значеній функціи и ея производныхъ въ точкѣ, лежащей внутри нѣкоторой площади, интеграломъ, взятымъ по ея контуру	—
23.	Случай, когда площадь имѣетъ форму круга, описаннаго изъ разсматриваемой точки, какъ центра	XXII
24.	Выводъ строки Тэйлора. Область сходимости ряда	XXIII

§ Стр.

25. Порядокъ значенія функціи въ какой либо точкѣ площади (Ordnungs-zahl). Сумма порядковъ для всѣхъ точекъ площади XXVI
26. Функція, однозначная, конечная и непрерывная на всей Неймановой сферѣ есть постоянная . XXVII
27. Функція, имѣющая одинъ полюсъ въ безконечно-удаленной точкѣ, есть полиномъ. Основное предложеніе Высшей Алгебры XXVIII
28. Функція, имѣющая полюсы въ конечномъ, есть раціональная дробь XXIX
29. Безконечные ряды, составленные изъ комплексныхъ величинъ. Ихъ сходимость . XXX
30. Безусловно- и равномѣрно-сходящійся рядъ можетъ быть интегрированъ . XXXI
31. Условія дифференцируемости ряда XXXII
32. Безконечныя произведенія; условія ихъ сходимости —
33. Двойныя суммы; условія ихъ сходимости XXXVI
34. Болѣе общая двойная сумма . XXXVII
35. Двойное безконечное произведеніе XXXIX

ТЕОРІЯ

ЭЛЛИПТИЧЕСКИХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИХЪ ФУНКЦІЙ.

§ Стр.

Глава I. *Приведеніе эллиптическихъ интеграловъ къ интеграламъ трехъ родовъ; различныя формы этихъ интеграловъ* 1

1. Общій видъ эллиптическихъ интеграловъ. Подъ корнемъ всегда можно разумѣръ полиномъ третьей степени 1
2. Общій видъ алгебраической функціи отъ x и корня изъ полинома третьей степени x. Сведеніе интеграла къ другому, содержащему корень лишь множителемъ знаменателя 2
3. Разложеніе на сумму интеграловъ двухъ типовъ. Ихъ можно обнять въ одной формулѣ . 4
4. Формула приведенія интеграловъ къ интеграламъ съ нисшими показателями степени бинома $x-a$. —
5. Интегралы перваго и второго рода 5
6. Интегралы третьяго рода . 6
7. Общій интегралъ второго рода . 7
8. Псевдо-интегралъ третьяго рода 8
9. Одна подстановка и ея слѣдствія 9
10. Выводъ одного тождества. Новая форма интеграла второго рода 12
11. Нормальный интегралъ второго рода 14
12—13. Въ нормальномъ интегралѣ второго рода заключаются всѣ прочія какъ частный случай . 15
14—15. Вейерштрассовскій и нормальный интегралы третьяго рода. Отличительное свойство послѣдняго 18

§ Стр.

Глава II. *Характеристическія особенности эллиптическихъ интеграловъ перваго, второго и третьяго рода* **21**

16. Критическія точки эллиптическихъ дифференціаловъ 21
17. Интегралъ перваго рода остается вездѣ конеченъ 23
18. Интегралъ второго рода перваго типа обращается въ безконечность въ безконечно-удаленной точкѣ . —
19. Прочіе интегралы второго рода въ безконечно-удаленной точкѣ конечны . 24
20. Нормальный интегралъ третьяго рода и Вейерштрассовскій въ безконечно-удаленной точкѣ . 25
21. Нормальный интегралъ второго рода въ точкѣ a —
22. Нормальный интегралъ третьяго рода въ точкахъ a и a_0 26
23. Характеристическія особенности интеграловъ трехъ родовъ (resumé) . . . 27

Глава III. *Риманова поверхность. Примъ-функціи; періоды эллиптическихъ интеграловъ* . **29**

24. Двузначность эллиптическихъ дифференціаловъ 29
25. Точки развѣтвленія квадратнаго корня изъ полинома третьей степени . . —
26. Значенія корня по обѣ стороны линіи, соединяющей эти особенныя точки . 31
27. Риманова двулистная поверхность для $\sqrt{R(x)}$ 32
28. Риманова двулистная сфера для $\sqrt{R(x)}$ 33
29. Односвязныя и многосвязныя поверхности. Риманова сфера для $\sqrt{R(x)}$ есть двусвязная поверхность. Преобразованіе ея въ односвязную —
30. Интегрированіе тождества § 10 по путямъ A и B. Функціи $\Omega(x, x_0)$ и $\Omega_1(x, x_0)$. Величины ω, ω'; η и η' 35
31—32. Преобразованіе интеграловъ, выражающихъ послѣднія величины . . . 37
33. Величины ω'' и η'' . 40
34. Свойства функцій $\Omega(x, x_0)$ и $\Omega_1(x, x_0)$ 42
35. Введеніе этихъ функцій въ равенства § 30. Выводъ соотношенія между величинами ω, ω'; η и η' . 44
36. Выраженіе интеграловъ перваго и второго рода чрезъ функціи $\Omega(x, x_0)$ и $\Omega_1(x, x_0)$. Періоды этихъ интеграловъ 45
37. Примъ-функціи перваго рода. Выраженіе чрезъ нихъ интеграловъ перваго и второго рода . 47
38. Функція $\Omega(x, x_0; a, a_0)$. Выраженіе интеграла третьяго рода чрезъ неё . . 50
39. Примъ-функція второго рода. Ея свойства 51
40. Выраженіе интеграла третьяго рода чрезъ примъ-функціи обоихъ родовъ. Періоды интеграла третьяго рода 53
41. Выраженіе періодовъ интеграла третьяго рода чрезъ примъ-функціи . . . 54

Глава IV. *Выраженіе раціональной функціи x и $\sqrt{R(x)}$ чрезъ примъ-функціи. Теорема Абеля* . **56**

42. Общій видъ раціональной функціи x и $\sqrt{R(x)}$; ея нули и безконечности . 56
43. Сравненіе ея съ раціональною дробью 58
44. Цѣлая алгебраическая функція x и $\sqrt{R(x)}$. Опредѣленіе ея по даннымъ λ—1 нулямъ; опредѣленіе λ-го нуля 59
45. Дробная алгебраическая функція x и $\sqrt{R(x)}$. Опредѣленіе ея по даннымъ нулямъ и безконечностямъ; опредѣленіе послѣдняго нуля (или безконечности) . 61

§ Стр.

46. Случай, когда нѣкоторые нули или безконечности находятся въ безконечности —
47. Выраженіе алгебраической функціи x и $\sqrt{R(x)}$ чрезъ примъ-функціи . . 62
48. Теорема Абеля; выводъ по Вейерштрассу 64
49. Выводъ ея по Абелю и Якоби для Якобіевскаго интеграла третьяго рода . 65
50. Таже теорема для Вейерштрассовскаго интеграла третьяго рода 69
51. Теорема Абеля для интеграловъ перваго рода 70
52. Теорема Абеля для нормальнаго интеграла третьяго рода 71
53. Теорема Абеля для интеграловъ второго рода —
54. Резюме́ предыдущаго . 75
55. Теорема Абеля для самаго общаго эллиптическаго интеграла —

Глава V. *Частный случай Абелевой теоремы. Каноническая форма эллиптическихъ дифференціаловъ Вейерштрасса* **77**

56. О теоремѣ Эйлера . 77
57. Частный случай Абелевой теоремы. Опредѣленіе функціи y, имѣющей три безконечности въ безконечномъ и два данныя нуля въ конечномъ . 78
58. Выводъ теоремы Эйлера изъ теоремы Абеля 79
59—60. Тоже для интеграловъ третьяго и второго рода. Элементарный выводъ теоремы Эйлера для интеграловъ перваго и второго рода 80
61. Введеніе новой перемѣнной s въ формулы предыдущихъ §§. Инваріанты g_2 и g_3. Каноническая форма Вейерштрасса 86
62. Выводъ ея изъ теоріи бинарныхъ формъ 4-ой степени (Эрмита). Инваріанты и коваріанты формы 4-ой степени 89
63. Другой выводъ ихъ . 93
64. Вѣсъ инваріантовъ . 95
65. Число независимыхъ инваріантовъ. Абсолютный инваріантъ. Дискриминантъ. Его выраженіе чрезъ инваріанты 96
66. Число независимыхъ коваріантовъ. Соотношеніе между двумя коваріантами и самой формой . 99
67. Преобразованіе эллиптическаго дифференціала на основаніи предыдущаго . 102
68. Выводъ Миттагъ-Леффлера въ связи съ теоремой Эйлера. Первое упрощеніе 104
69. Постановка вопроса объ отысканіи общаго интеграла эллиптическаго дифференціальнаго уравненія . 107
70. Рѣшеніе его . 108
71. Выраженіе s и $\sqrt{S}$ чрезъ x и $\sqrt{R(x)}$ 113
72. Теорема Эйлера. Одна формула 116

Глава VI. *Обращеніе эллиптическихъ интеграловъ. Функція $\wp(u)$* **118**

73. Обращеніе интеграла перваго рода. Функція $\wp(u)$ двоякопеpіодическая. Имѣетъ въ $u \equiv 0$ полюсы второго порядка. Свойства. Параллелограммъ періодовъ . 118
74. Производныя функціи $\wp(u)$ 122
75. Однозначность функціи $\wp(u)$ 124
76. Способъ обращенія въ безконечность 126
77. Періодичность функціи $\wp(u)$ и періоды, выведеные съ помощію одной подстановки . 129

§ Стр.

78. Теорема сложенія для $\wp(u)$. 133
79. Теорема сложенія для $\wp'(u)$. —
80. Обобщеніе формулы (1) пред. § . 134
81. Нѣкоторыя преобразованія формулъ §§ 78 и 79 137

Глава VII. *Функціи* $\zeta(u)$, $Y(u)$, $\Theta(u)$ **140**

82. Введеніе перемѣнной u въ интегралъ второго рода (нормальный), функція $Z(u \mid v)$. 140
83. Періодичность (второго рода) функціи $Z(u \mid v)$; періоды 142
84. Сведеніе функціи $Z(u \mid v)$ на функцію $Z(u)$. Функція $\zeta(u)$; сведеніе на нее функцій $Z(u)$ и $Z(u \mid v)$ 145
85. Выраженіе нормальнаго интеграла третьяго рода при помощи перемѣнной u и параметра v. Тоже для интеграловъ третьяго рода Вейерштрасса и Якоби. Связь ихъ съ функціей $\zeta(u)$ 148
86. Теорема сложенія для интеграловъ второго рода въ новой ихъ формѣ . . 150
87. Интегрированіе предыдущихъ равенствъ. Функція $Y(u)$. Выраженіе чрезъ неё $\log[\wp(u)-\wp(v)]$. Переходъ отъ логариѳма къ числу; функція $\Theta(u)$. 154
88. Выраженіе $\sqrt{\wp(u)-\wp(v)}$ чрезъ Θ-функцію. Союзныя Θ-функціи 157
89. Выраженіе интеграловъ третьяго рода чрезъ Θ-функціи. Вейерштрассовское обозначеніе его интеграла третьяго рода 158
90. Выраженія функціи $\wp(u)$ чрезъ Θ-функціи 162

Глава VIII. *Свойства Θ-функцій* **163**

91. Однозначность, конечность и непрерывность основной Θ-функціи. Ея нули . 163
92. Нечетность ея, выведенная изъ свойствъ функціи $Y(u)$ 165
93. Функціональныя уравненія функціи Θ 167
94. Обобщеніе предыдущихъ формулъ 168
95. Выводъ теоремы *Лежандра* . 170
96. Свойствами §§ 91—93 функція Θ вполнѣ опредѣляется 173
97. О томъ же нѣсколько иначе . 175
98. Новое выраженіе союзныхъ Θ-функцій. Онѣ удовлетворяютъ подобнымъ же функціональнымъ уравненіямъ, какъ и основная Θ 179
99. Три предыдущія четныя союзныя функціи суть единственныя, удовлетворяющія нашимъ уравненіямъ 180
100. Самая общая Θ-функція сводится на основную Θ-функцію 183
101. Обобщеніе функціональнаго уравненія для союзныхъ Θ-функцій 186
102. Нули Θ-функцій, основной и союзныхъ 187
103. Значенія Θ-функцій для значеній аргумента равныхъ одному изъ полуперіодовъ . 188
104. Выраженія $\sqrt{e_i-e_j}$ чрезъ Θ-функціи отъ полуперіодовъ 189
105. Другія формулы, оттуда вытекающія 191
106. Переходъ Θ-функцій однѣхъ въ другія при измѣненіи аргумента на полуперіодъ . 193
107. Сводъ предыдущихъ формулъ въ таблицу 197
108. Соотношеніе между квадратами трехъ Θ-функцій 198
109. Другой способъ вывода такихъ формулъ 200
110—111. Продолженіе пред. § . 202

§ Стр.

Глава IX. *Отношенія Θ-функцій. Функціи амплитуды* **208**

112. Три типа функцій, получаемыхъ отъ дѣленія одной Θ-функціи на другую. Связь ихъ съ функціями $\sqrt{\wp(u)-e_i}$ 208
113. Переходъ этихъ функцій однѣхъ въ другія при измѣненіи аргумента на полуперіодъ . 209
114. Таблица предыдущихъ формулъ 212
115. Переходъ функцій $\sqrt{\wp(u)-e_i}$ и ихъ отношеній однѣхъ въ другія 213
116. Двоякая періодичность отношеній двухъ Θ-функцій и функцій $\sqrt{\wp(u)-e_i}$. . 214
117—119. Выводъ дифференціальныхъ уравненій, которымъ удовлетворяютъ частныя отъ раздѣленія одной Θ-функціи на другую 215
120. Преобразованіе этихъ дифференціальныхъ уравненій 221
121. Приведеніе этихъ уравненій къ одному и тому же въ виду чрезъ умноженіе частныхъ двухъ Θ-функцій на нѣкоторыя постоянныя 224
122. Лежандровскій интегралъ перваго рода. Обозначенія Якоби. Функціи амплитуды v. Обозначенія Гудермана 225
123. Выраженія модуля и его дополнительнаго чрезъ e_1, e_2, e_3 и полуперіоды . 227
124. Выраженія функцій амплитуды v чрезъ Θ-функціи 229
125. Соотношенія между функціями амплитуды и $\sqrt{\wp(u)-e_j}$; также между модулемъ и множителемъ и инваріантами. Формула, которою Halphen опредѣляетъ функцію $\wp(u)$. 230
126. Нули и безконечности функцій амплитуды 232
127. Связь между величинами ω_i и K и $K'i$ Якоби 233
128. Періоды функцій амплитуды . 235
129. Выраженія ихъ нулей и безконечностей чрезъ величины K и $K'i$ 237
130. Выводъ формулъ, показывающихъ переходъ однѣхъ функцій амплитуды въ другія при измѣненіи аргумента v на K, $K'i$ и $K+K'i$ 238
131. Сводъ этихъ формулъ въ таблицу 243
132. Теорема сложенія функціи $\sin\mathrm{am}\, v$. Выводъ ея изъ формулы § 60 245
133. Теоремы сложенія функцій $\cos\mathrm{am}\, v$ и $\Delta\mathrm{am}\, v$; выводъ изъ предыдущаго . . 247
134. Формулы, выведенныя изъ предыдущихъ Якоби въ его „Fundamenta nova“ . 249
135. Другая группа производныхъ формулъ 250
136. Выраженія функцій амплитуды отъ двойнаго аргумента чрезъ функціи амплитуды простого . 252
137. Дифференціальныя уравненія функцій амплитуды, полученныя изъ таковыхъ для частныхъ двухъ Θ-функцій и непосредственно 253
138. Переходъ отъ дифференціальнаго уравненія синуса амплитуды v къ Θ-функціямъ: выводъ выраженія $\sin\mathrm{am}\, v$ въ формѣ частнаго двухъ функцій, выражающимся чрезъ двойные интегралы 255
139. Выводъ предыдущей формулы изъ формулы § 9 чрезъ замѣну перемѣнныхъ другими. Выраженіе интеграла *втораго рода* чрезъ перемѣнную $x=\sin\mathrm{am}\, v$ и чрезъ v . 258
140. Введеніе перемѣнной u въ первую формулу пред. §; выводъ оттуда выраженія $\sqrt{\wp(u)-e_i}$ чрезъ частное двухъ Θ-функцій 262
141. Введеніе тѣхъ же перемѣнныхъ въ интегралъ третьяго рода Якоби . . . 265

§ Стр.

Глава X. *Разложенiе эллиптическихъ функцiй на частныя дроби и въ безконечныя произведенiя* **269**

142. Предисловiе 269
143. Разложенiе на частныя дроби функцiи $\operatorname{cosec}^2(z-\alpha)$; свойства этой функцiи 270
144. Построенiе разложенiя $\operatorname{cosec}^2(z-\alpha)$. Выводъ оттуда $\sum_1^{+\infty}\frac{1}{k^2}$ и разложенiе $\sec^2 z$, $\operatorname{cosec}^2 z$ 272
145. Выводъ разложенiя $\operatorname{cotg}(z-\alpha)$, $\operatorname{cotg} z$, $\operatorname{tg} z$, $\sec z$ и $\operatorname{cosec} z$, также $\frac{\cos z}{\sin^2 z}$, $\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k(-1)^k\frac{1}{k^2}$ 274
146. Преобразованiе предыдущихъ формулъ въ Эйлеровскiя 277
147. Разложенiе $\frac{\sin(z-\alpha)}{\sin(-\alpha)}$, $\sin z$ и $\cos z$ въ безконечныя произведенiя 278
148. Выводъ перiодичности предыдущихъ функцiй изъ ихъ разложенiй въ безконечныя произведенiя 280
149. Разложенiе на частныя дроби функцiи $\wp'(u-v)$. Безусловная сходимость одного разложенiя на частныя дроби 282
150. Выводъ оттуда разложенiя на частныя дроби функцiи $\wp'(u-v)$ 285
151. Полученiе оттуда разложенiя на частныя дроби $\wp(u-v)$, $\wp(u)$, $e_i=\wp(\omega_i)$, $\wp(u\mp\omega_i)$. Выводъ оттуда перiодичности функцiи $\wp(u)$ 287
152. Безусловная сходимость предыдущихъ разложенiй 289
153. Выводъ разложенiя на частныя дроби функцiи $\zeta(u-v)$, $\zeta(u)$, $\eta_i=\zeta(\omega_i)$, $\zeta(u\mp\omega_i)$. Выводъ перiодичности второго рода функцiи $\zeta(u)$ изъ ея разложенiя на частныя дроби 290
154. Безусловная сходимость этихъ разложенiй 292
155. Выводъ разложенiя функцiй $\frac{\Theta(u-v)}{\Theta(-v)}$, $\frac{\Theta(u)}{\Theta'(0)}$, $\frac{\Theta_i(u)}{\Theta'(0)}$ въ безконечныя произведенiя. Выводъ оттуда функцiональнаго уравненiя функцiи $\Theta(u)$. 293
156. Безусловная сходимость этихъ разложенiй въ безконечныя произведенiя . 295
157. Функцiи $\sigma(u)$, $\sigma_i(u)$ Вейерштрасса 297
158. Выраженiе $\sigma(u)$ при помощи опредѣленныхъ интеграловъ, также и функцiи $\zeta_0(u)$ Вейерштрасса 299
159. Свойства функцiи $\sqrt{\wp(u)-e_i}$ 301
160. Разложенiе функцiи $\left(\sqrt{\wp(u)-e_i}\right)''$ на частныя дроби; его сходимость. Разложенiе функцiи $\sqrt{\wp(u)-e_i}$ 304
161. Выводъ оттуда разложенiя произведенiя двухъ такихъ функцiй и величинъ e_i; $\sqrt{e_j-e_i}$; $\sqrt{e_i-e_j}$; $\sqrt{e_i-e_k}$ 306
162. Разложенiе функцiи $\sqrt{\wp(u\pm\omega_j)-e_i}$ на частныя дроби 307
163. Разложенiе на частныя дроби функцiй $\frac{1}{\sqrt{\wp(u)-e_j}}$ и $\frac{\sqrt{\wp(u)-e_i}}{\sqrt{\wp(u)-e_k}}$. . . 309
164. Разложенiе на частныя дроби функцiй $\operatorname{sinam} u$, $\operatorname{cosam} u$ и $\Delta\operatorname{am} u$ —

§ Стр.

Глава XI. *Преобразованіе двойныхъ разложеній на частныя дроби и въ безконечныя произведенія въ простыя* **310**

165. Преобразованіе разложенія на частныя дроби функціи $\wp(u-v)$. Два разложенія функціи $\wp(u)$. 310
166. Преобразованіе разложенія функціи $\zeta(u-v)$. Два разложенія функціи $\zeta(u)$ 315
167. Преобразованіе предыдущаго разложенія. Разложеніе $\frac{\overline{\eta}}{\omega}$ и $\frac{\overline{\eta}'}{\omega'}$ на частныя дроби . 318
168. Введеніе послѣднихъ величинъ въ предыдущія формулы и повѣрка Лежандровскаго соотношенія между полупеpіодами функцій $\wp(u)$ и $\zeta(u)$. 323
169. Окончательный видъ разложеній § 165. Разложенія $\wp(u+\omega_i)$ и e_i 324
170. Выводъ изъ формулъ § 167 разложенія $\frac{\Theta(u-v)}{\Theta(-v)}$ въ безконечное произведеніе . 326
171. Выводъ того же разложенія изъ двойного безконечнаго произведенія . . 327
172. Дальнѣйшее преобразованіе полученной формулы 329
173. Выводъ оттуда разложенія въ простыя безконечныя произведенія функцій $\Theta(u)$ и ея союзныхъ 331
174. Другія разложенія тѣхъ же функцій 333
175. Выводъ разложенія $\left(\sqrt{\wp(u)-e_1}\right)'$ въ простой рядъ изъ ея разложенія въ двойной рядъ частныхъ дробей. Выводъ оттуда разложенія функціи $\sqrt{\wp(u)-e_1}$ и его преобразованіе. 334
176. Другое аналогичное разложеніе той же функціи $\sqrt{\wp(u-v)-e_1}$ 337
177. Аналогичныя разложенія функцій $\sqrt{\wp(u-v)-e_2}$ и $\sqrt{\wp(u-v)-e_3}$ 338
178. Выводъ изъ предыдущихъ формулъ аналогичныхъ разложеній всѣхъ функцій вида $\sqrt{\wp(u)-e_j}$, $\frac{1}{\sqrt{\wp(u)-e_j}}$, $\frac{\sqrt{\wp(u)-e_i}}{\sqrt{\wp(u)-e_k}}$ 339
179. Аналогичныя разложенія всѣхъ выраженій вида $\sqrt{e_i-e_j}$ 341
180. Аналогичныя разложенія функцій вида $\sqrt{\wp(u)-e_i}.\sqrt{\wp(u)-e_j}$ и выраженій вида $\sqrt{e_i-e_j}.\sqrt{e_i-e_k}$ 342
181. Преобразованіе въ простой рядъ двойныхъ разложеній на частныя дроби функцій sinamv, cosamv, $\triangle$amv. Нѣсколько разложеній модуля k . 344
182. Другое преобразованіе въ простыя ряды тѣхъ же двойныхъ разложеній на частныя дроби тѣхъ же функцій. Другія разложенія k и K', получающіяся при этомъ 348
183. Преобразованіе разложеній § 169 чрезъ соединеніе въ одинъ членовъ симметричныхъ относительно члена средняго 352
184. Такое же преобразованіе разложеній § 167 функціи $\zeta(u)$ 355
185. Соотвѣтственное преобразованіе розложеній Θ-функцій § 173 356
186. Такое же преобразованіе разложеній § 178 357
187. Такое же преобразованіе формулъ § 180 360
188. Такое же преобразованіе разложеній sinamu, cosamu и $\triangle$amu 362

§ Стр.

189. Введеніе величинъ q, или q', въ предыдущія формулы; подготовленіе . . 363
190. Введеніе ихъ въ формулы §§ 183 и 184 365
191. Тоже для функціи второго рода 366
192. Тоже для Θ-функцій . 369
193. Тоже для формулъ §§ 186 и 187 371
194. Соотвѣтственное преобразованіе формулъ § 188 375
195. Разложеніе на множители Θ-функцій для значеній u равныхъ одному изъ полуперіодовъ, и другихъ постоянныхъ 377

Глава XII. *Разложеніе Θ- и эллиптическихъ функцій въ тригонометрическіе ряды* . **382**

196. Частные виды періодовъ интеграловъ 2-го рода 382
197. Якобіевскія Θ-функціи . 384
198. Разложеніе ихъ въ тригонометрическіе ряды 386
199. Союзныя Θ-функціи . 389
200. Значеніе Θ-функцій для частныхъ значеній u 392
201. Формулы перехода ϑ-функцій однѣхъ въ другія 393
202. Разложеніе другихъ Якобіевыхъ функцій въ тригонометрическіе ряды . . 395
203. Соотношеніе между произведеніями ϑ-функцій по четыре 398
204. Подобныя соотношенія между $\sigma(u)$, а также между общими $\Theta(u)$ 401
205. Разложеніе функціи $\zeta(u)$ въ тригонометрическій рядъ 402
206. Ряды для $\overline{\eta}$ и $\overline{\eta}'$. 405
207. Тригонометрическіе ряды для $\wp(u)$. Ряды для e_i 406
208. Разложеніе для $\sqrt{\wp(u)-e_i}$, имъ обратныхъ и частныхъ этихъ функцій въ тригонометрическіе ряды. Ряды для $\sqrt{e_i-e_j}$ 407
209. Тригонометрическіе ряды для логариѳмовъ отъ Θ-функцій 409
210. Тригонометрическіе ряды для логариѳмовъ отъ $\sqrt{\wp(u)-e_i}$. Ряды для $\log\sqrt{e_i-e_j}$. 410
211. Тригонометрическіе ряды для функцій амплитуды v. Ряды для логариѳмовъ отъ нихъ и для логариѳмовъ нѣкоторыхъ постоянныхъ 412

Глава XIII. *Разложеніе эллиптическихъ функцій и σ-функцій въ ряды по степенямъ u* . **417**

212. Разложеніе $\wp(u)$ въ рядъ по степенямъ u. 417
213. Разложеніе $\zeta(u)$ въ рядъ по степенямъ u. 421
214. Разложеніе $\Theta(u)$ въ рядъ по степенямъ u. Первый способъ —
215—217. Частныя дифференціальныя уравненія для Θ-функцій 422
218. Тоже для σ-функцій . 430
219. Разложеніе $\sigma(u)$ въ рядъ по степенямъ u по способу Вейерштрасса . . . 433
220. Тоже по способу Гальфена . 434
221—222. Другія частныя дифференціальныя уравненія для σ_i-функцій по Вейерштрассу . 435
223. Приложеніе ихъ къ разложенію $\sigma_i(u)e^{\frac{1}{2}e_iu^2}$ 438

ВВЕДЕНІЕ.

Необходимыя свѣдѣнія изъ теоріи функцій комплекснаго перемѣннаго.

Свойства эллиптическихъ функцій тогда вполнѣ раскрылись и получили ясное и изящное выраженіе, когда Абель и Якоби, переставъ ограничиваться, подобно своимъ предшественникамъ, вещественными значеніями независимой перемѣнной, стали принимать независимую перемѣнную комплексной величиною; поэтому мы начнемъ наше изложеніе теоріи эллиптическихъ функцій съ изложенія необходимѣйшихъ свѣдѣній изъ теоріи функцій комплекснаго перемѣннаго, чтобы потомъ не имѣть надобности отклоняться отъ нашего предмета для доказательства предложеній общаго характера. Читатели, знакомые съ элементами теоріи функцій комплекснаго перемѣннаго, могутъ опустить это введеніе.

1. Комплексною перемѣнною называютъ соединеніе

$$z = x + yi\,, \tag{1}$$

гдѣ x и y вещественныя перемѣнныя, а $i = \sqrt{-1}$. Разсматривая x и y какъ координаты точки относительно прямоугольныхъ осей, мы видимъ, что каждой точкѣ неограниченной плоскости отвѣчаетъ одно опредѣленное значеніе перемѣнной z, и наоборотъ, каждому значенію перемѣнной z отвѣчаетъ одна опредѣленная точка плоскости. Когда одна или обѣ перемѣнныя x и y будутъ непрерывно измѣняться, точка (z) будетъ чертить на плоскости нѣкоторую линію. Представивъ комплексную перемѣнную въ приведенной формѣ:

$$z = \varrho\,(\cos\theta + i\sin\theta)\,, \tag{2}$$

легко увидимъ, такъ какъ будетъ

$$x = \varrho \cos\theta\,, \qquad y = \varrho \sin\theta\,, \tag{3}$$

что модуль ея

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{4}$$

и аргументъ

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \tag{5}$$

будутъ не что иное, какъ полярныя координаты точки (z) нашей плоскости.

Если (z) будетъ перемѣщаться по прямой линіи проходящей чрезъ точку $z=0$, то θ будетъ постоянная величина; въ этомъ случаѣ функція

$$Z = (a + bi)z \tag{6}$$

будетъ представлять точку, перемѣщающуюся по другой прямой проходящей чрезъ эту точку $z=0$. Дѣйствительно пусть

$$a + bi = r(\cos\varphi + \sin\varphi)\,; \tag{7}$$

тогда будетъ по правиламъ умноженія комплексныхъ величинъ въ приведенной формѣ:

$$Z = r\varrho\,[\cos(\varphi+\theta) + \sin(\varphi+\theta)]\,, \tag{8}$$

гдѣ $\varphi+\theta =$ постоянному, при $\theta =$ постоянному, откуда и слѣдуетъ сказанное. Отсюда видно также, что вторая прямая будетъ отклоняться отъ первой на уголъ φ, т. е. на аргументъ постояннаго множителя.

2. Если между точками этой плоскости и какою либо поверхностью установимъ однозначное соотвѣтствіе, такъ что каждой точкѣ плоскости будетъ отвѣчать одна и только одна точка поверхности и наоборотъ, каждой точкѣ поверхности будетъ отвѣчать одна и только одна точка плоскости, то эта поверхность также будетъ своими точками представлять всю совокупность значеній комплексной перемѣнной, какъ и наша плоскость. За такую поверхность удобнѣе всего, слѣдуя Нейману, взять сферу діаметра равнаго единицѣ длины, касательную къ нашей плоскости снизу ея въ началѣ координатъ, т. е. въ точкѣ $z=0$, (если мы эту плоскость представимъ себѣ горизонтальною): если точку этой сферы, діаметрально противоположную точкѣ касанія, соединимъ прямою съ точкою (z) нашей плоскости, то она пересѣчетъ

сферу еще только въ одной точкѣ (ζ): эта точка будетъ слѣдовательно вполнѣ опредѣлена, когда дана точка (z), и наоборотъ, послѣдняя будетъ опредѣлена вполнѣ, когда дана первая; такимъ образомъ между этими точками существуетъ однозначное соотвѣтствіе. Точкамъ плоскости, расположеннымъ по прямымъ изъ начала координатъ, будутъ отвѣчать точки меридіановъ, проходящихъ чрезъ точки O и O' — касанія плоскости (z) и ея діаметрально-противоположную; точкамъ круговъ, описанныхъ изъ O какъ центра, будутъ отвѣчать точки параллельныхъ круговъ; безконечно-удаленнымъ точкамъ плоскости будетъ отвѣчать точка O'; поэтому про безконечно-удаленную точку плоскости говорятъ въ единственномъ числѣ. Если точка (z) въ плоскости опишетъ сомкнутую кривую, то и точка (ζ) опишетъ таковую на сферѣ.

3. Для болѣе удобнаго разсмотрѣнія безконечно-большихъ значеній z, проводятъ другую горизонтальную плоскость, касательную къ сферѣ въ точкѣ O' и устанавливаютъ однозначное соотвѣтствіе между точками этой плоскости и сферы, соединяя точку (ζ) съ точкою O сферы и замѣчая точку (z'), въ которой продолженная прямая, соединяющая ихъ, встрѣчаетъ новую плоскость, которую для краткости называютъ плоскостью антиподовъ. Каждой точкѣ первой плоскости будетъ чрезъ посредство сферы отвѣчать опредѣленная точка, и только одна, плоскости антиподовъ. Если точка (z) опишетъ сомкнутую кривую въ первой плоскости, то точка (z') въ плоскости антиподовъ опишетъ также сомкнутую кривую. Если кривая описанная первою точкою т. е. (z) будетъ окружать точку O, то кривая описанная точкою (z') въ плоскости антиподовъ будетъ окружать точку O'. При этомъ внутреннимъ точкамъ первой кривой будутъ отвѣчать внѣшнія второй и наоборотъ, потому что когда (z) удаляется отъ O, тогда (z') приближается къ O'.

4. Если точка движется по сомкнутой кривой такъ, что лежащая внутри ея область находится влѣво для наблюдателя, идущаго съ нею, то говорятъ, что точка дѣлаетъ обходъ этой области въ положительномъ направленіи. Если прямая вращается около нѣкоторой ея точки, такъ что всякая другая точка ея будетъ постоянно имѣть влѣво отъ себя неподвижную, то говорятъ, что прямая вращается въ положительномъ направленіи. Отрицательными называются противоположныя направленія. Оси x и y выберемъ въ горизонтальной плоскости такъ, чтобы радіусъ-векторъ отъ положительнаго направленія оси x къ положительному направленію оси y переходилъ послѣ вращенія на прямой уголъ въ положительномъ направленіи. Въ плоскости антиподовъ выберемъ ось x такъ, чтобы она шла параллельно положительному на-

правленію оси x; ось y перпендикулярно къ ней параллельно отрицательму направленію оси y въ первой плоскости: тогда относительное положеніе координатныхъ осей для наблюдателя, смотрящаго съ какой либо точки внѣшней нормали сферы, будетъ одинаковое въ обѣихъ плоскостяхъ, именно смотря на ось OX положительномъ направленіи, онъ будетъ имѣть положительное направленіе оси OY влѣво отъ себя. При такомъ расположеніи осей, когда точка (z) будетъ дѣлать положительный обходъ области, незаключающей внутри себя точки O, и точка (z') будетъ совершать обходъ въ положительномъ направленіи соотвѣтственной области въ плоскости антиподовъ: это слѣдуетъ изъ того, что когда одна удаляется отъ O, другая приближается къ O' и наоборотъ, и когда одна идетъ въ положительномъ направленіи какой либо оси, другая идетъ въ отрицательномъ. Но, если внутри сомкнутой кривой, описываемой точкою (z), будетъ лежать точка O, то положительному обходу ея будетъ отвѣчать отрицательный обходъ точки O' точкою (z') въ плоскости антиподовъ, какъ нетрудно видѣть. Углы полярные, θ и θ', будутъ дополнять одинъ другой до 2π:

$$\theta + \theta' = 2\pi; \tag{1}$$

что же касается до радіусовъ $\varrho = Oz$ и $\varrho' = O'z'$, то изъ подобія треугольниковъ $OO'z$ и $OO'z'$, будемъ имѣть:

$$Oz' : OO' = OO' : Oz, \tag{2}$$

откуда, въ виду $OO' = 1$, получимъ

$$\varrho' = \frac{1}{\varrho}. \tag{3}$$

Изъ (1) слѣдуетъ:

$$\cos\theta' + i\sin\theta' = \cos\theta - i\sin\theta = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta}; \tag{4}$$

слѣдовательно

$$z' = \varrho'(\cos\theta' + i\sin\theta') = \frac{1}{\varrho(\cos\theta + i\sin\theta)} = \frac{1}{z}, \tag{5}$$

т. е.

$$z' = \frac{1}{z}, \tag{6}$$

т. е. наше преобразованіе сводится къ введенію вмѣсто z новой перемѣнной, ей обратной. — Эти геометрическія соображенія значительно облегчаютъ выраженіе предложеній и ихъ пониманіе и представленіе.

5. Каждому опредѣленному значенію z отвѣчаютъ опредѣленныя значенія x и y, а слѣдовательно опредѣленная точка плоскости. Если имѣемъ функцію $u = F(x,y)$, то она будетъ въ каждой точкѣ принимать вообще опредѣленныя значенія, одно, или нѣсколько, которыя будутъ вообще измѣняться, когда точка будетъ перемѣщаться по плоскости, слѣдовательно перемѣнная z измѣняться, а потому можетъ быть разсматриваема какъ функція перемѣнной z. Такъ *Коши* ее и разсматривалъ; но въ настоящее время подъ функціей комплексной перемѣнной разумѣютъ то, что Коши называлъ *моногенная* функція. Если мы имѣемъ кромѣ U еще другую функцію $V = f(x,y)$ тѣхъ же перемѣнныхъ x и y, то U будетъ функція отъ V, когда будетъ тождественно

$$\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \tag{1}$$

и наоборотъ, когда выполнено это условіе, U будетъ функція V:

$$U = \Phi(V),$$

а не отдѣльно x и y. Если теперь примѣнимъ эти сужденія къ функціи $z = x + yi$, взявъ ее вмѣсто V, то условіе (1) обратится въ такое:

$$\frac{\partial U}{\partial x} i - \frac{\partial U}{\partial y} = 0,$$

или помножая все на $-i$:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y} = 0; \tag{2}$$

вотъ условіе, которому должно удовлетворять U, чтобы быть функціей комплексной перемѣнной $z = x + yi$, а не отдѣльно x и y. Такая функція будетъ имѣть производную $\frac{dU}{dz}$, независящую отъ отношенія $\frac{dy}{dx}$, а только отъ z. Дѣйствительно:

$$\left.\begin{aligned} dU &= \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial x} - i\frac{\partial U}{\partial y}\right)(dx + idy) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y}\right)(dx - idy); \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

здѣсь вторая часть приводится къ первому члену, когда выполнено условіе (2), и мы тогда получаемъ:

$$\frac{dU}{dz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial x}-i\,\frac{\partial U}{\partial y}\right), \tag{4}$$

или по (2):

$$\frac{dU}{dz}=\frac{\partial U}{\partial x}=-i\frac{\partial U}{\partial y}. \tag{5}$$

Это послѣднее равенство совершенно равносильно (2): изъ него, перенося все въ одну часть, получимъ равенство (2). И въ самомъ дѣлѣ, если U есть функція $z=x+yi$, то она будетъ функціей x и y чрезъ посредство перемѣнной z; потому

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x}&=\frac{dU}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dU}{dz};\\ \frac{\partial U}{\partial y}&=\frac{dU}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{dU}{dz}\,i;\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

помножая послѣднее равенство на i, и получимъ по сложеніи съ первымъ равенство (2). Функціи, имѣющія опредѣленныя производныя, независящія отъ отношенія $\frac{dy}{dx}$, опредѣляющаго направленіе, по которому нужно перемѣстить точку z, чтобы дать функціи приращеніе, Коши и называлъ *моногенными—monogènes.*

6. Если положимъ

$$U=u+vi, \tag{1}$$

гдѣ u и v вещественныя функціи x и y:

$$u=\varphi(x,y), \qquad v=\psi(x,y), \tag{2}$$

то внося изъ (1) во (2) предыдущаго §, получимъ:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}\,i\right)+i\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}\,i\right)=0; \tag{3}$$

это уравненіе распадается на два:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0\,; \tag{4}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0\,; \tag{5}$$

откуда получимъ

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\,; \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{6}$$

Изъ (4) и (5) чрезъ дифференцированіе и складываніе или вычитаніе легко получаемъ такія два:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,, \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0\,, \tag{8}$$

а слѣдовательно по (1) и

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0\,, \tag{9}$$

т. е. u, v и U суть рѣшенія частнаго дифференціальнаго уравненія втораго порядка (9).

7. Положимъ, что U и V суть однозначныя, конечныя и непрерывныя функціи вещественныхъ перемѣнныхъ x и y, разсматриваемыхъ какъ координаты точки плоскости (z), для всѣхъ ея положеній внутри нѣкоторой области; проведемъ изъ точки z_0 этой области въ другую точку Z той же области нѣкоторую кривую, лежащую всѣми своими точками въ той же области, и возьмемъ на ней рядъ точекъ z_0, z_1, $z_2, \ldots z_n$, Z; значенія функцій въ этихъ точкахъ будемъ обозначать припискою тѣхъ же нумеровъ къ характеристикамъ функцій, для промежуточныхъ же между ними точекъ припиской обоихъ значковъ; тогда предѣлъ, къ которому стремится сумма:

$$\sum_{i=0}^{i=n} U_{i,\,i+1}(V_{i+1} - V_i) \tag{1}$$

когда число n промежуточныхъ точекъ ряда будемъ увеличивать безпредѣльно, уменьшая въ тоже время безпредѣльно ихъ разстоянія, и есть то, что называютъ *интеграломъ взятымъ отъ* z_0 *до* Z *по кривой*, нами проведенной, и обозначаютъ знакомъ: $\int_{z_0}^{Z} Udv$, такъ что слѣд.

$$\int_{z_0}^{Z} UdV = \text{пред.} \sum_{i=0}^{i=n} U_{i,i+1}(V_{i+1} - V_i). \tag{2}$$

Если кривая сомкнутая, то тогда $Z = z_0$; интегралъ сохраняетъ тоже опредѣленіе—какъ предѣлъ суммы безконечно большаго числа безконечно-малыхъ слагаемыхъ стоящаго подъ знакомъ $\sum$ вида, но обозначается обыкновенно какъ неопредѣленный съ припискою внизу въ скобкахъ обозначенія кривой. Изъ (2) тотчасъ же слѣдуетъ, что

$$\int_{Z}^{z_0} UdV = -\int_{z_0}^{Z} UdV; \tag{3}$$

тоже самое будетъ и въ случаѣ сомкнутой кривой, ибо слагаемое $U_{i,i+1}(V_{i+1} - V_i)$ замѣнится теперь чрезъ $U_{i,i+1}(V_i - V_{i+1})$, что отличается лишь знакомъ отъ прежняго. Значеніе $U_{i,i+1}$ въ какой либо точкѣ кривой промежуточной между точками z_i и z_{i+1}, можетъ быть замѣнено значеніемъ въ которой нибудь изъ этихъ точекъ, ибо всѣ эти три значенія безконечно-мало разнятся между собою, такъ какъ мы разсматриваемъ непрерывныя функціи.

8. Мы предполагали U и V вещественными функціями; но сказанное относится и къ комплекснымъ. Въ этомъ случаѣ будетъ

$$U = u + v\sqrt{-1} \qquad V = t + w\sqrt{-1}, \tag{1}$$

гдѣ u, v, t, w вещественныя функціи x и y, — и

$$\left.\begin{aligned} U_{i,i+1}(V_{i+1} - V_i) &= (u_{i,i+1} + v_{i,i+1}\sqrt{-1})(t_{i+1} - t_i + (w_{i+1} - w_i)\sqrt{-1}) = \\ &= u_{i,i+1}(t_{i+1} - t_i) - v_{i,i+1}(w_{i+1} - w_i) + \\ &+ [v_{i,i+1}(t_{i+1} - t_i) + u_{i,i+1}(w_{i+1} - w_i)]\sqrt{-1}; \end{aligned}\right\} (2)$$

слѣдовательно

$$\left.\begin{aligned}&\text{пред.}\sum_{i=0}^{i=n}U_{i,i+1}(V_{i+1}-V_i)=\\=\text{пред.}&\sum_{i=0}^{i=n}u_{i,i+1}(t_{i+1}-t_i)-\text{пред.}\sum_{i=0}^{i=n}v_{i,i+1}(w_{i+1}-w_i)+\\+[\text{пред.}&\sum_{i=0}^{i=n}v_{i,i+1}(t_{i+1}-t_i)+\text{пред.}\sum_{i=0}^{i=n}u_{i,i+1}(w_{i+1}-w_i)]\sqrt{-1}\,;\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

но здѣсь всѣ суммы уже вещественныя и такія, какъ разсмотрѣнныя въ предыдущемъ §, а потому

$$\left.\begin{aligned}&\text{пред.}\sum_{i=0}^{i=n}U_{i,i+1}(V_{i+1}-V_i)=\int_{z_0}^{Z}UdV=\\&=\int_{z_0}^{Z}udt-\int_{z_0}^{Z}vdw+\sqrt{-1}\left[\int_{z_0}^{Z}vdt+\int_{z_0}^{Z}udw\right]\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

(гдѣ мы предѣлами пишемъ конечныя точки, чтобы указать лучше начальныя и конечныя значенія системы x, y). Это равенство показываетъ, что интегралъ отъ UdV, когда U и V комплексныя, будетъ комплексная величина: вещественная часть и коэффиціентъ при $\sqrt{-1}$ суть вещественные интегралы. Оно показываетъ какой смыслъ надобно придавать интегралу взятому по кривой отъ точки z_0 до точки Z отъ дифференціала, составленнаго изъ произведенія одной комплексной функціи на дифференціалъ другой.

9. Въ предыдущемъ § функціи U и V были какія угодно комплексныя функціи вещественныхъ перемѣнныхъ x и y, однозначныя, конечныя и непрерывныя внутри нѣкоторой области, внутри которой находилась всѣми своими точками и кривая соединяющая точки z_0 и Z. Предположимъ теперь, что

$$U=f(z),\quad(1)$$

$$V=z=x+y\sqrt{-1}\,;\quad(2)$$

тогда, если

$$f(z)=f(x+yi)=\varphi(x,y)+\psi(x,y)\sqrt{-1}\,,\quad(3)$$

равенство (4) предыдущаго § приметъ такой видъ:

$$\left.\begin{aligned}\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = \int_{z_0}^{Z} \varphi(x,y)\,dx - \int_{z_0}^{Z} \psi(x,y)\,dy + \\ + \left[\int_{z_0}^{Z} \varphi(x,y)\,dy + \int_{z_0}^{Z} \psi(x,y)\,dx\right]\sqrt{-1}\,,\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

или

$$\left.\begin{aligned}\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = \int_{z_0}^{Z} [\varphi(x,y)\,dx - \psi(x,y)\,dy] + \\ + \sqrt{-1}\int_{z_0}^{Z} [\psi(x,y)\,dx + \varphi(x,y)\,dy].\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Это равенство заключаетъ въ себѣ опредѣленіе интеграла отъ функціи комплексной перемѣнной z, взятаго по нѣкоторой кривой, проведенной отъ точки z_0 до Z. Во второй части предѣлы могутъ быть замѣнены настоящими предѣлами, т. е. значеніями x въ точкахъ z_0 и Z, которыя означимъ чрезъ x_0 и X, если принять во вниманіе, что для точекъ, расположенныхъ по кривой, y есть функція x; въ этомъ случаѣ равенство (5) такъ перепишется:

$$\left.\begin{aligned}\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = \int_{x_0}^{X} [\varphi(x,y) - \psi(x,y)\,y']\,dx + \\ + \sqrt{-1}\int_{x_0}^{X} [\psi(x,y) + \varphi(x,y)\,y']\,dx\,,\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

гдѣ y и y' должны быть выражены чрезъ x при помощи уравненія кривой, по которой берется интегралъ отъ точки z_0 до Z, и его производнаго. Опредѣливъ, что должно разумѣть подъ выраженіемъ: интегралъ отъ функціи комплексной перемѣнной, взятый по нѣкоторой кривой отъ точки z_0 до точки Z, мы переходимъ къ выводу формулы, дающей преобразованіе двойнаго интеграла, распространеннаго на нѣкоторую площадь, въ простой интегралъ, взятый по ея контуру.

10. Предположимъ, что $\Phi(x,y)$ и $\Phi_1(x,y)$ обозначаютъ двѣ функціи перемѣнныхъ x и y, которыя суть однозначныя, конечныя и непрерывныя и имѣютъ частныя производныя по x и y во всѣхъ точкахъ нѣкоторой площади S, ограниченной кривою C, (которую будемъ называть контуромъ площади S), которую для простоты предположимъ сперва такою, что всякая прямая, параллельная одной

изъ осей координатъ и встрѣчающая площадь S, пересѣкаетъ эту кривую C (контуръ) только въ двухъ точкахъ. Составимъ при помощи этихъ функцій такой двойной интегралъ распространенный на всю площадь S:

$$T=\iint\limits_{(S)}\left(\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial\Phi_1(x,y)}{\partial y}\right)dxdy \tag{1}$$

и покажемъ, что онъ можетъ быть преобразованъ въ простой, взятый по контуру (C) этой площади въ положительномъ направленіи.

Преобразуемъ сперва первый членъ, т. е.

$$\iint\limits_{(S)}\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial x}\,dxdy\,. \tag{2}$$

Вслѣдствіе сдѣланныхъ нами предположеній насчетъ функцій Φ Φ_1, величина этого интеграла независитъ отъ порядка суммированія его элементовъ, а потому мы можемъ начать интегрированіе сперва по x. Означая чрезъ x_0 и X значенія перемѣнной x въ точкахъ встрѣчи контура C съ прямою паралельною оси x, причемъ принимаемъ алгебраически $x_0<X$, мы будемъ имѣть:

$$\int_{x_0}^{X}\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial x}\,dx=\Phi(X,x)-(x_0,x)\,, \tag{3}$$

гдѣ x_0 и X зависятъ уже только отъ y. Помножая обѣ части этого равенства на dy и интегрируя по y отъ y_0 до Y, гдѣ y_0 наименьшее алгебраически, а Y наибольшее изъ значеній y на всемъ контурѣ, мы будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}\int_{y_0}^{Y}\int_{x_0}^{X}\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial x}\,dxdy=\int_{y_0}^{Y}\Phi(X,y)\,dy-\int_{y_0}^{Y}\Phi(x_0,y)\,dy=\\=\int_{y_0}^{Y}\Phi(X,y)\,dy+\int_{Y}^{y_0}\Phi(x_0,y)\,dy\,.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Здѣсь лѣвая часть представляетъ распространенный на площадь S интегралъ (2); вторая часть интегралъ по контуру (C) взятый въ положительномъ направленіи. Дѣйствительно, въ первомъ интегралѣ мы идемъ отъ самой нижней точки контура по его сторонѣ вогнутой отно-

сительно оси y до самой верхней точки контура; во второмъ отъ этой послѣдней по части контура выпуклой къ оси y (предполагая, что контуръ лежитъ въ первомъ квадрантѣ), до самой нижней точки, т. е. начальной. Потому равенство (4) можемъ такъ переписать:

$$\iint\limits_{(S)} \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial x} dxdy = \int\limits_{(C)} \Phi(x,y)\,dy\,. \tag{5}$$

Точно также, но выполняя интегрированіе сперва по y, а потомъ по x, мы придемъ къ равенству:

$$\iint\limits_{(S)} \frac{\partial \Phi_1(x,y)}{\partial y} dydx = -\int\limits_{(C)} \Phi_1(x,y)\,dx\,, \tag{6}$$

гдѣ интегралъ по контуру тоже взятъ въ положительномъ направленіи. Вычитая (6) изъ (5) будемъ имѣть искомую формулу преобразованія двойного интеграла по площади (S) въ простой по ея контуру (C):

$$\iint\limits_{(S)} \left(\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_1(x,y)}{\partial y} \right) dxdy = \int\limits_{(C)} [\Phi_1(x,y)\,dx + \Phi(x,y)\,dy]\,. \tag{7}$$

11. Ограниченіе вида площади (S) теперь легко можетъ быть снято съ этой формулы. Пусть площадь имѣетъ какой угодно видъ; всегда можно её разбить на части такого вида, какого мы предполагали въ предыдущемъ § S для простоты вывода формулы (7); для каждой такой части, слѣдовательно формула эта будетъ примѣнима; написавъ её для каждой такой части и сложивъ, мы получимъ налѣво въ суммѣ интегралъ распространенный на всю данную площадь; направо будемъ имѣть интегралы, взятые по всѣмъ отрѣзкамъ контура данной площади, на которыя онъ раздѣлится точками, изъ которыхъ мы выводили линіи, разбивающія на части площадь S, и интегралы взятые по этимъ линіямъ. Но первые интегралы сложатся въ одинъ по цѣлому контуру, послѣдніе же въ суммѣ сократятся, ибо каждая часть каждой такой линіи, будучи границей двухъ участковъ, будетъ пройдена разъ въ одномъ направленіи, разъ въ другомъ, и потому опять получимъ формулу (7), въ которой въ лѣвой части интегралъ распространяется на всю площадь (S), въ правой берется по всему ея контуру, въ положительномъ направленіи.

12. Эту площадь мы предполагали *односвязною*. Такою называется площадь такого вида, что всякая линія, проведенная отъ одной точки контура до другой раздѣляетъ эту площадь на двѣ отдѣльныя части такимъ образомъ, что изъ одной нельзя попасть въ другую точкѣ (z), иначе какъ только пересѣкая эту линію. Площади круга, элипса, треугольника, трапеціи, паралелограмма суть примѣры односвязныхъ площадей. Если же площадь такова, что между линіями, которыя можно провести отъ одной точки контура до другой, есть и такія, которыя не раздѣляютъ её на части вполнѣ разобщенныя, то такія площади называются вообще *многосвязными*, или же по числу такихъ линій, n—связными, если заразъ можно провести $n-1$ такихъ линій, которыя не устанавляютъ полнаго разобщенія частей площади, и не болѣе какъ $n-1$. Кольцевая площадь, заключающаяся между двумя концентрическими кругами разныхъ радіусовъ, служитъ примѣромъ двусвязной поверхности, ибо по ней можно провести заразъ только одну линію отъ одной точки внутренней окружности къ точкѣ внѣшней, не раздѣляющую её на отдѣльныя разобщенныя части.

13. Предположимъ теперь, что площадь S, на которую распространяется интегралъ (1) § 10 есть многосвязная; тогда направо въ (7) § 10 мы получимъ, сумму интеграловъ, взятыхъ въ положительномъ направленіи по всѣмъ контурамъ такой площади. Дѣйствительно, проведя отъ одного контура къ другому такія линіи, которыя не прерываютъ сообщенія между точками площади, и сдѣлавъ по нимъ прорѣзъ, мы будемъ имѣть послѣ того односвязную площадь, къ которой примѣнима формула (7) § 10; но интегралъ второй части этого равенства можно разбить на части, изъ которыхъ одни будутъ относиться къ частямъ контуровъ и составятъ вмѣстѣ интегралы взятыя по отдѣльнымъ контурамъ; другіе—къ линіямъ разрѣзовъ; но эти линіи всѣ проходятся разъ въ одномъ направленіи, другой въ другомъ, какъ легко видѣть, сдѣлавъ чертежъ, и потому относящіеся къ нимъ интегралы въ суммѣ сократятся, такъ что направо останутся лишь интегралы по контурамъ, взятые въ положительномъ направленіи.

14. Возвращаясь къ общей формулѣ (7) § 10, предположимъ, что въ ней

$$\Phi(x,y)=\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}, \qquad \Phi_1(x,y)=\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}, \tag{1}$$

гдѣ $F(x,y)$, вмѣстѣ со своими производными перваго и втораго порядка однозначная, конечная и непрерывная функція x и y на всей площа-

ди S и на ея контурѣ. Но тогда въ каждомъ элементѣ двойного интеграла множитель въ скобкахъ будетъ тождественно равенъ нулю, ибо

$$\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial \Phi_1(x,y)}{\partial y}; \qquad (2)$$

во второй же части будемъ имѣть по (1) полный дифференціалъ:

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = dF(x,y); \qquad (3)$$

слѣдовательно получаемъ такое предложеніе:

$$\int_{(C)} dF(x,y) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

т. е. „интегралъ отъ полнаго дифференціала функціи $F(x,y)$ независимыхъ перемѣнныхъ x и y, однозначной, конечной и непрерывной вмѣстѣ со своими частными производными перваго порядка и второго по x и y внутри нѣкоторой односвязной площади, а также и на ея контурѣ, взятый по этому контуру, равенъ нулю".

15. На основаніи этого предложенія легко доказать слѣдующее *предложеніе Коши*, фундаментальное въ теоріи функцій комплекснаго перемѣннаго:

„Если внутри нѣкоторой площади функція $f(z)$ комплексной перемѣнной z однозначна, конечна и непрерывна, то интегралъ отъ нея, взятый по сомкнутой кривой, отдѣляющей отъ этой площади односвязную часть, равенъ нулю".

Дѣйствительно, означая чрезъ C такую кривую, будемъ по (5) § 9 имѣть:

$$\left.\begin{aligned} \int_{(C)} f(z)dz = \int_{(C)} [\varphi(x,y)dx - \psi(x,y)dy] + \\ + \sqrt{-1} \int_{(C)} [\varphi(x,y)dy + \psi(x,y)dx]; \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

каждый же интегралъ второй части есть интегралъ отъ полнаго дифференціала, и потому на основаніи предыдущаго предложенія равенъ нулю. Въ самомъ дѣлѣ выраженіе стоящее подъ знакомъ перваго интеграла

второй части будетъ полнымъ дифференціаломъ, потому, что по второму изъ (6) § (6)

$$\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}=-\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial x}, \tag{2}$$

а выраженіе стоящее подъ знакомъ второго интеграла, потому что по первому изъ (6) § 6

$$\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y}. \tag{3}$$

16. Изъ теоремы Коши слѣдуетъ, что, если внутри односвязной области (A) функція $f(z)$ однозначна, конечна и непрерывна, то интегралъ взятый отъ нея отъ точки z_0 этой области до другой точки Z той же области, будетъ имѣть одну и туже величину, по какой бы кривой не производилось бы интегрированіе, лишь бы эта кривая лежала всѣми своими точками въ разсматриваемой области (A). Дѣйствительно двѣ кривыя (1) и (2), соединяющія точку z_0 съ точкой Z вмѣстѣ взятыя образуютъ сомкнутую кривую, и какъ ограниченная этой кривой область составляетъ часть области (A), то внутри ея $f(z)$ обладаетъ тѣми же свойствами однозначности, конечности и непрерывности, а потому интегралъ отъ нея по этой сомкнутой кривой равенъ нулю; его же можно такъ представить:

$$\int_{z_0}^{Z}{}^{(1)}f(z)dz+\int_{Z}^{z_0}{}^{(2)}f(z)dz=0\,; \tag{1}$$

или по § (7)

$$\int_{z_0}^{Z}{}^{(1)}f(z)dz-\int_{z_0}^{Z}{}^{(2)}f(z)dz=0\,, \tag{2}$$

откуда

$$\int_{z_0}^{Z}{}^{(1)}f(z)dz=\int_{z_0}^{Z}{}^{(2)}f(z)dz\,, \tag{3}$$

что и требовалось доказать.

17. Отсюда же слѣдуетъ въ свою очередь, что такой интегралъ будетъ однозначная, конечная и непрерывная функція своего верхняго предѣла. Первое прямо слѣдуетъ изъ только что доказанной теоремы;

равнымъ образомъ легко усмотрѣть и конечность; послѣднее же получится чрезъ дифференцированіе по верхнему предѣлу:

$$\frac{\partial}{\partial Z}\int_{z_0}^{Z} f(z)dz = f(Z),$$

а это есть величина по положенію конечная во всякой точки площади (A); слѣдовательно наша функція имѣетъ въ каждой точкѣ опредѣленную конечную производную, слѣдовательно она непрерывна.

18. Если функція потеряетъ которое нибудь изъ этихъ свойствъ, однозначность, конечность и непрерывность, то предложеніе § 14 перестанетъ имѣть мѣсто вмѣстѣ со своими слѣдствіями. Мы разсмотримъ здѣсь только случай *полярнаго* разрыва функціи въ какой либо точкѣ площади (A); подъ этимъ разумѣютъ такого рода разрывъ, когда обратная величина функціи т. е. $\frac{1}{f(z)}$ вблизи разсматриваемой точки разрыва будетъ оставаться конечною и непрерывной. Это возможно только тогда, когда $f(z)$ въ этой точкѣ обращается въ ∞; тогда обратная величина обратится въ этой точкѣ въ нуль, вблизи же будетъ безконечно-малая; при конечномъ разрывѣ функціи $f(z)$ и ея обратная $\frac{1}{f(z)}$ получитъ, какъ легко видѣть, тоже конечный разрывъ. Могутъ быть и такія функціи, которыя въ нѣкоторыхъ точкахъ становятся совершенно неопредѣленными, принимая различныя значенія, отъ 0 до ∞, какъ $e^{\frac{1}{z}}$ при $z = 0$; такія точки называются *существенно-особенными* (Weierstrass); ихъ теперь мы не имѣемъ въ виду.

Пусть функція $f(z)$, однозначна, конечна и непрерывна внутри области (A), за исключеніемъ точки α этой области, въ которой она обращается въ ∞^1, какъ $\frac{A}{z-\alpha}$ при $z=\alpha$, такъ что слѣдовательно

$$\text{пред.}\,(z-\alpha)\,f(z)\big|_{z=\alpha} = A\,; \tag{1}$$

найдемъ, чему будетъ равенъ интегралъ отъ $f(z)$ по контуру такой площади. Опишемъ изъ точки α какъ центра окружность столь малымъ радіусомъ, чтобы она всѣми своими точками лежала внутри области (A), и соединимъ её съ контуромъ (C) какою либо линіей ab, (напримѣръ кратчайшей прямой); если теперь вырѣжемъ окружность и сдѣлаемъ по линіи ab прорѣзъ, то будемъ имѣть односвязную площадь, внутри которой $f(z)$ будетъ однозначна, конечна и непрерывна; а потому инте-

гралъ по контуру этой площади по теоремѣ Коши будетъ $=0$. Но этотъ интегралъ разобьется на такія части: отъ точки a по кривой (C) въ положительномъ направленіи до этой же точки; отъ a до b по прямой, далѣе отъ b по кругу въ отрицательномъ направленіи относительно его (ибо это будетъ положительное направленіе относительно оставшейся за вырѣзомъ круга части A), затѣмъ отъ b до a по прямой ab, по другой сторонѣ прорѣза; интегралы отъ a до b, и отъ b до a въ суммѣ дадутъ нуль по причинѣ однозначности функціи; останутся слѣдующіе: интегралъ по кривой (C) въ положительномъ направленіи $+$ интегралъ по кругу вокругъ (α) въ отрицательномъ направленіи:

$$\int_{(C)} f(z)dz - \int_{(\alpha)} f(z)dz = 0, \tag{2}$$

гдѣ и второй интегралъ взятъ въ положительномъ направленіи и потому предъ нимъ поставленъ знакъ $-$; отсюда получимъ:

$$\int_{(C)} f(z)dz = \int_{(\alpha)} f(z)dz, \tag{3}$$

т. е. въ разсматриваемомъ случаѣ интегралъ по контуру въ положительномъ направленіи равенъ интегралу вокругъ точки (α) по кругу достаточно-малаго радіуса. Отсюда видно, что отъ величины радіуса круга нашъ интегралъ независитъ, а потому его можно взять безконечно-малымъ, и тогда останется найти предѣлъ къ которому стремится этотъ интегралъ, когда радіусъ круга будетъ стремиться къ нулю. Примемъ радіусъ равнымъ ε и положимъ въ интегралѣ правой части (3)

$$z = \alpha + \varepsilon e^{\theta i}; \tag{4}$$

отсюда

$$dz = i\varepsilon^{\theta i} d\theta; \tag{5}$$

для того, чтобы выполнить интегрированіе по кругу въ положительномъ направленіи, надобно интегрировать по θ отъ 0 до 2π; будемъ имѣть:

$$\int_{(\alpha)} f(z)dz = \int_0^{2\pi} i\varepsilon f(\alpha + \varepsilon e^{\theta i}) e^{\theta i} d\theta. \tag{6}$$

2

Если, какъ мы предположили,

$$\text{пред.}\,(z-\alpha)f(z)|_{z=a}=A\,, \tag{7}$$

гдѣ A величина конечная, отличная отъ нуля, то для значеній z безконечно-мало разнящихся отъ α будетъ:

$$(z-\alpha)f(z)=A+\eta\,, \tag{8}$$

гдѣ η обращается въ нуль вмѣстѣ съ $z-\alpha$; отсюда

$$f(z)=\frac{A}{z-\alpha}+\frac{\eta}{z-\alpha}\,; \tag{9}$$

внося въ (6), будемъ имѣть:

$$\int_{(\alpha)} f(z)dz=\int_0^{2\pi} i\varepsilon\frac{A}{\varepsilon e^{\theta i}}e^{\theta i}d\theta+\int_0^{2\pi}\frac{i\varepsilon\eta e^{\theta i}d\theta}{\varepsilon e^{\theta i}}=A\cdot 2\pi i+i\int_0^{2\pi}\eta d\theta\,. \tag{10}$$

Но пред. мод. $\eta\,|_{\varepsilon=0}=0$ для всякаго аргумента θ, а слѣд. и

$$\text{пред. мод. }\bar{\eta}\,|_{\varepsilon=0}=0\,, \tag{11}$$

гдѣ $\bar{\eta}$ наибольшій модуль η въ точкахъ окружности (α); далѣе

$$\text{мод.}\int_0^{2\pi}\eta d\theta<\int_0^{2\pi}\bar{\eta}d\theta=\bar{\eta}\cdot 2\pi\,; \tag{12}$$

слѣдовательно по (11)

$$\text{пред. мод.}\int_0^{2\pi}\eta d\theta\,|_{\varepsilon=0}=0\,, \tag{13}$$

а отсюда слѣдуетъ, что и

$$\text{пред.}\int_0^{2\pi}\eta d\theta\,|_{\varepsilon=0}=0\,. \tag{14}$$

Слѣдовательно по (9) будемъ имѣть:

$$\int_{(\alpha)} f(z)dz=A\cdot 2\pi i \tag{15}$$

и на оборотъ

$$A=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\alpha)} f(z)dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} f(z)dz \tag{16}$$

[имѣя въ виду (3).]

19. Если $f(z)$ въ точкѣ α обращается въ ∞^m, гдѣ m цѣлое число бо́льшее единицы, такъ что

$$\text{пред.}\,(z-\alpha)^m f(z)=A, \tag{1}$$

гдѣ A величина конечная и отличная отъ нуля, то пока $z-\alpha$ не достигнетъ своего предѣла нуля, будетъ

$$(z-\alpha)^m f(z)=A+\eta, \tag{2}$$

гдѣ η безконечно-мало вмѣстѣ съ $z-\alpha$; отсюда будетъ слѣдовать

$$f(z)=\frac{A}{(z-\alpha)^m}+\frac{\eta}{(z-\alpha)^m}; \tag{3}$$

внося это въ (6) пред. § и принимая во вниманіе (4) того же §, будемъ имѣть:

$$\int_{(\alpha)} f(z)dz=Ai\varepsilon^{-m+1}\int_0^{2\pi} e^{-(m-1)\theta i}d\theta+\varepsilon^{1-m}i\int_0^{2\pi}\eta\varepsilon^{(m-1)\theta i}d\theta; \tag{4}$$

но здѣсь

$$\int_0^{2\pi} e^{-(m-1)\theta i}id\theta=\left(-\frac{e^{-(m-1)\theta i}}{m-1}\right)_0^{2\pi}=0, \tag{5}$$

(ибо

$$e^{-(m-1)2\pi i}=\cos(m-1)2\pi-i\sin(m-1)2\pi=+1,$$

$$e^{-(m-1)0}=+1;)$$

что же касается второго члена, то

$$\text{мод.}\int_0^{2\pi}\eta\varepsilon^{-(m-1)\theta i}d\theta<\int_0^{2\pi}\tilde{\eta}d\theta=\tilde{\eta}2\pi, \tag{6}$$

*

гдѣ $\tilde{\eta}$ имѣетъ такое же значеніе, какъ и въ пред. §; если это величина безконечно-малая порядка не ниже m, то будетъ

$$\text{пред. } \varepsilon^{1-m}\tilde{\eta}=0, \tag{7}$$

и слѣдовательно по (4), (5) и (7) и

$$\int_{(\alpha)} f(z)dz=0. \tag{8}$$

Но вообще будетъ

$$\eta=A_1(z-\alpha)+A_2(z-\alpha)^2+\ldots+A_{m-1}(z-\alpha)^{m-1}+\ldots; \tag{9}$$

тогда на основаніи (5) по пред. § будетъ

$$\int_{(\alpha)} f(z)dz=A_{m-1}2\pi i. \tag{10}$$

Если члена съ $(z-\alpha)^{-1}$ нѣтъ въ разложеніи $\frac{\eta}{(z-\alpha)^m}$, то $A_{m-1}=0$, и потому въ такомъ случаѣ опять будемъ имѣть равенство (8).

20. Если же теперь внутри односвязной площади (A) функція $f(z)$ обращается подобнымъ образомъ въ ∞ въ нѣсколькихъ точкахъ $\alpha, \beta, \gamma \ldots$, то описавъ круги безконечно-малыми радіусами изъ этихъ точекъ какъ центровъ и соединивъ какія-либо точки ихъ съ какою либо точкою контура (C), вырѣжемъ эти круги и по соединительнымъ линіямъ сдѣлаемъ прорѣзы; тогда получимъ односвязную площадь, внутри которой $f(z)$ будетъ однозначна, конечна и непрерывна; слѣдовательно по теоремѣ Коши интегралъ по контуру новой площади будетъ равенъ нулю; отсюда, какъ и прежде найдемъ, что интегралъ по контуру C будетъ равняться суммѣ интеграловъ по безконечно-малымъ кругамъ $(\alpha), (\beta), (\gamma)\ldots$ Каждый такой интегралъ, раздѣленный на $2\pi i$, Коши называетъ *вычетомъ* (residu) функціи относительно этой точки, а сумму ихъ для всей площади *интегральнымъ вычетомъ* для этой площади. Послѣдній, какъ видимъ, равенъ интегралу по контуру всей площади, раздѣленному на $2\pi i$. Изъ сказаннаго въ предыдущемъ § видно, что если $f(z)$ разлагается въ рядъ по положительнымъ и отрицательнымъ степенямъ $z-\alpha$, то вычетъ функціи для точки α будетъ равняться коэффиціенту при степени -1-ой отъ $z-\alpha$, т. е. A_{m-1} [формула (10) пред. §].

Примѣромъ можетъ служить функція $\frac{1}{z}$; ея вычетъ $=1$, ибо

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(0)}\frac{dz}{z}=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} i d\theta = 1. \tag{1}$$

21. Интегралъ отъ функціи $f(z)$, которая внутри площади (A) однозначна и конечна за исключеніемъ точекъ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, гдѣ она обращается въ ∞ какой либо цѣлой положительной степени, и имѣетъ вычеты $A, B, C, \ldots$, уже не будетъ однозначная функція отъ верхняго предѣла Z. Если точка Z, описавъ какую либо сомкнутую линію, вернется въ исходную точку, то значеніе интеграла получится прежнее только тогда, когда внутри этой сомкнутой кривой не будетъ лежать ни одной изъ этихъ точекъ, ибо тогда интегралъ по добавочной кривой, описанной точкою Z, будетъ по теоремѣ Коши равенъ нулю; если же внутри этой кривой будутъ находиться полюсы $\alpha, \beta, \gamma \ldots$, то интегралъ по этой добавочной кривой приведется по предыдущему § къ суммѣ вычетовъ относительно этихъ точекъ, взятыхъ столько разъ каждый, сколько разъ кривая её окружаетъ, и со знакомъ $+$ или $-$, смотря потому, окружаетъ ли её точка Z въ положительномъ или отрицательномъ направленіи, такъ что, если означимъ чрезъ $\int\Big|_{z_0}^{Z} f(z)dz$ интегралъ по первоначальному пути интегрированія отъ z_0 до Z, то новое значеніе интеграла такъ выразится чрезъ прежнее:

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)dz = \int\Big|_{z_0}^{Z} f(z)dz + (mA + nB + pC + \ldots)2\pi i, \tag{1}$$

гдѣ m, n, p цѣлыя числа, положительныя или отрицательныя. Слѣдовательно въ каждой точкѣ (z) нашей площади A разсматриваемый интегралъ будетъ имѣть безчисленное множество значеній, разнящихся на кратное $2\pi i$, и заключающихся всѣ въ формулѣ (1).

22. Пусть $f(z)$ будетъ однозначна, конечна и непрерывна внутри нѣкоторой односвязной площади съ контуромъ (C); функція $\frac{f(z)}{z-t}$ будетъ обладать тѣмъ же свойствомъ за исключеніемъ полюса t (предполагаемъ $f(t)$ не $=0$).

Въ такомъ случаѣ по (3) § (18) будетъ

$$\int_{(C)}\frac{f(z)dz}{z-t}=\int_{(t)}\frac{f(z)dz}{z-t}, \tag{1}$$

гдѣ налѣво интегралъ взятъ по всему контуру, а направо по безконечно-малому кругу вокругъ t, а потому будетъ не что иное какъ интегральный вычетъ относительно t, умноженный на $2\pi i$. Но по (7) и (16) § 18 это будетъ

$$\text{пред.}\left(\frac{f(z)}{z-t}\right)(z-t)|_{z=t}=f(t),$$

умноженный на $2\pi i$. И такъ

$$\int_{(C)}\frac{f(z)dz}{z-i}=f(t)\cdot 2\pi i, \tag{2}$$

откуда

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(z)dz}{z-t}. \tag{3}$$

Эта формула даетъ выраженіе значенія функціи въ какой либо внутренней точкѣ площади чрезъ значенія по ея контуру; она дана была въ первый разъ Коши и имѣетъ важное значеніе. Такъ какъ интегралъ второй части конечный въ точкѣ t, то его можно дифференцировать подъ знакомъ интеграла по t; сдѣлавъ это k разъ, получимъ:

$$f^{(k)}(t)=\frac{1.2.3\ldots k}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(z)dz}{(z-t)^{k+1}}. \tag{4}$$

23. Если кривая (C) есть кругъ описанный изъ точки z_0 какъ центра радіусомъ R, то положивъ въ формулахъ (3) и (4) предъидущаго § $t=z_0$, и вводя новую перемѣнную θ, полагая

$$z=z_0+Re^{\theta i}, \tag{1}$$

мы будемъ имѣть такія формулы, данныя впервые Коши:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+Re^{\theta i})d\theta, \tag{2}$$

$$f^{(k)}(z_0)=\frac{1.2.3\ldots k}{2\pi R^k}\int_0^{2\pi}f(z_0+Re^{\theta i})e^{-k\theta i}d\theta. \tag{3}$$

Эти формулы выражаютъ значенія функціи и ея производныхъ въ центрѣ круга, внутри и на окружности котораго $f(z)$ остается однозначна, конечна и непрерывна, чрезъ значенія ея на окружности.

24. Изъ формулы (3) § 22 легко получить строку Тэйлора вмѣстѣ съ условіями необходимыми и достаточными для того, чтобы этотъ рядъ могъ быть продолженъ до безконечности. Предположимъ, что внутри круга радіуса R_0, описаннаго изъ точки z_0 какъ центра, функція $f(z)$ однозначна, конечна и непрерывна; тогда по упомянутой сейчасъ формулѣ (3) § 22 будемъ имѣть:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}, \tag{1}$$

гдѣ z обозначаетъ какую либо точку лежащую внутри круга (C), описаннаго изъ z_0 радіусомъ $R<R_0$, но $>$ мод. $(z-z_0)$; (тогда и на его окружности функція однозначна, конечна и непрерывна), а ζ точку на окружности того же круга. Вторую часть равенства (1) можно нѣсколько иначе представить, именно такъ:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z_0-(z-z_0)}, \tag{2}$$

и затѣмъ разложить въ рядъ съ помощію простого дѣленія 1 на знаменатель:

$$\left.\begin{aligned}
f(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\left(1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^{-1}d\zeta=\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\left(1+\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}+\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^2+\ldots+\frac{\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^m}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-\zeta_0}}\right)d\zeta=\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z_0}+\frac{z-z_0}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^2}+\frac{(z-z_0)^2}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^3}+\ldots\\
&\qquad\ldots+\frac{(z-z_0)^m}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^m(\zeta-z)};
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

а это по (3) и (4) § 22 для $t=z_0$ такъ можетъ быть представлено:

$$\left.\begin{aligned} f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{1.2}(z - z_0)^2 + \ldots + \\ + \ldots + \frac{f^{(m-1)}(z_0)}{1.2.3\ldots(m-1)}(z - z_0)^{m-1} + R_m, \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

гдѣ

$$R_m = \frac{(z - z_0)^m}{2\pi i}\int_{(c)}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_0)^m(\zeta - z)}. \quad (5)$$

Значенія производныхъ въ (4) могутъ быть найдены по формуламъ § 23, когда вмѣсто ζ введемъ въ (3) и (4) § 22 перемѣнную θ при помощи (1) § 23. Вводя ту же перемѣнную въ (5) будемъ имѣть:

$$R_m = \frac{(z - z_0)^m}{R^m}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0 + Re^{\theta i})\,e^{-m\theta i}d\theta}{1 - \frac{1}{R}(z - z_0)\,e^{-\theta i}}. \quad (6)$$

Если мод. $(z - z_0) = \varrho$, то $\varrho < R$; если означимъ еще чрезъ M наибольшее значеніе, которое принимаетъ мод. $f(z_0 + Re^{\theta i})$, когда θ измѣняется отъ 0 до 2π, т. е. въ точкахъ окружности радіуса R изъ z_0 какъ центра, то изъ (6) будемъ имѣть:

$$\text{мод. } R_m < \left(\frac{\varrho}{R}\right)^m \frac{M}{1 - \frac{\varrho}{R}}; \quad (7)$$

отсюда видно, такъ какъ $\varrho < R$, что

$$\text{пред. мод. } R_m\Big|_{m=\infty} = 0, \quad (8)$$

т. е. рядъ (4) можетъ быть продолженъ до безконечности. Изъ этого изслѣдованія видно, что $f(z)$ разлагается по строкѣ Тэйлора въ безконечный рядъ, расположенный по степенямъ $z - z_0$, который будетъ сходящимся внутри круга, описаннаго изъ z_0 такимъ радіусомъ, что внутри этого круга во всѣхъ его точкахъ функція остается однозначна, конечна и непрерывна. За радіусъ такого круга можно слѣдовательно взять разстояніе точки z_0 до ближайшей къ ней изъ тѣхъ точекъ, гдѣ функціи $f(z)$ теряетъ которое нибудь изъ этихъ свойствъ, слѣдовательно или перестаетъ быть однозначной (какъ $\sqrt{1 - z^2}$ въ точкахъ $z = \pm 1$), или

конечной (какъ $\frac{1}{1+z^2}$ въ точкахъ $z=\pm i$), или претерпѣваетъ разрывъ непрерывности. Такой кругъ называется кругомъ сходимости ряда. Если точка, въ которой $f(z)$ теряетъ одно изъ перечисленныхъ свойствъ, есть $z=\infty$, слѣдовательно $f(z)$ на всей плоскости (z) однозначна, конечна и непрерывна, то она будетъ разлагаться въ рядъ по степенямъ $(z-z_0)$, который будетъ сходящимся на всей неограниченной плоскости, ибо радіусъ круга сходимости будетъ $=\infty$. Таковы, напримѣръ, функціи e^z, $\sin z$ и $\cos z$.

Изъ выраженія (5) для остаточнаго члена легко вывести ту его форму, которую далъ *Дарбу* для случая комплексной перемѣнной. Вводя внѣшній множитель подъ знакъ интеграла, будемъ имѣть:

$$R_m = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\left(\frac{z-z_0}{\zeta - z_0}\right)^m d\zeta. \tag{9}$$

Такъ какъ z_0 не лежитъ на контурѣ, то это выраженіе конечная и непрерывная функція z_0, пока эта точка лежитъ внутри контура, и слѣдовательно можно R_m дифференцировать подъ знакомъ интеграла по z_0; будемъ имѣть по сокращеніи:

$$\frac{dR_m}{dz_0} = -\frac{m}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{f(\zeta)(z-z_0)^{m-1}}{(\zeta - z_0)^{m+1}}\,d\zeta = -m(z-z_0)^{m-1}\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}, \tag{10}$$

по (4) § 22. Интегрируя же z_0 по прямой линіи отъ z до z_0, получимъ:

$$R_m = \frac{1}{(m-1)!}\int_{z_0}^{z} (z-z_0)^{m-1} f^{(m)}(z_0)\,dz_0. \tag{11}$$

По § 1 прямолинейное движеніе точки z_0 можно свести на движеніе параллельное вещественной оси, полагая

$$z_0 - z = ue^{\alpha i}, \tag{12}$$

гдѣ α уголъ наклоненія прямой къ вещественной оси: тогда въ (11) будемъ имѣть интегралъ комплексной функціи вещественной перемѣнной $-u$; къ такому интегралу примѣнимо предложеніе интегральнаго исчисленія относительно произведенія двухъ множителей, изъ которыхъ одинъ сохраняетъ знакъ, если еще ввести множитель λ, котораго модуль не больше 1; разбивая $(z-z_0)^{m-1}$ на два множителя: $(z-z_0)^{m-p}(z-z_0)^{p-1}$, мы получимъ изъ (11):

$$R_m = \lambda \frac{(z-z_0)^m (1-\theta)^{m-p}}{(m-1)!\,p} f^{(m)}[\lambda_0 + \theta(z-z_0)], \tag{13}$$

гдѣ λ комплексный множитель съ модулемъ $\leqq 1$, а θ вещественная правильная дробь:

$$0 < \theta < 1;$$

p какое угодно цѣлое число. λ извѣстно подъ названіемъ *множителя Дарбу*. [См. Cours de M-r. Hermite. VII. Leçon.].

25. Если въ какой либо точкѣ z_0 области, въ которой функція однозначна, конечна и непрерывна, сама функція и ея $m-1$ производныхъ обращаются въ нуль, то разложеніе по строкѣ Тэйлора приметъ такой видъ, что можно будетъ $(z-z_0)^m$ вынести за скобки, и мы будемъ имѣть:

$$f(z) = (z-z_0)^m E(z), \tag{1}$$

гдѣ

$$E(z) = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} + \frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}(z-z_0) + \cdots, \tag{2}$$

и представляетъ слѣдовательно функцію обладающую свойствами $f(z)$, но не $=0$ въ точкѣ z_0. Для значеній z безконечно-мало разнящихся отъ z_0, функція $f(z)$ будетъ безконечно-малая величина порядка m. Въ этомъ случаѣ говорятъ, что точка z_0 есть m-кратный нуль функціи $f(z)$, или что въ точкѣ z_0 $f(z)$ имѣетъ m нулей. Если точка z_1 есть полюсъ функціи $f(z)$, слѣдовательно $\frac{1}{f(z)}$ есть функція однозначная, конечная и непрерывная вблизи этой точки, то она въ этой точкѣ будетъ обращаться въ нуль порядка p; слѣдовательно будетъ по (1)

$$\frac{1}{f(z)} = (z-z_1)^p E_0(z), \tag{3}$$

гдѣ $E_0(z)$ однозначная, конечная, непрерывная и отличная отъ нуля функція; ея обратная величина $\frac{1}{E_0(z)} = E_1(z)$ будетъ функція съ такими же свойствами вблизи точки z_1; изъ (3) тогда будемъ имѣть, вводя эту обратную функцію:

$$f(z) = (z-z_1)^{-p} E_1(z). \tag{4}$$

Отсюда будетъ слѣдовать, что

$$\text{пред.}\, f(z)(z-z_1)^p|_{z=z_1} = E_1(z_1), \tag{5}$$

величинѣ конечной и отличной отъ нуля. Въ разсматриваемомъ случаѣ говорятъ, что въ точкѣ $z=z_1$ функція $f(z)$ имѣетъ p безконечностей: вблизи такой точки, для значеній $z-z_1$ безконечно-малыхъ, она будетъ безконечно-большая величина p-го порядка. Числа m и $-p$, показывающія порядокъ безконечно-малости функцій $f(z)$ въ точкахъ безконечно-близкихъ къ z_0 и z_1 соотвѣтственно, называются *числами порядка* (Ordnungs-Zahl) функціи въ этихъ точкахъ z_0 и z_1. Чрезъ логариѳмическое дифференцированіе изъ (1) и (3) получаемъ:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-z_0} + \frac{E'(z)}{E(z)}, \tag{6}$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-p}{z-z_0} + \frac{E_1'(z)}{E_1(z)}, \tag{7}$$

гдѣ вторыя члены въ точкахъ z_0 и z_1 соотвѣтственно однозначны, конечны и непрерывны; изъ этихъ равенствъ видно, что точки z_0 и z_1 для функціи $\frac{f'(z)}{f(z)}$ суть безконечности 1-го порядка съ вычетами m и $-p$ соотвѣтственно. Если мы возьмемъ отъ этой функціи интегралъ по контуру нѣкоторой площади (A), и раздѣлимъ его на $2\pi i$, то получимъ по § 20 сумму вычетовъ функціи для всей площади A, т. е. интегральный вычетъ для этой площади; сумма же вычетовъ по сейчасъ замѣченному приведется къ суммѣ $\sum m - \sum p$, т. е. суммѣ порядковъ $f(z)$ для всѣхъ точекъ площади (A); (для точекъ отличныхъ отъ нулей и безконечностей функціи ея порядокъ равенъ нулю, какъ то видно изъ строки Тэйлора). Итакъ имѣемъ такую формулу:

$$\sum m - \sum p = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \int_{(C)} d\log f(z), \tag{8}$$

для выраженія суммы порядковъ функціи на всей площади (A) чрезъ значенія ея по контуру этой площади.

26. Если $f(z)$ однозначна, конечна и непрерывна на всей неограниченной плоскости, или, что тоже, на всей Неймановой сферѣ, такъ что и въ точкѣ O', гдѣ $z=\infty$, имѣетъ конечную величину, то она можетъ быть только постоянною. Дѣйствительно, разлагая ее по строкѣ

Тэйлора, мы получимъ рядъ, сходящійся въ кругѣ, радіусъ котораго безконеченъ; слѣдовательно въ формулѣ (3) § 23 должно положить $R = \infty$, а тогда будетъ слѣдовать, что

$$f^{(k)}(z_0) = 0 \tag{1}$$

для всякаго k отъ 1 до ∞. Дѣйствительно, если $f(z)$ вездѣ конечна, то всегда можно найти столь большое положительное число M, что для всякаго z будетъ:

$$\text{мод.}\, f(z) < M; \tag{2}$$

на основаніи этого, замѣняя въ (3) § 23 входящія величины ихъ модулями, а вмѣсто мод. $f(z)$ подставляя величину M, мы получимъ изъ него такое неравенство:

$$\text{мод.}\, f^{(k)}(z_0) < \frac{1.2.3\ldots k}{R^k} M, \tag{3}$$

а по (7) § 24 точно также имѣемъ:

$$\text{мод.}\, R_m < \left(\frac{\varrho}{R}\right)^m \cdot \frac{M}{1 - \frac{\varrho}{R}}; \tag{4}$$

эти неравенства будутъ имѣть мѣсто какъ бы ни было велико R; но при $R = \infty$ вторыя части ихъ равны нулю; слѣдовательно

$$\text{мод.}\, f^{(k)}(z_0) = 0; \tag{5}$$

$$\text{мод.}\, R_m = 0; \tag{6}$$

а посему изъ (4) § 24 получимъ:

$$f(z) = f(z_0), \tag{7}$$

т. е. во всѣхъ точкахъ неограниченной плоскости $f(z)$ имѣетъ одно и тоже значеніе, слѣдовательно есть постоянное количество, что и требовалось доказать.

27. На основаніи этого можно доказать, что однозначная, конечная и непрерывная на всей сферѣ функція $f(z)$ за исключеніемъ только точки O', которая для нея полюсъ m-го порядка, будетъ полиномъ m-ой степени. Дѣйствительно такая функція разложится по строкѣ Тэй-

лора по степенямъ z въ рядъ, сходящійся на всей неограниченной плоскости; для того, чтобы при $z=\infty$ она была $=\infty^m$, это разложеніе не должно содержать членовъ со степенями z высшими m-ой, но m-ую должно содержать, а отсюда и слѣдуетъ сказанное. Отсюда же легко вывести основную теорему Высшей Алгебры, что уравненіе m-ой степени имѣетъ m-корней. Дѣйствительно, опишемъ на сферѣ Неймана какую-либо сомкнутую кривую, незаключающую внутри себя ни одного нуля, ни одного полюса $f(z)$, (который для разсматриваемаго случая въ O'); тогда по теоремѣ Коши, такъ какъ $\frac{f'(z)}{f(z)}$ не будетъ внутри такой области имѣть ни одного полюса, будетъ напротивъ однозначна, конечна и непрерывна во всѣхъ точкахъ и на контурѣ этой области, будетъ интегралъ по ея контуру:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}d\log f(z)=0; \tag{1}$$

но этотъ контуръ будетъ контуромъ и остальной части Неймановой сферы, въ которой лежатъ всѣ нули и полюсы $f(z)$, а слѣдовательно всѣ полюсы перваго порядка функціи $\frac{f'(z)}{f(z)}$, а потому этотъ интегралъ будетъ равенъ по (8) § 25 суммѣ порядковъ этой функціи, т. е. $=\sum m_i-\sum p_i$, гдѣ m_i и $-p_i$ порядки въ нуляхъ и полюсахъ функціи $f(z)$; слѣдовательно

$$\sum m_i-\sum p=0; \tag{2}$$

у насъ, когда $f(z)$ есть полиномъ степени m, будетъ только одинъ полюсъ порядка $-m$ въ точкѣ O'; слѣдовательно по (2) будемъ имѣть:

$$\sum m_i-m=0, \tag{3}$$

или

$$\sum m_i=m, \tag{4}$$

т. е. число нулей функціи, принимая m_i-кратный за m_i нулей, равно степени m цѣлой функціи, т. е. другими словами, полиномъ степени m имѣетъ m корней, равныхъ или неравныхъ.

28. Если $f(z)$ однозначна, конечна и прерывна на всей неограниченной плоскости (или сферѣ Неймана) за исключеніемъ полюсовъ a_1, $a_2,\ldots a_k$ (и можетъ быть O'), въ которыхъ она порядковъ $-p_1$,

$-p_2, \dots -p_k$, то она будетъ раціональная дробь. Дѣйствительно въ такомъ случаѣ функція

$$\varphi(z) = f(z)(z-\alpha_1)^{p_1}(z-\alpha_2)^{p_2}\dots(z-\alpha_k)^{p_k} \quad (1)$$

будетъ однозначна, конечна и непрерывна на всей сферѣ Неймана, за исключеніемъ точки O', которая можетъ быть для нея, какъ для $f(z)$ и другаго множителя только полюсомъ; слѣдовательно $\varphi(z)$ есть полиномъ; но изъ (1) имѣемъ:

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-\alpha_1)^{p_1}(z-\alpha_2)^{p_2}\dots(z-\alpha_k)^{p_k}}, \quad (2)$$

что и требовалось доказать, ибо направо имѣемъ раціональную дробь. Изъ Алгебры извѣстно какъ можно найти полиномъ по его корнямъ, а также и раціональную дробь, когда даны ея нули и полюсы; въ послѣднемъ случаѣ задача сводится къ опредѣленію полиномовъ, которые будутъ числителемъ и знаменателемъ дроби, по ихъ нулямъ; для послѣдняго это будутъ безконечности искомой функціи.

29. Мы разсмотримъ теперь ряды, составленные изъ функцій комплекснаго перемѣннаго, какъ

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_m + \dots, \quad (1)$$

гдѣ $u_0, u_1, u_2 \dots u_m, \dots$ функціи отъ z, построенные по какому либо закону въ зависимости отъ нумера m. Если общему члену дадимъ такой видъ

$$u_m = v_m + w_m \sqrt{-1}, \quad (2)$$

то рядъ (1) будетъ сходящимся и представлять слѣдовательно функцію отъ z, если будутъ сходящимися ряды:

$$v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_m + \dots, \quad (3)$$

$$w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_m + \dots. \quad (4)$$

Эти ряды будутъ *безусловно-сходящіеся*, если будетъ сходящимся рядъ модулей членовъ ряда (1), именно рядъ:

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} \sqrt{v_m^2 + w_m^2}, \quad (5)$$

ибо члены тѣхъ рядовъ получаются изъ этого чрезъ умноженіе соотвѣтственно на рядъ количествъ:

$$\frac{v_m}{\sqrt{v_m^2+w_m^2}} \quad \text{и} \quad \frac{w_m}{\sqrt{v_m^2+w_m^2}}, \tag{6}$$

для $m=0, 1, 2, 3\ldots$, заключающихся въ конечныхъ предѣлахъ -1 и $+1$. (Безусловно-сходящимся рядомъ называется, какъ извѣстно, рядъ, сходящійся независимо отъ порядка его членовъ). Рядъ (1) будетъ сходящимся для $z=z_0$, когда для этого значенія z можно, взявъ произвольно малую положительную величину ε, найти такое значеніе m' для числа m, что для всякаго $m \geqq m'$ модуль суммы всѣхъ членовъ, начиная съ этого, будетъ менѣе ε:

$$\text{мод.}\left(\sum_{k=0}^{k=\infty} u_{m'+k}\right) < \varepsilon. \tag{7}$$

Если это число m' одно и тоже для всякаго значенія z въ области точки z_0, то рядъ называется *равномѣрно и въ одинаковой степени сходящимся.*

30. Безусловно и равномѣрно сходящійся рядъ можетъ быть интегрированъ. Пусть рядъ

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{m-1} + R_m \tag{1}$$

есть безусловно и равномѣрно сходящійся; въ такомъ случаѣ всегда можно найти столь большое число m', что для всякаго $m \geqq m'$ будетъ

$$\text{мод.}\, R_m < \varepsilon, \tag{2}$$

гдѣ ε произвольно выбранная очень малая положительная величина; замѣтивъ это, помножимъ равенство (1) на dz и проинтегрируемъ отъ z_0 до z по кривой всѣми своими точками лежащей въ области сходимости этого ряда; тогда будемъ имѣть:

$$\int_{z_0}^{z} u\,dz = \int_{z_0}^{z} u_0\,dz + \int_{z_0}^{z_1} u_1\,dz + \ldots + \int_{z_0}^{z} u_{m-1}\,dz + \int_{z_0}^{z} R_m\,dz. \tag{3}$$

Обозначая чрезъ ds элементъ кривой интегрированія и чрезъ l всю ея длину, мы будемъ имѣть:

$$\text{мод.} \int_{z_0}^{z} R_m\,dz < \int_0^l \varepsilon\,ds = \varepsilon l; \tag{4}$$

слѣдовательно всегда можно выбрать m' столь большимъ, что остаточный членъ ряда (3) будетъ имѣть модулемъ величину меньшую произвольно выбранной величины $\eta = \varepsilon l$, какъ бы она мала ни была; отсюда слѣдуетъ сходимость ряда (3) и что его суммой будетъ интегралъ $\int_{z_0}^{Z} udz$.

31. Если рядъ

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{m-1} + \cdots \tag{1}$$

есть безусловно-сходящійся, а рядъ, составленный изъ производныхъ его членовъ:

$$v = u_0' + u_1' + u_2' + \cdots + u_{m-1}' + \cdots \tag{2}$$

безусловно- и равномѣрно-сходящійся, то будетъ

$$v = u'. \tag{3}$$

Дѣйствительно, интегрируя рядъ (2) по z отъ z_0 до z по кривой всецѣло лежащей въ общей части сходимости рядовъ (1) и (2), мы будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} \int_{z_0}^{Z} vdz &= [u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{m-1} + \cdots]_{z_0}^{Z} = \\ &= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{m-1} + \cdots - C, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

(гдѣ $C = [u_0 + u_1 + u_2 + \cdots]_{z=z_0}$), ибо рядъ (1) безусловно-сходящійся, слѣдовательно мы можемъ разгрупировать члены такъ, какъ это сдѣлано; и такъ по (1)

$$\int_{z_0}^{Z} vdz = u - C; \tag{5}$$

отсюда, дифференцируя, получимъ:

$$v = u',$$

что и требовалось доказать.

32. Кромѣ безконечныхъ рядовъ, составленныхъ изъ ряда какихъ либо функцій, образованныхъ по извѣстному закону, будемъ разсматри-

вать въ дальнѣйшемъ и безконечныя произведенія, составленныя изъ функцій, образованныхъ по извѣстному закону. Произведеніе:

$$U_n = \prod_{k=0}^{k=n} u_k\,, \tag{1}$$

гдѣ u_k функціи отъ z, составленныя по извѣстному закону, можетъ съ увеличеніемъ n до безконечности стремиться или къ нулю, или къ безконечности, или къ конечной величинѣ, отличной отъ нуля; въ первыхъ двухъ случаяхъ оно будетъ расходящееся, въ послѣднемъ сходящееся, и

$$\text{пред. } U_n = \text{пред.} \prod_{k=0}^{k=n} u_k \tag{2}$$

для $n = \infty$ будетъ вообще величина зависящая отъ z, слѣдовательно функція отъ z. Изъ (1), беря логариѳмы, получаемъ:

$$\log U_n = \sum_{k=0}^{k=n} \log u_k\,; \tag{3}$$

произведеніе (1) и эта сумма (3) будутъ въ одно время сходящимися или расходящимися; въ одно время безусловно- и равномѣрно-сходящимися. Если

$$u_k = v_k + w_k\sqrt{-1} = \varrho_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)\,, \tag{4}$$

то

$$\varrho_k = \sqrt{v_k^2 + w_k^2}\,, \tag{5}$$

$$\theta_k = \operatorname{arctg}\frac{w_k}{v_k} = \arcsin\frac{w_k}{\varrho_k} = \operatorname{arcccos}\frac{v_k}{\varrho_k}\,; \tag{6}$$

тогда будетъ

$$\log u_k = \log\varrho_k + \theta_k\sqrt{-1}\,, \tag{7}$$

и рядъ (3) приметъ такой видъ:

$$\log U_n = \sum_{k=0}^{k=n}\log\varrho_k + \sum_{k=0}^{k=n}\theta_k\sqrt{-1}\,, \tag{8}$$

и разобьется на два такихъ:

$$\sum_{k=0}^{k=n} \log \varrho_k = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{k=n} \log(v_k^2 + w_k^2)\,, \tag{9}$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} \theta_k\,; \tag{10}$$

слѣдовательно будетъ сходящимся, когда каждый изъ этихъ двухъ рядовъ будетъ сходящимся. Чтобы эти ряды сходились, когда n будетъ стремиться къ ∞, необходимо, чтобы при $k = \infty$ было

$$\text{пред.}\, \varrho_k^2 = 1\,; \tag{11}$$

$$\text{пред.}\, \theta_k = 0\,; \tag{12}$$

но въ такомъ случаѣ для k достаточно большого θ_k будетъ заключаться въ предѣлахъ $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$, и тогда по (6) будетъ:

$$\left|\frac{w_k}{\varrho_k}\right| < |\theta_k| < \left|\frac{w_k}{v_k}\right|, \tag{13}$$

(гдѣ $|a|$ абсолютное значенiе величины a); но по (11) пред. $\varrho_k^2 = 1$; слѣдовательно для достаточно большого k будетъ $\varrho_k < 2$; изъ (11) и (12) [или (6)] слѣдуетъ, что и

$$\text{пред.}\, v_k = 1\,; \tag{14}$$

слѣдовательно для достаточно большого k будетъ $\frac{1}{v_k} < 2$; замѣняя въ (13) $|\varrho_k|$ и $\left|\frac{1}{v_k}\right|$ чрезъ 2, мы неравенство это только усилимъ; будемъ имѣть слѣдовательно à fortiori:

$$\frac{1}{2}|w_k| < |\theta_k| < 2\,|w_k|\,, \tag{15}$$

и слѣдовательно для достаточно большого m_1 будетъ:

$$\frac{1}{2}\sum_{k=m_1}^{k=\infty} |w_k| < \sum_{k=m_1}^{k=\infty} |\theta_k| < 2 \sum_{k=m_1}^{k=\infty} |w_k|\,; \tag{16}$$

откуда видно, что для безусловной-сходимости ряда (10) необходимо и достаточно, чтобы былъ сходящимся рядъ:

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} |w_k|; \tag{17}$$

но это же условіе необходимо и достаточно для безусловной сходимости ряда

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} w_k, \tag{18}$$

такъ что, видимъ, ряды (10) и (18) будутъ въ одно время безусловно-сходящимися. Далѣе

$$\log\varrho_k^2 = \log(1+\varrho_k^2-1) = \varrho_k^2-1-\frac{1}{2}(\varrho_k^2-1)+\dots; \tag{19}$$

откуда слѣдуетъ, что

$$\text{пред.}\left.\frac{\log\varrho_k^2}{\varrho_k^2-1}\right|_{\varrho_k=1} = 1, \tag{20}$$

и слѣдовательно начиная съ нѣкотораго $k=m_1$, величины

$$\frac{\log\varrho_k^2}{\varrho_k^2-1}, \tag{21}$$

а слѣдовательно и имъ обратныя

$$\frac{\varrho_k^2-1}{\log\varrho_k^2}, \tag{22}$$

представятъ рядъ величинъ, не превосходящихъ нѣкоторую конечную величину. Вслѣдствіе этого рядъ:

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} \log\varrho_k^2 \tag{23}$$

и рядъ:

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{\varrho_k^2-1}{\log\varrho_k^2}\log\varrho_k^2 = \sum_{k=0}^{k=\infty}(\varrho_k^2-1) \tag{24}$$

будутъ въ одно время сходящимися или расходящимися. Но

$$\sum_{k=0}^{k=\infty}(\varrho_k^2-1) = \sum_{k=0}^{k=\infty}(v_k^2+w_k^2-1), \tag{25}$$

и какъ рядъ (18) безусловно-сходящійся, то этотъ будетъ сходящимся, если безусловно сходится рядъ:

$$\sum_{k=0}^{k=\infty}(v_k^2-1)\,; \tag{26}$$

но какъ

$$v_k^2-1=(v_k-1)(v_k+1) \tag{27}$$

и множители v_k+1 начиная съ нѣкотораго $k=k'$, не превосходятъ конечной величины 3, то рядъ (26) будетъ въ одно время сходящимся съ рядомъ

$$\sum_{k=0}^{k=\infty}(v_k-1). \tag{28}$$

Но когда сходятся ряды (18) и (28), то будетъ сходиться и рядъ

$$\sum_{k=0}^{k=\infty}(v_k-1+w_k\sqrt{-1})=\sum_{k=0}^{k=\infty}(u_k-1). \tag{29}$$

Итакъ произведеніе (1) будетъ безусловно-сходящимся въ одно время съ рядомъ (29): необходимое и достаточное условіе для сходимости безконечнаго произведенія (1) есть, слѣдовательно, сходимость ряда (29).

33. Въ дальнѣйшемъ мы будемъ встрѣчать и двойныя ряды и безконечныя произведенія, а потому изслѣдуемъ необходимыя и достаточныя условія ихъ безусловной сходимости. Двойная сумма

$$S=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}\frac{1}{(m^2+n^2)^\lambda} \tag{1}$$

распространяющаяся на всѣ цѣлыя значенія m и n отъ $-\infty$ до $+\infty$ независимо одно отъ другаго, за исключеніемъ комбинаціи ($m=0$, $n=0$), (что напоминаетъ штрихъ (′) при $\sum$), будетъ безусловно-сходящаяся при $\lambda>1$. Дѣйствительно, число членовъ этой суммы, численное значеніе m и n въ которыхъ не превосходитъ нѣкоторое положительное число x, есть $(2x+1)^2$; число тѣхъ, въ которыхъ оно не превосходитъ $x-1$, будетъ точно также $(2x-1)^2$; слѣдовательно число членовъ суммы, въ которыхъ численное значеніе по крайней мѣрѣ одного изъ m и n есть x, будетъ $=$

$$(2x+1)^2-(2x-1)^2=8x\,; \tag{2}$$

наименьшіе изъ этихъ членовъ будутъ $=\frac{1}{(2x^2)^\lambda}$, когда оба m и n численно $=x$; наибольшіе будутъ $=\frac{1}{x^{2\lambda}}$, когда численное значеніе одного изъ m и n будетъ $=x$, другого же $=0$; всѣ прочіе будутъ заключаться по величинѣ своей между этими предѣлами. Поэтому, означая чрезъ S_x сумму такихъ членовъ въ (1), въ которыхъ численное значеніе по крайней мѣрѣ одного изъ m и n равно x, мы будемъ имѣть, въ виду (2), такое непрерывное неравенство:

$$\frac{8x}{(2x^2)^\lambda} < S_x < \frac{8x}{x^{2\lambda}}, \tag{3}$$

суммируя это, всѣ части, по x отъ 1 до ∞, и замѣчая, что

$$\sum_{x=1}^{x=\infty} S_x = S, \tag{4}$$

а также полагая для краткости:

$$\sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{1}{x^{2\lambda-1}} = T, \tag{5}$$

мы получимъ такое неравенство:

$$\frac{8}{2^\lambda} T < S < 8T; \tag{6}$$

но рядъ T будетъ сходящійся, пока будетъ $2\lambda - 1 > 1$, т. е.

$$\lambda > 1; \tag{7}$$

но тогда по (6) будетъ и S сходящійся рядъ, заключаясь между двумя конечными величинами и состоя изъ однихъ положительныхъ членовъ, и притомъ безусловно-сходящійся.

34. Пусть теперь

$$V = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n} \frac{1}{\varphi + \psi}, \tag{1}$$

гдѣ φ однородная функція m и n степени λ, и притомъ такая, которая ни для какой комбинаціи значеній m и n, кромѣ недопускаемой

въ суммѣ штрихомъ комбинаціи $m=0$, $n=0$, не обращается въ нуль, а ψ какая либо функція степени ниже λ. Такъ какъ равенство:

$$m^2+n^2=1 \tag{2}$$

имѣетъ мѣсто лишь для конечныхъ значеній m и n, то для тѣхъ значеній m и n, которыя удовлетворяютъ этому уравненію, и φ будетъ заключаться между конечными предѣлами k и K, т. е. будетъ для m и n, удовлетворяющихъ уравненію (2):

$$k<\varphi<K, \tag{3}$$

а слѣдовательно при условіи (2) будетъ имѣть мѣсто и такое неравенство:

$$k<\frac{\varphi}{(m^2+n^2)^{\frac{\lambda}{2}}}<K; \tag{4}$$

но какъ средній членъ здѣсь есть однородная функція m и n нулевого измѣренія, то ограниченіе (2) съ m и n можетъ быть снято, и это неравенство (4) будетъ имѣть мѣсто для всякихъ значеній m и n; слѣдовательно:

$$A_{m,n}=\frac{\varphi}{(m^2+n^2)^{\frac{\lambda}{2}}} \tag{5}$$

будетъ величина, остающаяся въ конечныхъ предѣлахъ k и K для всякихъ значеній m и n. Выраженіе

$$\frac{\psi}{(m^2+n^2)^{\frac{\lambda}{2}}} \tag{6}$$

по абсолютному значенію своему съ возрастаніемъ m и n будетъ стремиться къ нулю; для конечныхъ же m и n будетъ конечная величина; а потому всегда можно найти такія два конечныя числа l и L, между которыми будетъ заключаться выраженіе:

$$A_{m,n}+\frac{\psi}{(m^2+n^2)^{\frac{\lambda}{2}}} \tag{7}$$

для всякихъ m и n. Итакъ для всякихъ m и n будетъ:

$$l < A_{m,n} + \frac{\psi}{(m^2+n^2)^{\frac{\lambda}{2}}} < L, \tag{8}$$

и слѣдовательно

$$\frac{1}{L} < \frac{1}{A_{m,n} + \frac{\psi}{(m^2+n^2)^{\frac{\lambda}{2}}}} < \frac{1}{l}. \tag{9}$$

Помножая это на $\frac{1}{(m^2+n^2)^{\frac{\lambda}{2}}}$, и замѣчая, что по (5):

$$\frac{1}{(m^2+n^2)^{\frac{\lambda}{2}}\left[A_{m,n} + \frac{\psi}{(m^2+n^2)^{\frac{\lambda}{2}}}\right]} = \frac{1}{\varphi+\psi}, \tag{10}$$

мы послѣ суммированія по m и n, получимъ:

$$\frac{1}{L}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n} \frac{1}{(m^2+n^2)^{\frac{\lambda}{2}}} < V < \frac{1}{l}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n} \frac{1}{(m^2+n^2)^{\frac{\lambda}{2}}}; \tag{11}$$

отсюда видно, что рядъ V будетъ безусловно-сходящимся, когда $\lambda > 2$, ибо постоянно находится между двухъ рядовъ, сходящихся для $\lambda > 2$: тогда $\frac{\lambda}{2} > 1$, и эти ряды будутъ ряды пред. §. (Ср. *C. Jordan.* Cours d'Analyse. T. I. Paris 1882 p. 160 и слѣдующія).

35. Касательно двойного безконечнаго произведенія

$$U = \prod_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n} u_{m,n}, \tag{1}$$

мы замѣтимъ, что оно будетъ безусловно-сходящимся въ одно время съ безконечнымъ рядомъ:

$$\log U = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n} \log u_{m,n}, \tag{2}$$

а слѣдовательно и съ рядомъ

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n}(u_{m,n}-1), \tag{3}$$

что докажется, какъ и въ § 32.

Этимъ закончимъ наше введеніе, имѣя другія свѣдѣнія изъ этой теоріи сообщить при изложеніи теоріи эллиптическихъ функцій, когда въ томъ появится надобность.

Примѣчаніе. Неравенство (11) пред. § предполагаетъ всѣ члены V положительными; если бы нѣкоторые были отрицательными, то ихъ было бы конечное число; исключая при суммированіи тѣ значенія m и n, которымъ отвѣчаютъ отрицательные члены, для остальной части V будемъ имѣть такое же неравенство.

ТЕОРІЯ

ЭЛЛИПТИЧЕСКИХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ

И

ЭЛЛИПТИЧЕСКИХЪ ФУНКЦІЙ.

ГЛАВА I.

Приведеніе эллиптическихъ интеграловъ къ интеграламъ трехъ родовъ; различныя формы этихъ интеграловъ.

1. Означая чрезъ $R(x)$ полиномъ третьей или четвертой степени, а чрезъ $F[x, \sqrt{R(x)}]$ раціональную функцію x и $\sqrt{R(x)}$, и взявъ отъ нея интегралъ:

$$\int_{x_0}^{x} F[x, \sqrt{R(x)}]\, dx\,, \tag{1}$$

будемъ имѣть *эллиптическій интегралъ* въ самомъ общемъ видѣ. Случай когда, $R(x)$ будетъ полиномъ четвертой степени, легко сводится къ тому, когда подъ корнемъ стоитъ полиномъ третьей степени. Введемъ новую перемѣнную, полагая

$$x = \alpha + \frac{1}{y}; \tag{2}$$

тогда по строкѣ Тэйлора получимъ:

$$R(x) = R\left(\alpha + \frac{1}{y}\right) =$$

$$= R(\alpha) + R'(\alpha)\frac{1}{y} + \frac{R''(\alpha)}{1.2}\frac{1}{y^2} + \frac{R'''(\alpha)}{1\ 2.3}\frac{1}{y^3} + \frac{R^{\text{IV}}(\alpha)}{1.2.3.4}\frac{1}{y^4},$$

и слѣдовательно

$$\sqrt{R(x)} = \frac{1}{y^2}\sqrt{R(a)y^4 + R'(a)y^3 + \frac{R''(a)}{1.2}y^2 + \frac{R'''(a)}{1.2.3}y + \frac{R^{\text{IV}}(a)}{1.2.3.4}}; \quad (3)$$

если теперь возьмемъ за a одинъ изъ корней полинома $R(x)$, то будетъ $R(a) = 0$, и слѣдовательно подъ корнемъ получится полиномъ третьей степени относительно y. На основаніи этого въ дальнѣйшемъ мы всегда будемъ разумѣть подъ $R(x)$ полиномъ третьей степени:

$$R(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D. \quad (4)$$

Означимъ корни его чрезъ a_0, a_1, a_2, располагая ихъ въ убывающемъ порядкѣ вещественныхъ частей ихъ, въ случаѣ одинаковости послѣднихъ въ убывающемъ порядкѣ мнимыхъ частей ихъ. Тѣже корни въ какой либо перестановкѣ будемъ обозначать чрезъ a_i, a_j, a_k, такъ что слѣдовательно будетъ

$$R(x) = A(x - a_0)(x - a_1)(x - a_2) = A(x - a_i)(x - a_j)(x - a_k). \quad (5)$$

2. Общій видъ $F[x, \sqrt{R(x)}]$ есть слѣдующій:

$$\frac{\varphi[x, \sqrt{R(x)}]}{\psi[x, \sqrt{R(x)}]}, \quad (1)$$

гдѣ φ и ψ суть *цѣлыя* функціи какъ x, такъ и $\sqrt{R(x)}$, слѣдовательно имѣютъ каждая видъ:

$$\sum A_{m,n} x^m [\sqrt{R(x)}]^n,$$

гдѣ $A_{m,n}$ постоянныя, или же, отдѣляя четныя степени $\sqrt{R(x)}$ отъ нечетныхъ:

$$\sum B_{m,2p} x^m [\sqrt{R(x)}]^{2p} + \sum C_{m',2p'+1} x^{m'} [\sqrt{R(x)}]^{2p'+1};$$

но $[\sqrt{R(x)}]^{2p} = [R(x)]^p$ и есть, слѣдовательно, цѣлая раціональная функція x; далѣе

$$[\sqrt{R(x)}]^{2p'+1} = [\sqrt{R(x)}]^{2p'} \sqrt{R(x)} = [R(x)]^{p'} \sqrt{R(x)},$$

т. е. равно произведенію цѣлой раціональной функціи x на $\sqrt{R(x)}$. Такимъ образомъ общій видъ цѣлой раціональной функціи x и $\sqrt{R(x)}$ будетъ окончательно такой:

$$M + N\sqrt{R(x)},$$

гдѣ M и N суть цѣлыя раціональныя функціи x. На основаніи этого общій видъ раціональной функціи x и $\sqrt{R(x)}$ будетъ слѣдующій:

$$F[x, \sqrt{R(x)}] = \frac{M + N\sqrt{R(x)}}{M_1 + N_1\sqrt{R(x)}}, \tag{2}$$

гдѣ M, N, M_1 и N_1 суть цѣлыя раціональныя функціи x. Помножая числителя и знаменателя на $M_1 - N_1\sqrt{R(x)}$, и полагая для краткости

$$\left.\begin{aligned} &\frac{MM_1 - NN_1R(x)}{M_1^2 - N_1^2R(x)} = P(x), \\ &\frac{M_1N - N_1M}{M_1^2 - N_1^2R(x)} R(x) = Q(x), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

мы дадимъ нашей функціи окончательно такой видъ:

$$F[x, \sqrt{R(x)}] = P(x) + \frac{Q(x)}{\sqrt{R(x)}}, \tag{4}$$

гдѣ $P(x)$ и $Q(x)$ по (3) будутъ раціональныя функціи x. Вслѣдствіе этого общій эллиптическій интегралъ разбивается на два такимъ образомъ:

$$\int_{x_0}^{x} F[x, \sqrt{R(x)}]dx = \int_{x_0}^{x} P(x)dx + \int_{x_0}^{x} \frac{Q(x)}{\sqrt{R(x)}}\, dx. \tag{5}$$

Первый интегралъ второй части, какъ интегралъ отъ раціональной функціи x, приводится къ алгебраическимъ, логариѳмическимъ и круговымъ функціямъ; второй же собственно и будетъ эллиптическимъ. Итакъ окончательно за общій видъ эллиптическаго интеграла можно принять

$$\int_{x_0}^{x} \frac{Q(x)}{\sqrt{R(x)}}\, dx,$$

гдѣ $Q(x)$ раціональная функція x.

3. Но и этотъ интегралъ вообще содержитъ въ себѣ и алгебраическую часть, [которая можетъ быть сразу отдѣлена при помощи раціональныхъ дѣйствій *)]; это можно показать такимъ образомъ. Общій видъ раціональной функціи $Q(x)$ отъ x по отдѣленіи цѣлой части и разложеніи дробной на частныя дроби есть такой:

$$Q(x) = \sum_m A_m x^m + \sum_{a,n} \frac{B_n}{(x-a)^n}\,; \tag{1}$$

потому будетъ:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{Q(x)dx}{\sqrt{R(x)}} = \sum_m A_m \int_{x_0}^{x} \frac{x^m dx}{\sqrt{R(x)}} + \sum_{a,n} B_n \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{(x-a)^n \sqrt{R(x)}}. \tag{2}$$

Встрѣчающіеся здѣсь интегралы двухъ типовъ:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{x^m dx}{\sqrt{R(x)}} \quad \text{и} \quad \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{(x-a)^n \sqrt{R(x)}} \tag{3}$$

можно обнять въ одной формулѣ:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{(x-a)^m dx}{\sqrt{R(x)}}, \tag{4}$$

если допустить, что a можетъ быть и нулемъ, а m и отрицательнымъ. Для этихъ же послѣднихъ интеграловъ легко вывести равенство, на основаніи котораго они сведутся къ интеграламъ того же вида, но съ меньшими численно показателями.

4. Съ этою цѣлью возьмемъ производную отъ

$$(x-a)^m \sqrt{R(x)}\,;$$

будемъ имѣть:

$$\frac{d[(x-a)^m \sqrt{R(x)}]}{dx} = m(x-a)^{m-1}\sqrt{R(x)} + (x-a)^m \frac{R'(x)}{2\sqrt{R(x)}},$$

*) См. нашу статью: „Отдѣленіе алгебраической части гиперэллиптическихъ интеграловъ“, помѣщенную въ „Сообщеніяхъ и протоколахъ Математическаго Общества при Императорскомъ Харьковскомъ университетѣ за 1885 г.“.

или

$$\frac{d[(x-a)^m\sqrt{R(x)}]}{dx}=[2mR(x)+(x-a)R'(x)]\frac{(x-a)^{m-1}}{2\sqrt{R(x)}}. \qquad (1)$$

Но по строкѣ Тэйлора имѣемъ:

$$R(x)=R(a)+R'(a)(x-a)+\frac{R''(a)}{1.2}(x-a)^2+\frac{R'''(a)}{1.2.3}(x-a)^3;$$

$$R'(x)=R'(a)+R''(a)(x-a)+\frac{R'''(a)}{1.2}(x-a)^2;$$

внося это въ (1), получимъ такое тождество:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d[(x-a)^m\sqrt{R(x)}]}{dx}=\Big\{2mR(a)+(2m+1)R'(a)(x-a)+\\&+(2m+2)\frac{R''(a)}{1.2}(x-a)^2+(2m+3)\frac{R'''(a)}{1.2.3}(x-a)^3\Big\}\frac{(x-a)^{m-1}}{2\sqrt{R(x)}}.\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Раскрывая большія скобки и интегрируя отъ x_0 до x, получимъ:

$$\left.\begin{aligned}&(x-a)^m\sqrt{R(x)}-(x_0-a)^m\sqrt{R(x_0)}=\\&=2mR(a)\int_{x_0}^{x}\frac{(x-a)^{m-1}dx}{2\sqrt{R(x)}}+\\&+(2m+1)R'(a)\int_{x_0}^{x}\frac{(x-a)^m dx}{2\sqrt{R(x)}}+\\&+(2m+2)\frac{R''(a)}{1.2}\int_{x_0}^{x}\frac{(x-a)^{m+1}dx}{2\sqrt{R(x)}}+\\&+(2m+3)\frac{R'''(a)}{1.2.3}\int_{x_0}^{x}\frac{(x-a)^{m+2}dx}{2\sqrt{R(x)}}.\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

5. Съ помощію этого соотношенія между интегралами одинъ изъ нихъ можетъ быть выраженъ чрезъ три другія съ меньшими численно показателями и алгебраическую функцію. Пусть сперва a отлично отъ корней полинома $R(x)$, и $m>0$; тогда при помощи равенства (3) можно интегралъ съ показателемъ $m+2$ выразить чрезъ интегралы съ по-

казателями меньшими: $m+1; m, m-1$; перемѣняя въ формулѣ (3) m на $m-1$, получимъ другое равенство, при помощи котораго сведемъ интегралъ съ показателемъ $m+1$ на интегралы съ показателями m, $m-1, m-2$; перемѣняя въ той же формулѣ m на $m-2$, получимъ формулу для выраженія интеграла съ показателемъ m чрезъ интегралы съ показателями $m-1, m-2, m-3$; продолжая это, наконецъ дойдемъ до равенства, выводимаго изъ (3) чрезъ положеніе $m=0$, именно:

$$\sqrt{R(x)}-\sqrt{R(x_0)}=R'(a)\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}+2\,\frac{R''(a)}{1.2}\int_{x_0}^{x}\frac{(x-a)dx}{2\sqrt{R(x)}}+$$

$$+3\,\frac{R'''(a)}{1.2.3}\int_{x_0}^{x}\frac{(x-a)^2dx}{2\sqrt{R(x)}},$$

которое интегралъ съ показателемъ 2 сводитъ къ двумъ интеграламъ:

I) $\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}$ — *интегралъ перваго рода;*

II) $\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{(x-a)\,dx}{2\sqrt{R(x)}}$ — *интегралъ второго рода.*

Такимъ образомъ всѣ интегралы вида (4) § (3) при $m>0$ въ концѣ концевъ сводятся при посредствѣ алгебраическихъ функцій къ интеграламъ перваго и второго рода.

6. Пусть теперь $m<0$; тогда равенство (3) § 4 позволитъ интегралъ съ показателемъ $m-1$ свести къ интеграламъ того же вида съ показателями численно меньшими: $m, m+1, m+2$; перемѣняя въ той же формулѣ m на $m+1$, получимъ равенство, съ помощію котораго интегралъ съ показателемъ m сведемъ къ интеграламъ съ показателями численно меньшими: $m+1, m+2; m+3$. Продолжая это, придемъ наконецъ къ равенству, получающемуся изъ (3) § 4, давая m численно наименьшее значеніе, т. е. полагая $m=-1$, именно къ такому:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sqrt{R(x)}}{x-a}-\frac{\sqrt{R(x_0)}}{x_0-a}&=-2R(a)\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{(x-a)^2\,2\sqrt{R(x)}}-\\-R'(a)\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{(x-a)2\sqrt{R(x)}}&+\frac{R'''(a)}{1.2.3}\int_{x_0}^{x}\frac{(x-a)dx}{2\sqrt{R(x)}},\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

которое послужитъ для выраженія интеграла съ показателемъ -2 чрезъ интегралъ второго рода и еще чрезъ интегралъ

$$\text{III)} \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{(x-a)2\sqrt{R(x)}} \text{— \textit{третьяго рода.}}$$

Этотъ интегралъ не можетъ быть сведенъ къ интеграламъ первыхъ двухъ родовъ; въ самомъ дѣлѣ, полагая въ (3) § 4 $m=0$, мы получимъ соотношеніе между интегралами первыхъ двухъ родовъ и сводящимся къ нимъ интеграломъ съ показателемъ 2; формально же имѣющій войти въ это равенство интегралъ третьяго рода, имѣя коэффиціентомъ нуль, не можетъ быть выраженъ чрезъ эти три интеграла. Итакъ это будетъ третій независимый интегралъ, къ которому вмѣстѣ съ интегралами перваго и второго и алгебраическими функціями въ концѣ концевъ сводятся интегралы (4) § 3 при $m<0$. Такимъ образомъ, мы видимъ, что при помощи алгебраическихъ функцій самый общій эллиптическій интегралъ сводится къ тремъ независимымъ интеграламъ, перваго, второго и третьяго родовъ. Общій видъ его слѣдовательно будетъ такой:

$$\left.\begin{aligned} &\int_{x_0}^{x} F[x,\sqrt{R(x)}]\,dx = \varphi(x) + \psi(x)\sqrt{R(x)} + C\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} + \\ &+ D\int_{x_0}^{x}\frac{A(x-a)dx}{2\sqrt{R(x)}} + \sum_k E_k \int_{x_0}^{x}\frac{dx}{(x-a_k)\,2\sqrt{R(x)}}, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

гдѣ $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ раціональныя функціи x; C, D, E_k постоянныя.

7. Равенство (1) пред. § можно преобразовать такимъ образомъ, вынося $-2\sqrt{R(a)}$ въ первыхъ двухъ членахъ за скобки и соединяя затѣмъ оба интеграла въ одинъ:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\sqrt{R(x)}}{x-a} - \frac{\sqrt{R(x_0)}}{x_0-a} = \\ &= -2\sqrt{R(a)}\int_{x_0}^{x}\left\{\frac{\sqrt{R(a)}}{(x-a)^2} + \frac{R'(a)}{2\sqrt{R(a)}}\cdot\frac{1}{x-a}\right\}\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} + \\ &+ \int_{x_0}^{x}\frac{A(x-a)dx}{2\sqrt{R(x)}}, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

(ибо
$$\frac{R'''(a)}{1.2.3}=A); \tag{2}$$
но
$$\frac{\sqrt{R(a)}}{(x-a)^2}+\frac{R'(a)}{x-a}=\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\sqrt{R(a)}}{x-a}\right), \tag{3}$$

а потому (1), вынося еще дифференцированіе по a за знакъ интеграла, можно такъ представить:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sqrt{R(x)}}{x-a}-\frac{\sqrt{R(x_0)}}{x_0-a}=-2\sqrt{R(a)}\frac{\partial}{\partial a}\int_{x_0}^{x}\frac{\sqrt{R(a)}}{x-a}.\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}+\\ +\int_{x_0}^{x}\frac{A(x-a)dx}{2\sqrt{R(x)}}.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Входящій сюда *интегралъ, получающійся чрезъ дифференцированіе по* a (*параметру*) *изъ интеграла третьяго рода:*

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\sqrt{R(a)}}{x-a}.\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}, \tag{5}$$

[онъ отличается отъ III) § 6 лишь постояннымъ множителемъ $\sqrt{R(a)}$], приводясь при посредствѣ алгебраической функціи къ интегралу второго рода, *есть* тоже *интегралъ второго рода.*

8. Мы разсматривали до сихъ поръ a какимъ угодно количествомъ, лишь бы оно не было равно которому нибудь изъ корней $R(x)$. Пусть теперь $a=a_i$, гдѣ a_i который нибудь изъ корней a_0, a_1, a_2 этого полинома; тогда изъ (1) § 6 первый членъ второй части исчезнетъ [ибо $R(a_i)=0$ тождественно], и это равенство обратится въ такое:

$$\frac{\sqrt{R(x)}}{x-a_i}-\frac{\sqrt{R(x_0)}}{x_0-a_i}=-\int_{x_0}^{x}\frac{R'(a_i)}{x-a_i}.\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}+\int_{x_0}^{x}\frac{A(x-a_i)dx}{2\sqrt{R(x)}}, \tag{1}$$

[принимая во вниманіе (2) пред. §]. Отсюда видно, что интегралъ

$$\int_{x_0}^{x}\frac{R'(a_i)}{x-a_i}\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}, \tag{2}$$

— формально третьяго рода, приводясь при помощи алгебраическихъ функцій къ интеграламъ второго рода, будетъ въ дѣйствительности интеграломъ *второго рода.*

9. И въ самомъ дѣлѣ, съ помощію подстановки:

$$A(x-a_i)=\frac{R'(a_i)}{y-a_i}, \tag{1}$$

можно первому члену второй части (1) пред. § дать видъ одинакій со вторымъ. Такъ какъ

$$R'(a_i)=A(a_i-a_j)(a_i-a_k), \tag{2}$$

то (1) по сокращеніи на A принимаетъ такой видъ:

$$x-a_i=\frac{(a_i-a_j)(a_i-a_k)}{y-a_i}; \tag{3}$$

дифференцируя, получимъ:

$$dx=-\frac{(a_i-a_j)(a_i-a_k)}{(y-a_i)^2}; \tag{4}$$

далѣе будетъ

$$\left.\begin{aligned} x-a_j=x-a_i+a_i-a_j=(a_i-a_j)\left[\frac{a_i-a_k}{y-a_i}+1\right]= \\ =(a_i-a_j)\frac{y-a_k}{y-a_i}; \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

и точно также

$$x-a_k=(a_i-a_k)\frac{y-a_j}{y-a_i}; \tag{6}$$

внося изъ (3), (5) и (6) въ (5) § 1, будемъ имѣть:

$$R(x)=\frac{A(a_i-a_j)^2(a_i-a_j)^2}{(y-a_i)^4}(y-a_i)(y-a_j)(y-a_k), \tag{7}$$

т. е.

$$R(x)=\left[\frac{(a_i-a_j)(a_i-a_k)}{(y-a_i)^2}\right]^2 R(y), \tag{8}$$

и слѣдовательно

$$\sqrt{R(x)} = \frac{(a_i - a_j)(a_i - a_k)}{(y - a_i)^2} \sqrt{R(y)}. \tag{9}$$

Дѣля (4) на удвоенное (9), получимъ:

$$\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} = -\frac{dy}{2\sqrt{R(y)}}. \tag{10}$$

Далѣе, изъ (1) имѣемъ:

$$\frac{R'(a_i)}{x - a_i} = A(y - a_i); \tag{11}$$

перемножая это съ (10), получимъ:

$$\frac{R'(a_i)}{x - a_i} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} = -\frac{A(y - a_i)dy}{2\sqrt{R(y)}}; \tag{12}$$

интегрируя по x отъ x_0 до x, слѣдовательно по y отъ y_0 до y, гдѣ y_0 опредѣляется изъ условія:

$$A(y_0 - a_i) = \frac{R'(a_i)}{x_0 - a_i}, \tag{13}$$

мы получимъ:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{R'(a_i)}{x - a_i} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} = -\int_{y_0}^{y} \frac{A(y - a_i)dy}{2\sqrt{R(y)}}. \tag{14}$$

Вносvolя это въ (1) пред. §, будемъ имѣть:

$$\frac{\sqrt{R(x)}}{x - a_i} - \frac{\sqrt{R(x_0)}}{x_0 - a_i} = \int_{y_0}^{y} \frac{A(y - a_i)dy}{2\sqrt{R(y)}} + \int_{x_0}^{x} \frac{A(x - a_i)dx}{2\sqrt{R(x)}}. \tag{15}$$

Это равенство можно нѣсколько обобщить. Изъ (10) интегрируя, по перенесеніи всего въ одну часть будемъ имѣть:

$$0 = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{2\sqrt{R(y)}} + \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}; \tag{16}$$

помножая это равенство на $a_i - c$, гдѣ c совершенно произвольная постоянная, и придавая къ (15), мы дадимъ этому послѣднему такой видъ:

$$\frac{\sqrt{R(x)}}{x-a_i}-\frac{\sqrt{R(x_0)}}{x_0-a_i}=\int_{y_0}^{y}\frac{A(y-c)dy}{2\sqrt{R(y)}}+\int_{x_0}^{x}\frac{A(x-c)dx}{2\sqrt{R(x)}}. \tag{17}$$

Это равенство имѣетъ фундаментальное значеніе въ теоріи эллиптическихъ функцій, ибо при помощи его легко рѣшается задача *объ обращеніи эллиптическихъ интеграловъ*, т. е. о выраженіи предѣла интеграла чрезъ его величину. Дѣйствительно помножая (17) на $\dfrac{dx}{2\sqrt{R(x)}}$, имѣя въ виду (10) для перваго члена второй части, и интегрируя по x_0 до x, слѣдовательно по y отъ y_0 до y, мы получимъ:

$$\left.\begin{aligned}&\log\sqrt{\frac{x-a_i}{x_0-a_i}}-\frac{\sqrt{R(x_0)}}{x_0-a_i}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}=\\&=-\int_{y_0}^{y}\left(\int_{y_0}^{y}\frac{A(y-c)}{2\sqrt{R(y)}}dy\right)\frac{dy}{2\sqrt{R(y)}}+\int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{x}\frac{A(x-c)}{2\sqrt{R(x)}}dx\right)\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}};\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

отсюда, переходя отъ логариѳма къ числу, будемъ имѣть такую формулу:

$$\sqrt{\frac{x-a_i}{x_0-a_i}}=e^{\frac{\sqrt{R(x_0)}}{x_0-a_i}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}}\,\frac{e^{-\int_{x_0}^{y}\left(\int_{y_0}^{y}\frac{A(y-c)dy}{2\sqrt{R(y)}}\right)\frac{dy}{2\sqrt{R(y)}}}}{e^{-\int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{x}\frac{A(x-c)dx}{2\sqrt{R(x)}}\right)\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}}}; \tag{19}$$

такъ выражается $\sqrt{\dfrac{x-a_i}{x_0-a_i}}$ чрезъ значенія эллиптическихъ интеграловъ. Эта формула приметъ болѣе простой видъ, если принять $x_0=a_j$; тогда будетъ, какъ то видно изъ (3), $y_0=a_k$, и изъ (19) мы получимъ:

$$\sqrt{\frac{x-a_i}{a_j-a_i}}=\frac{e^{-\int_{a_k}^{y}\left(\int_{a_k}^{y}\frac{A(y-c)dy}{2\sqrt{R(y)}}\right)\frac{dy}{2\sqrt{R(y)}}}}{e^{-\int_{a_j}^{x}\left(\int_{a_j}^{x}\frac{A(x-c)dx}{2\sqrt{R(x)}}\right)\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}}}. \tag{20}$$

*

Прежде однако, чѣмъ вывести отсюда какія либо заключенія, мы должны кончить только-что начатое изслѣдованіе эллиптическихъ интеграловъ.

10. Мы встрѣтили нѣсколько видовъ интеграловъ второго рода; всѣ они могутъ быть выведены изъ одного интеграла съ параметромъ a, давая a частныя значенія и придавая въ нѣкоторыхъ случаяхъ интегралъ перваго рода, умноженный на нѣкоторую постоянную. Равнымъ образомъ кромѣ интеграловъ третьяго рода III § 6 и отличающагося отъ него постояннымъ множителемъ интеграла (5) § 7 (*Якобіевскій* интегралъ третьяго рода) имѣются другія формы интеграловъ третьяго рода, находящіеся съ этими въ весьма простой зависимости. Къ этимъ видамъ интеграловъ второго и третьяго рода насъ приведетъ само собою дифференціальное тождество (2) § 4 для $m = -1$, именно:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{R(x)}}{x-a}\right) = \left\{-2R(a) - R'(a)(x-a) + \frac{R'''(a)}{1.2.3}(x-a)^3\right\}\frac{(x-a)^{-2}}{2\sqrt{R(x)}}, \quad (1)$$

которое по раскрытіи скобокъ, на основаніи (2) и (3) § 7 легко приведется къ такому виду:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sqrt{R(x)}}{x-a}\right) = -2\sqrt{R(a)}\,\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\sqrt{R(a)}}{x-a}\right)\frac{1}{2\sqrt{R(x)}} + \frac{A(x-a)}{2\sqrt{R(x)}}, \quad (2)$$

[гдѣ налѣво мы перемѣнили прямое d на круглое ∂, такъ какъ у насъ теперь двѣ перемѣнныя x и a]. Дѣля обѣ части на $2\sqrt{R(a)}$, мы дадимъ тождеству (2) такой видъ:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sqrt{R(x)}}{x-a}\,\frac{1}{2\sqrt{R(a)}}\right) = \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\sqrt{R(a)}}{a-x}\,\frac{1}{2\sqrt{R(x)}}\right) + \frac{A(x-a)}{2\sqrt{R(x)}}\,\frac{1}{2\sqrt{R(a)}}, \quad (3)$$

или перенося частныя производныя изъ одной части въ другую:

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\sqrt{R(a)}}{x-a}\,\frac{1}{2\sqrt{R(x)}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sqrt{R(x)}}{a-x}\,\frac{1}{2\sqrt{R(a)}}\right) + \frac{A(x-a)}{2\sqrt{R(x)}}\,\frac{1}{2\sqrt{R(a)}}. \quad (4)$$

Придавая къ этому очевидное тождество:

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\sqrt{R(x)}}{x-a}\,\frac{1}{2\sqrt{R(x)}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sqrt{R(a)}}{a-x}\,\frac{1}{2\sqrt{R(a)}}\right), \quad (5)$$

[ибо каждая часть этого равенства $= \frac{1}{2}\frac{1}{(x-a)^2}$], мы получимъ такое:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\sqrt{R(x)}+\sqrt{R(a)}}{x-a}\frac{1}{2\sqrt{R(x)}}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sqrt{R(x)}+\sqrt{R(a)}}{a-x}\frac{1}{2\sqrt{R(a)}}\right)+\\ +\frac{A(x-a)}{2\sqrt{R(x)}}\frac{1}{2\sqrt{R(a)}}.\end{aligned}\right\}(6)$$

Имѣя же въ виду, что

$$x-a=x-c-(a-c),$$

гдѣ c совершенно производная постоянная величина, послѣднему можно дать такой видъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\sqrt{R(x)}+\sqrt{R(a)}}{x-a}\frac{1}{2\sqrt{R(x)}}\right)+\frac{A(a-c)}{2\sqrt{R(a)}}\frac{1}{2\sqrt{R(x)}}=\\ =\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sqrt{R(x)}+\sqrt{R(a)}}{a-x}\frac{1}{2\sqrt{R(a)}}\right)+\frac{A(x-c)}{2\sqrt{R(x)}}\frac{1}{2\sqrt{R(a)}}.\end{aligned}\right\}(7)$$

Отсюда мы выведемъ не одно слѣдствіе. Выполняя здѣсь дифференцированіе по x, мы дадимъ новую форму этому тождеству. Сперва будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sqrt{R(x)}+\sqrt{R(a)}}{a-x}\frac{1}{2\sqrt{R(a)}}\right)=\\ &=\frac{1}{2\sqrt{R(a)}}\left\{\frac{\sqrt{R(x)}+\sqrt{R(a)}}{(a-x)^2}+\frac{R'(x)}{(a-x)2\sqrt{R(x)}}\right\}=\\ &=\frac{2\sqrt{R(x)}\sqrt{R(a)}+2R(x)+(a-x)R'(x)}{(a-x)^2\,2\sqrt{R(x)}\,2\sqrt{R(a)}};\end{aligned}\right\}(8)$$

но по строкѣ Тэйлора:

$$R(a)=R(x+a-x)=$$

$$=R(x)+(a-x)R'(x)+\frac{R''(x)}{1.2}(a-x)^2+\frac{R'''(x)}{1.2.3}(a-x)^3;$$

отсюда [имѣя въ виду, что $\frac{R''(x)}{1.2}=3Ax+B$ и $\frac{R'''(x)}{1.2.3}=A$],

получимъ:

$$R(x)+(a-x)R'(x)=R(a)-(3Ax+B)(a-x)^2-A(a-x)^3=$$

$$=R(a)-(a-x)^2[2Ax+Aa+B];$$

внося это въ (8), получимъ:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sqrt{R(x)}+\sqrt{R(a)}}{a-x}\frac{1}{2\sqrt{R(a)}}\right)=$$

$$=\frac{2\sqrt{R(x)}\sqrt{R(a)}+R(x)+R(a)}{(a-x)^2}\frac{1}{2\sqrt{R(a)}}\frac{1}{2\sqrt{R(x)}}-\frac{2Ax+Aa+B}{2\sqrt{R(a)}\,2\sqrt{R(x)}},$$

или

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sqrt{R(x)}+\sqrt{R(a)}}{a-x}\frac{1}{2\sqrt{R(a)}}\right)=\\&=\left\{\left(\frac{\sqrt{R(x)}+\sqrt{R(a)}}{a-x}\right)^2-A(2x+a)-B\right\}\frac{1}{2\sqrt{R(x)}}\frac{1}{2\sqrt{R(a)}}.\end{aligned}\right\}(9)$$

Внося это въ (7), получимъ такое тождество:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\sqrt{R(x)}+\sqrt{R(a)}}{x-a}\frac{1}{2\sqrt{R(x)}}\right)+\frac{A(a-c)}{2\sqrt{R(a)}}\frac{1}{2\sqrt{R(x)}}=\\&=\left\{\left(\frac{\sqrt{R(x)}+\sqrt{R(a)}}{a-x}\right)^2-A(x+a)-Ac-B\right\}\frac{1}{2\sqrt{R(x)}}\frac{1}{2\sqrt{R(a)}}.\end{aligned}\right\}(10)$$

11. Интегрируя тождество (7) пред. § по x отъ x_0, получимъ (имѣя въ виду, что

$$\frac{A(a-c)}{2\sqrt{R(a)}}=\frac{\partial}{\partial a}\int_{a_0}^{a}\frac{A(a-c)da}{2\sqrt{R(a)}},$$

гдѣ однако a_0 не корень $R(x)=0$) такой результатъ:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial a}\left\{\int_{x_0}^{x}\frac{\sqrt{R(x)}+\sqrt{R(a)}}{x-a}\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}+\int_{a_0}^{a}\frac{A(a-c)dx}{2\sqrt{R(a)}}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}\right\}=\\&=\left\{\frac{\sqrt{R(x)}+\sqrt{R(a)}}{a-x}-\frac{\sqrt{R(x_0)}+\sqrt{R(a)}}{a-x_0}+\int_{x_0}^{x}\frac{A(x-c)dx}{2\sqrt{R(x)}}\right\}\frac{1}{2\sqrt{R(a)}}.\end{aligned}\right\}(1)$$

Интегралъ лѣвой части, приводясь на основаніи этого равенства при помощи алгебраической функціи къ интегралу второго рода, будетъ тоже интегралъ второго рода. Интегрируя тождество (10) пред. § отъ x_0, получимъ такой результатъ:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial a}\left\{\int_{x_0}^{x}\frac{\sqrt{R(x)}+\sqrt{R(a)}}{x-a}\,\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}+\int_{a_0}^{a}\frac{A(a-c)da}{2\sqrt{R(a)}}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}\right\}=\\&=\int_{x_0}^{x}\left\{\left(\frac{\sqrt{R(x)}+\sqrt{R(a)}}{x-a}\right)^2-A(x+a)-Ac-B\right\}\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}\,\frac{1}{2\sqrt{R(a)}}.\end{aligned}\right\}(2)$$

Лѣвая часть этого равенства тождественна съ лѣвою частью (1), а потому здѣсь во второй части мы имѣемъ другое выраженіе того же самаго интеграла второго рода. Этотъ интегралъ второго рода называется *нормальнымъ интеграломъ второго рода*.

12. Въ нормальномъ интегралѣ второго рода, по умноженіи его на $2\sqrt{R(a)}$, заключаются какъ частные случаи всѣ прежде нами встрѣченные интегралы второго рода. Въ самомъ дѣлѣ, соединяя (1) и (2) пред. § въ одно непрерывное равенство, по умноженіи на $2\sqrt{R(a)}$, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}&2\sqrt{R(a)}\frac{\partial}{\partial a}\left\{\int_{x_0}^{x}\frac{\sqrt{R(x)}+\sqrt{R(a)}}{x-a}\,\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}+\int_{a_0}^{a}\frac{A(a-c)da}{2\sqrt{R(a)}}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}\right\}=\\&=\frac{\sqrt{R(x)}+\sqrt{R(a)}}{a-x}-\frac{\sqrt{R(x_0)}+\sqrt{R(a)}}{a-x_0}+\int_{x_0}^{x}\frac{A(x-c)dx}{2\sqrt{R(x)}}=\\&=\int_{x_0}^{x}\left\{\left(\frac{\sqrt{R(x)}+\sqrt{R(a)}}{x-a}\right)^2-A(x+a)-Ac-B\right\}\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}.\end{aligned}\right\}(1)$$

Полагая здѣсь $a=\infty$, изъ второго выраженія легко усматриваемъ, что чрезъ это получится интегралъ второго рода вида II) § 5: въ самомъ дѣлѣ первые два члена можно такъ представить:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\sqrt{R(x)}+\sqrt{R(a)}}{a-x}-\frac{\sqrt{R(x_0)}+\sqrt{R(a)}}{a-x_0}=\\&=\frac{(x-x_0)\sqrt{R(a)}+a[\sqrt{R(x)}-\sqrt{R(x_0)}]+x\sqrt{R(x_0)}-x_0\sqrt{R(x)}}{(a-x)(a-x_0)};\end{aligned}\right\}(2)$$

а это при $a = \infty$ обратится въ нуль, такъ какъ числитель будетъ $\infty^{\frac{3}{2}}$, а знаменатель ∞^2. Съ нѣкоторыми вычисленіями можно тотъ же результатъ получить и изъ третьей формы нормальнаго интеграла второго рода. Для этого надобно найти

$$\text{пред.}\left\{\left(\frac{\sqrt{R(x)}+\sqrt{R(a)}}{x-a}\right)^2 - Aa\right\}_{a=\infty}; \tag{3}$$

но выраженіе въ скобкахъ $\{\}$ можно преобразовать, полагая $a = \frac{1}{\alpha}$, и тогда будетъ:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{пред.}\left\{\left(\frac{\sqrt{R(x)}+\sqrt{R(a)}}{x-a}\right)^2 - Aa\right\}_{a=\infty} = \\
&= \text{пред.}\left\{\left(\frac{\alpha^{\frac{3}{2}}\sqrt{R(x)}+\sqrt{\alpha^3 R\left(\frac{1}{\alpha}\right)}}{(\alpha x-1)\alpha^{\frac{1}{2}}}\right)^2 - A\frac{1}{\alpha}\right\}_{\alpha=0} = \\
&= \text{пред.}\left\{\frac{[\alpha^{\frac{3}{2}}\sqrt{R(x)}+\sqrt{A+B\alpha+C\alpha^2+D\alpha^3}]^2 - A(\alpha x-1)^2}{\alpha}\right\}_{\alpha=0} \times \\
&\qquad \times \text{пред.}\left(\frac{1}{\alpha x-1}\right)^2_{\alpha=0};
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

но предѣлъ второго множителя очевидно единица; предѣлъ перваго найдется, замѣняя числителя и знаменателя ихъ производными по α:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{пред.}\left\{\frac{[\alpha^{\frac{3}{2}}\sqrt{R(x)}+\sqrt{A+B\alpha+C\alpha^2+D\alpha^3}]^2 - A(\alpha x-1)^2}{\alpha}\right\}_{\alpha=0} = \\
&= \left\{2[\alpha^{\frac{3}{2}}\sqrt{R(x)}+\sqrt{A+B\alpha+C\alpha^2+D\alpha^3}]\left[\frac{3}{2}\alpha^{\frac{1}{2}}\sqrt{R(x)}+\right.\right. \\
&\left.\left.+\frac{B+2c\alpha+3D\alpha^2}{2\sqrt{A+B\alpha+C\alpha^2+D\alpha^3}}\right] - 2Ax(\alpha x-1)\right\}_{\alpha=0} = B+2Ax.
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Внося это вмѣсто (3) въ (1), получимъ въ скобкахъ $\{\}$ послѣ упрощеній выраженіе

$$A(x-c),$$

откуда и будетъ слѣдовать сказанное.

13. Полагая въ (1) пред. § $a = a_i$, получимъ интегралъ, отличающійся отъ (2) § 8 на интегралъ первого рода, умноженный на постоянную. Дѣйствительно, полагая во второй формѣ нормальнаго интеграла второго рода $a = a_i$, мы получимъ:

$$\frac{\sqrt{R(x)}}{a_i - x} - \frac{\sqrt{R(x_0)}}{a_i - a_0} + \int_{x_0}^{x} \frac{A(x-c)dx}{2\sqrt{R(x)}}, \tag{1}$$

тогда какъ рѣшая (1) § (8) по первому интегралу второй части, находимъ:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{R'(a_i)}{x - a_i} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} = \frac{\sqrt{R(x)}}{a_i - x} - \frac{\sqrt{R(x_0)}}{a_i - x_0} + \int_{x_0}^{x} \frac{A(x-a_i)dx}{2\sqrt{R(x)}}; \tag{2}$$

сличая это съ (1), будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\sqrt{R(x)}}{a_i - x} - \frac{\sqrt{R(x_0)}}{a_i - x_0} + \int_{x_0}^{x} \frac{A(x-c)dx}{2\sqrt{R(x)}} = \\ &= \int_{x_0}^{x} \frac{R'(a_i)}{x - a_i} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} + A(c - a_i) \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

откуда и слѣдуетъ сказанное. При частномъ значеніи $c = a_i$ добавочный интегралъ перваго рода исчезаетъ изъ (3). Этотъ результатъ (3) мы прямо получимъ изъ третьей формы нормальнoго интеграла второго рода. При $a = a_i$ выраженіе въ скобкахъ $\{\}$ въ (1) пред. § обратится въ такое:

$$\frac{R(x)}{(x - a_i)^2} - A(x + a_i) - Ac - B =$$

$$= \frac{R'(a_i)}{x - a_i} + \frac{R''(a_i)}{1.2} + \frac{R'''(a_i)}{1.2.3}(x - a_i) - A(x + a_i) - Ac - B = {}^{*})$$

$$= \frac{R'(a_i)}{x - a_i} + (3Aa_i + B) + A(x - a_i) - A(x + a_i) - Ac - B =$$

$$= \frac{R'(a_i)}{x - a_i} + A(a_i - c);$$

*) Разлагая $R(x)$ по строкѣ Тэйлора и имѣя въ виду, что $R(a_i) = 0$.

5

и слѣдовательно мы получимъ изъ (1) пред. § для $a = a_i$:

$$\int_{x_0}^{x} \left\{ \frac{R'(a_i)}{x - a_i} + A(a_i - c) \right\} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}, \tag{4}$$

что уже легко приводится ко второй части (3).

Что же касается до интеграла, входящаго въ равенство (4) § 7, то сличая получающееся оттуда выраженіе этого интеграла:

$$2\sqrt{R(a)} \frac{\partial}{\partial a} \int_{x_0}^{x} \frac{\sqrt{R(a)}}{x - a} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} = \frac{\sqrt{R(x)}}{a - x} - \frac{\sqrt{R(x_0)}}{a - x_0} + \int_{x_0}^{x} \frac{A(x - c)dx}{2\sqrt{R(x)}}, \tag{5}$$

со второю формою нормальнаго интеграла второго рода [(1) § 12], увидимъ, что они разнятся на алгебраическую функцію:

$$\frac{\sqrt{R(a)}}{a - x} - \frac{\sqrt{R(a)}}{a - x_0} = \frac{\sqrt{R(a)}(x - x_0)}{(a - x)(a - x_0)}. \tag{6}$$

14. Помножая (1) § 11 на da и интегрируя отъ a_0 до a, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} &\int_{x_0}^{x} \left\{ \frac{\sqrt{R(x)} + \sqrt{R(a)}}{x - a} - \frac{\sqrt{R(x)} + \sqrt{R(a_0)}}{x - a_0} \right\} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} + \int_{a_0}^{a} \frac{A(a - c)da}{2\sqrt{R(a)}} \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} = \\ &= \int_{a_0}^{a} \left\{ \frac{\sqrt{R(x)} + \sqrt{R(a)}}{a - x} - \frac{\sqrt{R(x_0)} + \sqrt{R(a)}}{a - x_0} \right\} \frac{da}{2\sqrt{R(a)}} + \int_{x_0}^{x} \frac{A(x - c)dx}{2\sqrt{R(x)}} \int_{a_0}^{a} \frac{da}{2\sqrt{R(a)}}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Входящій въ лѣвую часть этого равенства первый интегралъ есть разность двухъ *Вейерштрассовскихъ* интеграловъ третьяго рода, съ параметрами a и a_0, именно

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\sqrt{R(x)} + \sqrt{R(a)}}{x - a} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}, \tag{2}$$

и другого, получающагося изъ него чрезъ перемѣну a на a_0. Вейерштрассовскій интегралъ третьяго рода на логариѳмическую функцію отличается отъ Якобіевскаго, ибо очевидно:

$$\left.\begin{aligned}\int_{x_0}^{x}\frac{\sqrt{R(x)}+\sqrt{R(a)}}{x-a}\,\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}=\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{2(x-a)}+\int_{x_0}^{x}\frac{\sqrt{R(a)}}{x-a}\,\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}=\\ =\frac{1}{2}\log\left(\frac{x-a}{x_0-a}\right)+\int_{x_0}^{x}\frac{\sqrt{R(a)}}{x-a}\,\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}\,;\end{aligned}\right\}(3)$$

мы увидимъ въ слѣдующей главѣ, что придача такой функціи къ интегралу третьяго рода не измѣняетъ характеристическихъ свойствъ его; а потому Вейерштрассовскій и разсматриваемый нами теперь интегралъ относятся къ интеграламъ третьяго рода. Тамъ же мы увидимъ, что характеристическія свойства интеграловъ второго и третьяго рода не измѣняются отъ придачи къ нимъ интеграла перваго рода, помноженнаго на какую либо постоянную, а потому и вся лѣвая часть равенства (1) представляетъ интегралъ третьяго рода. Величины x_0 и x суть его *предѣлы*; величины a_0 и a его *параметры*. Вторая часть равенства (1) получается изъ первой чрезъ замѣну x_0 и x соотвѣтственно чрезъ a_0 a, и наоборотъ, короче чрезъ замѣну предѣловъ параметрами, а параметровъ предѣлами, или, еще короче выражаясь, чрезъ перестановку предѣловъ съ параметрами. Слѣдовательно равенство (1) выражаетъ то особенное свойство разсматриваемаго нами теперь интеграла третьяго рода, называемаго *нормальнымъ*, что *величина его неизмѣняется отъ перестановки параметровъ съ предѣлами*. Нормальный интегралъ третьяго рода, отличающійся этимъ свойствомъ, мы получили изъ нормальнаго интеграла второго рода чрезъ интегрированіе послѣдняго по параметру его отъ a_0 до a; наоборотъ, формула (1) § 11 говоритъ намъ теперь, что нормальный интегралъ второго рода получается изъ нормальнаго интеграла третьяго рода чрезъ дифференцированіе его по параметру.

15. Отличительное свойство нормальнаго интеграла третьяго рода неизмѣнять своей величины отъ перестановки параметровъ съ предѣлами, само собою явствуетъ изъ другого его выраженія, именно въ формѣ двойнаго интеграла, которое получимъ интегрируя (2) § 11 по a отъ a_0 до a.

Сдѣлавъ это, мы будемъ имѣть такое равенство:

$$\int_{x_0}^{x}\left\{\frac{\sqrt{R(x)}+\sqrt{R(a)}}{x-a}-\frac{\sqrt{R(x)}+\sqrt{R(a_0)}}{x-a_0}\right\}\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}+\int_{a_0}^{a}\frac{A(a-c)da}{2\sqrt{R(a)}}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}=$$

$$=\int_{a_0}^{a}\int_{x_0}^{x}\left\{\left(\frac{\sqrt{R(x)}+\sqrt{R(a)}}{x-a}\right)^2-A(x+a)-Ac-B\right\}\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}\,\frac{da}{2\sqrt{R(a)}}\,,$$

*

гдѣ вторая часть, слѣдовательно, представляетъ новое выраженіе нормальнаго интеграла третьяго рода. Это выраженіе вполнѣ симметрично относительно x и a съ одной стороны, x_0 и a_0 съ другой; откуда и слѣдуетъ, что величина этого интеграла не измѣняется отъ перестановки параметровъ съ предѣлами.

Ознакомившись съ различными родами и видами эллиптическихъ интеграловъ, переходимъ къ разсмотрѣнію ихъ отличительныхъ свойствъ.

ГЛАВА II.

Характеристическія особенности эллиптическихъ интеграловъ перваго, второго и третьяго рода.

16. Если x_0 обозначаетъ какую либо величину, отличную отъ a_0, a_1, a_2 — корней полинома $R(x)$, и a и a_0, параметровъ интеграловъ второго и третьяго рода, то всѣ нами встрѣченные эллиптическіе интегралы всѣхъ трехъ родовъ и видовъ будутъ оставаться конечными и непрерывными, пока x не придетъ въ которую нибудь изъ перечисленныхъ сейчасъ точекъ, или не удалится въ безконечность, ибо производныя ихъ только въ этихъ точкахъ перестаютъ быть непрерывными и конечными. Но легко убѣдиться сейчасъ-же, что для $x = a_i$, гдѣ a_i который нибудь изъ корней полинома $R(x)$, всѣ интегралы, за исключеніемъ интеграла второго рода (3) § (8), будутъ оставаться конечными; этотъ же одинъ будетъ обращаться въ безконечность какъ $\dfrac{1}{\sqrt{x-a_i}}$ при $x = a_i$, слѣдовательно *алгебраически*. Дѣйствительно, единственный множитель этихъ производныхъ, или *интеграндовъ* (за упомянутымъ сейчасъ исключеніемъ), который обращается въ безконечность при $x = a_i$, есть

$$\frac{1}{\sqrt{R(x)}}; \tag{1}$$

но помножая его на $(x - a_i)^{\frac{1}{2}}$, мы будемъ имѣть:

$$\left.\frac{(x-a_i)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{R(x)}}\right|_{x=a_i} = \left.\sqrt{\frac{x-a_i}{R(x)}}\right|_{x=a_i} = \frac{1}{\sqrt{R'(a_i)}}, \tag{2}$$

что представляетъ величину конечную; а отсюда по извѣстному предложенію—именно, что если пред. $(x-a)^{\lambda} f(x)|_{x=a}$ есть конечная вели-

чина для $\lambda < 1$, то интегралъ $\int_{x_0}^{\alpha} f(x)dx$ будетъ конечная величина, а если этотъ предѣлъ есть величина конечная при $\lambda \geqq 1$, то интегралъ будетъ безконечно-большая величина, *) и слѣдуетъ сказанное, ибо въ разсматриваемомъ случаѣ показатель $\lambda = \frac{1}{2}$, слѣдовательно < 1. Что же касается интеграла втораго рода (3) § 8, то тамъ множитель, обращающійся въ безконечность при $x = a_i$, есть

$$\frac{1}{(x-a_i)\sqrt{R(x)}}; \tag{3}$$

помножая его на $(x-a_i)^{\frac{3}{2}}$, получимъ туже конечную величину:

$$\left.\frac{(x-a_i)^{\frac{3}{2}}}{(x-a_i)\sqrt{R(x)}}\right|_{x=a_i} = \sqrt{\left.\frac{x-a_i}{R(x)}\right|_{x=a_i}} = \frac{1}{\sqrt{R'(a_i)}}, \tag{4}$$

но какъ здѣсь показатель $\lambda = \frac{3}{2}$, слѣдовательно > 1, то по приведенному сейчасъ предложенію интегралъ будетъ обращаться въ безконечность какъ $-\frac{\sqrt{R'(a_i)}}{\sqrt{x-a_i}}$ при $x = a_i$. Вблизи этого значенія x разсматриваемый интегралъ втораго рода разлагается въ рядъ такого вида:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{R'(a_i)}{x-a_i} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{R'(a_i)}{x-a_i} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} + \int_{x_1}^{x} \frac{R'(a_i)}{x-a_i} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \frac{R'(a_i)}{x-a_i} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} + \int_{x_1}^{x} \frac{R'(a_i)}{(x-a_i)^{\frac{3}{2}}} \frac{dx}{2\sqrt{R(x):(x-a_i)}} =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \frac{R'(a_i)}{x-a_i} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} + \int_{x_1}^{x} \frac{R'(a_i)}{2(x-a_i)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{R'(a_i)}} + \alpha(x-a_i) + \beta(x-a_i)^2 + \dots \right\} dx =$$

$$= C_1 - \frac{\sqrt{R'(a_i)}}{\sqrt{x-a_i}} + \alpha\sqrt{x-a_i} + \beta(x-a_i)^{\frac{3}{2}} + \dots,$$

*) См. *Serret*. Cours de calcul differentiel et de calcul integral. T. II. p. 95 и слѣдующія.

гдѣ x_1 обозначаетъ какое либо значенiе x, лежащее въ области сходимости ряда въ скобкахъ $\{\}$, а чрезъ C_1 обозначена совокупность членовъ зависящихъ лишь отъ x_1, но не отъ x; отсюда также видно, что разсматриваемый интегралъ второго рода при $x = a_i$ обращается въ безконечность какъ $-\frac{\sqrt{R'(a_i)}}{\sqrt{x-a_i}}$ при $x = a_i$, слѣдовательно алгебраически.

17. Другая точка, общая всѣмъ интеграламъ, въ которой они могутъ обращаться въ безконечность, это есть $x = \infty$; для изслѣдованiя интеграловъ вблизи этой точки, положимъ

$$x = \frac{1}{t^2}; \tag{1}$$

тогда будетъ

$$\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} = -\frac{dt}{t^3\sqrt{R\left(\frac{1}{t^2}\right)}} = -\frac{dt}{\sqrt{t^6 R\left(\frac{1}{t^2}\right)}}; \tag{2}$$

но

$$t^6 R\left(\frac{1}{t^2}\right) = A + Bt^2 + Ct^4 + Dt^6, \tag{3}$$

и потому во (2) при $t = 0$ множитель при dt будетъ величина конечная. Отсюда слѣдуетъ, что интегралъ перваго рода при $x = \infty$ будетъ величина *конечная*. Въ предыдущемъ § мы видѣли, что онъ будетъ конеченъ и въ точкахъ $x = a_i$; такъ какъ другихъ точекъ, гдѣ его производная $\frac{1}{2\sqrt{R(x)}}$ претерпѣваетъ разрывъ, нѣтъ, то отсюда заключаемъ, что *интегралъ перваго рода остается конечнымъ для всякаго конечнаго или безконечно-большаго значенiя его верхняго предѣла*; другими словами, *эллиптическiй интегралъ перваго рода есть такая функцiя своего верхняго предѣла, которая остается всегда конечною*, т. е. *для всякихъ значенiй этого предѣла*. Уже отсюда видно, что это будетъ новая трансцендентная. Что же касается эллиптическихъ интеграловъ прочихъ родовъ, то будутъ-ли они конечны или безконечны для $x = \infty$, это будетъ зависѣть отъ другого множителя ихъ дифференцiала.

18. Въ интегралѣ второго рода II) § 4 этотъ второй множитель есть $A(x-a)$; при $x = \frac{1}{t^2}$ онъ обратится въ такой:

$$\frac{A(1-at^2)}{t^2},$$

что только по умноженіи на t^2 при $t=0$ будетъ конечнымъ. Такъ какъ теперь показатель $\lambda=2$, слѣдовательно >1, то отсюда заключаемъ по той-же все теоремѣ, что разсматриваемый интегралъ второго рода обращается въ безконечность при $x=\infty$, и притомъ алгебраически, именно какъ $\frac{\sqrt{A}}{t}$ при $t=0$; ибо

$$\left.\frac{A(1-at^2).t^2}{t^2\sqrt{t^6R\left(\frac{1}{t^2}\right)}}\right|_{t=0}=\sqrt{A}. \tag{1}$$

Точно также, разлагая въ рядъ $\frac{A(x-a)dx}{2\sqrt{R(x)}}$ при $x=\frac{1}{t^2}$ по степенямъ t, будемъ имѣть:

$$\frac{A(x-a)dx}{2\sqrt{R(a)}}=-\frac{A(1-at^2)dt}{t^2\sqrt{t^6R\left(\frac{1}{t^2}\right)}}=-\frac{Adt}{t^2}\left\{\frac{1}{\sqrt{A}}+t^2\mathfrak{P}(t^2)\right\}, \tag{2}$$

гдѣ $\mathfrak{P}(t^2)$ означаетъ рядъ, расположенный по положительнымъ степенямъ t^2; интегрируя по t отъ t_1, гдѣ t_1 означаетъ точку, лежащую въ области сходимости ряда $\mathfrak{P}(t^2)$, мы будемъ имѣть:

$$\int_{x_1}^{x}\frac{A(x-a)dx}{2\sqrt{R(x)}}=\frac{\sqrt{A}}{t}+t\mathfrak{P}_1(t^2)+C_1, \tag{3}$$

гдѣ C_1 означаетъ все зависящее отъ t_1, и $x_1=\frac{1}{t_1^2}$; отсюда и видно, что при $x=\infty$ нашъ интегралъ обращается въ ∞ какъ $\frac{\sqrt{A}}{t}$ при $t=0$, слѣдовательно алгебраически.

19. Прочіе интегралы второго рода будутъ конечны при $x=\infty$. Для нормальнаго интеграла второго рода это прямо слѣдуетъ изъ разсматриваній § 12: въ виду симметричности выраженія въ $\{\}$, входящаго подъ знакъ интеграла, относительно x и a, мы найдемъ, перемѣняя при тѣхъ разсужденіяхъ x на a и наоборотъ, что

$$\text{пред.}\left\{\left(\frac{\sqrt{R(x)}+\sqrt{R(a)}}{x-a}\right)^2-Ax\right\}_{x=\infty}=B+2Aa, \tag{1}$$

слѣдовательно величинѣ конечной. Интегралъ (2) § 8 заключается въ этомъ при $x = a_i$, а потому сказанное относится и къ нему.

20. Нормальный интегралъ третьяго рода остается конечнымъ при $x = \infty$, ибо второй множитель его дифференціала, именно

$$\frac{\sqrt{R(x)} + \sqrt{R(a)}}{x - a} - \frac{\sqrt{R(x)} + \sqrt{R(a_0)}}{x - a_0} \tag{1}$$

можетъ быть такъ представленъ:

$$\frac{(a - a_0)\sqrt{R(x)} + x[\sqrt{R(a)} - \sqrt{R(a_0)}] + a\sqrt{R(a_0)} - a_0\sqrt{R(a)}}{(x - a)(x - a_0)}, \tag{2}$$

откуда видно, что при $x = \infty$ онъ обращается въ нуль, такъ какъ тогда числитель будетъ $= \infty^{\frac{3}{2}}$, а знаменатель ∞^2 (см. § 12). Но Вейерштрассовскій интегралъ обращается въ безконечность при $x = \infty$. Дѣйствительно, полагая $x = \frac{1}{t^2}$, будемъ имѣть:

$$\frac{\sqrt{R(x)} + \sqrt{R(a)}}{x - a} = \frac{\sqrt{t^6 R\left(\frac{1}{t^2}\right)} + t^3\sqrt{R(a)}}{t(1 - at^2)}; \tag{3}$$

это лишь по умноженіи на t^1 при $t = 0$ будетъ конечною величиною, именно $\sqrt{A}$; откуда слѣдуетъ, что при $t = 0$ разсматриваемый интегралъ будетъ обращаться въ безконечность какъ $-\log t = \log\left(\frac{1}{t}\right)$ при $t = 0$, [принимая во вниманіе, что второй множитель дифференціала при $t = 0$ будетъ $-\frac{1}{\sqrt{A}}$, какъ то видно изъ (2) и (3) § 17]. Къ тому же выводу можно придти разлагая въ рядъ по степенямъ t Вейерштрассовскій интеграндъ третьяго рода. Якобіевскій интегралъ третьяго рода будетъ конеченъ при $x = \infty$, ибо

$$\left.\frac{\sqrt{R(a)}}{x - a}\right|_{x=\infty} = 0. \tag{4}$$

21. Что же касается до значенія $x = a$, то нормальный интегралъ второго рода обращается въ ∞^1, когда x получаетъ это значе-

ніе. Это прямо слѣдуетъ изъ второго выраженія [(1) § 11] нормальнаго интеграла второго рода чрезъ алгебраическую функцію и интегралъ второго рода перваго вида: если $x = a$ и $\sqrt{R(x)}\big|_{x=a} = \sqrt{R(a)}$, то будетъ при $x = a$

$$\left.\frac{\sqrt{R(x)} + \sqrt{R(a)}}{a - x}\right|_{x=a} = \infty, \tag{1}$$

тогда какъ интегралъ второго рода перваго вида будетъ конеченъ при $x = a$; если же при $x = a$ примемъ $\sqrt{R(x)}\big|_{x=a} = -\sqrt{R(a)}$, то при $x = a$ и числитель обратится въ нуль, слѣдовательно эта дробь приметъ видъ $\frac{0}{0}$; раскрывая неопредѣленность, получимъ $-\frac{R'(a)}{2\sqrt{R(a)}}$; слѣдовательно въ этомъ случаѣ интегралъ нашъ будетъ конеченъ [ибо и интегралъ второго рода перваго вида будетъ и при этомъ значеніи $\sqrt{R(x)}$ величина конечная].

Итакъ *нормальный интегралъ второго рода обращается при* $x = a$, *его параметру, и при* $\sqrt{R(x)}\big|_{x=a} = \sqrt{R(a)}$, *алгебраически въ безконечность перваго порядка*, именно какъ

$$\left.\frac{1}{a - x}\right|_{x=a}, \tag{2}$$

[имѣя въ виду еще множитель $\frac{1}{2\sqrt{R(a)}}$ за скобками $\{\,\}$], *тогда какъ для всѣхъ прочихъ значеній* x, какъ мы раньше видѣли, *онъ остается конеченъ.* Прочіе виды интеграловъ второго рода заключаются въ нормальномъ, какъ то мы видѣли (§ 13), какъ частные случаи, а потому сказанное про нормальный относится и къ нимъ. Впрочемъ для интеграловъ второго рода перваго вида и интеграла (2) § 8 мы это видѣли соотвѣтственно въ §§ 16 и 17. Такъ какъ интегралъ перваго рода всегда конеченъ, то придача его, умноженнаго на какую либо постоянную, къ интегралу второго рода не можетъ измѣнить характеристическаго его свойства обращаться въ одной точкѣ $[a, \sqrt{R(a)}]$ алгебраически въ ∞^1.

22. Нормальный интегралъ третьяго рода обращается логариѳмически въ безконечность, какъ при $x = a$, такъ и при $x = a_0$, ибо интеграндъ третьяго рода по умноженіи на *первую* степень $x - a$, [или $x - a_0$] обращается въ конечную величину:

$$\text{пред.}(x-a)\left\{\frac{\sqrt{R(x)}+\sqrt{R(a)}}{x-a}-\frac{\sqrt{R(x)}+\sqrt{R(a_0)}}{x-a_0}\right\}\frac{1}{2\sqrt{R(x)}}\bigg|_{x=a}=1\,, \qquad (1)$$

$$\text{пред.}(x-a_0)\left\{\frac{\sqrt{R(x)}+\sqrt{R(a)}}{x-a}-\frac{\sqrt{R(x)}+\sqrt{R(a_0)}}{x-a_0}\right\}\frac{1}{2\sqrt{R(x)}}\bigg|_{x=a_0}=-1\,. \qquad (2)$$

Важно замѣтить, что сумма интегральныхъ вычетовъ производной интеграла третьяго рода относительно обоихъ параметровъ равна нулю: $1-1=0$. Это свойство общее и другимъ интеграламъ третьяго рода: для Якобіевскаго имѣемъ тоже двѣ точки, гдѣ онъ обращается логариѳмически въ ∞, ибо $\sqrt{R(x)}|_{x=a}$ должно брать и съ тѣмъ и другимъ знакомъ; тогда относительно точки $[a, \sqrt{R(a)}]$ вычетъ производной его будетъ $+\frac{1}{2}$, относительно другой $[a, -\sqrt{R(a)}]$ онъ будетъ $-\frac{1}{2}$, какъ легко видѣть, и сумма ихъ очевидно $=0$. Для Вейерштрассовскаго интеграла третьяго рода $a_0=\infty$, и какъ мы видѣли (§ 20) вычетъ относительно этой точки будетъ -1, ибо для $x=\infty$ интегралъ обращается въ ∞ какъ $-\log t|_{t=0}$; слѣдовательно сумма вычетовъ $1-1=0$.

То обстоятельство, что при $x=a$ или $x=a_0$ интегралъ третьяго рода обращается въ ∞ какъ $\log\left(\frac{x-a}{x-a_0}\right)$ соотвѣтственно при этихъ значеніяхъ x, есть причина того, что, какъ сказано въ § 14, придача этой функціи къ интегралу третьяго рода не измѣняетъ его отличительнаго свойства логариѳмически обращаться въ безконечность, и потому даетъ въ результатѣ опять интегралъ третьяго рода. Точно также свойство интеграла перваго рода оставаться всегда конечнымъ причиною того, что придача произведенія его на какую либо постоянную къ интегралу третьяго рода не измѣняетъ его отличительной особенности логариѳмически обращаться въ безконечность, и потому такую сумму опять должно разсматривать какъ интегралъ третьяго рода.

23. Итакъ:

I) Интегралъ перваго рода вездѣ конеченъ.

II) Нормальный интегралъ второго рода *только въ одной точкѣ* $[a, \sqrt{R(a)}]$ обращается *алгебраически* въ безконечность, именно какъ $\frac{1}{a-x}$ при $x=a$;

III) Нормальный интегралъ третьяго рода обращается только въ двухъ точкахъ въ безконечность, именно $x=a$ и $x=a_0$ [при надлежащихъ значеніяхъ $\sqrt{R(x)}$] соотвѣтственно какъ

$$\log(x-a)\big|_{x=a},$$

и

$$-\log(x-a)\big|_{x=a_0};$$

слѣдовательно *логариѳмически*; во всѣхъ же прочихъ точкахъ эти интегралы будутъ конечны и непрерывны.

Будутъ-ли они однозначны или многозначны? Въ слѣдующей главѣ увидимъ, что они суть многозначныя функціи своего верхняго предѣла, допускающія безчисленное множество значеній.

ГЛАВА III.

Риманова поверхность. Примъ-функціи; періоды эллиптическихъ интеграловъ.

24. Производныя эллиптическихъ интеграловъ всѣхъ трехъ родовъ (интегранды), суть функціи двузначныя, какъ содержащія дѣлителемъ функцію $\sqrt{R(x)}$, которая въ каждой точкѣ неограниченной плоскости (или на Неймановой сферѣ) т. е. для каждаго значенія x, имѣетъ два значенія, получающіяся одно изъ другаго чрезъ умноженіе на -1.

Если мы изъ двухъ значеній $\sqrt{R(x)}$ для $x = x_0$ выберемъ одно которое нибудь, то измѣняя непрерывно x вдоль пути интегрированія и руководствуясь закономъ непрерывности, мы будемъ знать, которое изъ двухъ значеній $\sqrt{R(x)}$ надо будетъ взять въ каждой точкѣ пути интегрированія, пока x не перейдетъ чрезъ который либо корень полинома $R(x)$: въ этомъ послѣднемъ случаѣ оба значенія корня $\sqrt{R(x)}$ дѣлаются равными нулю, и каждое изъ обоихъ значеній $\sqrt{R(x)}$ съ равнымъ правомъ по закону непрерывности можетъ быть взято въ слѣдующей точкѣ пути интегрированія; возникаетъ такимъ образомъ неопредѣленность. Эта неопредѣленность исчезнетъ, если мы значенія интегрируемой функціи будемъ распредѣлять не по неограниченной плоскости или Неймановой сферѣ, а по *Римановой поверхности*, спеціально построенной для функціи $\sqrt{R(x)}$, къ объясненію которой теперь и переходимъ.

25. Функція $\sqrt{R(x)}$, гдѣ

$$R(x) = A(x-a_0)(x-a_1)(x-a_2), \tag{1}$$

въ каждой точкѣ x, отличной отъ a_0, a_1, a_2, имѣетъ, какъ сказано, два значенія, разнящіяся знакомъ.

Положимъ:

$$x - a_0 = r_0 e^{\theta_0 i}; \qquad x - a_1 = r_1 e^{\theta_1 i}; \qquad x - a_2 = r_2 e^{\theta_2 i}, \tag{2}$$

гдѣ $i=\sqrt{-1}$; тогда будетъ

$$\sqrt{R(x)}=\pm\sqrt{Ar_0r_1r_2}\,e^{\frac{(\theta_0+\theta_1+\theta_2)i}{2}}. \tag{3}$$

Если x, выйдя изъ x_0, опишетъ сомкнутую кривую, не заключающую внутри себя ни одной изъ точекъ a_0, a_1, a_2, то по возвращеніи его въ x_0 не только модули r_0, r_1, r_2, но и аргументы $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ вернутся къ прежнимъ своимъ значеніямъ, а потому и $\sqrt{R(x)}$ приметъ прежнее свое значеніе. Если же кривая, описанная x-омъ, будетъ заключать внутри себя которую нибудь изъ точекъ a_0, a_1, a_2, то соотвѣтственный аргументъ получитъ приращеніе 2π, слѣдовательно сумма ихъ:

$$\frac{1}{2}(\theta_0+\theta_1+\theta_2) \tag{4}$$

получитъ приращеніе π, и слѣдовательно $\sqrt{R(x_0)}$ по возвращеніи x въ x_0 по такой кривой обратится въ

$$\sqrt{R(x_0)}e^{\pi i}=-\sqrt{R(x_0)}, \tag{5}$$

т. е. перемѣнитъ свой знакъ на противный.

Если кривая, описанная x-омъ, будетъ окружать двѣ изъ точекъ a_0, a_1, a_2, или одну и туже два раза, то полусумма аргументовъ (4) получитъ приращеніе $\pi+\pi=2\pi$; но какъ

$$e^{2\pi i}=+1,$$

то $\sqrt{R(x_0)}$ не измѣнитъ своего значенія. Если кривая окружаетъ три точки, то приращеніе полусуммы будетъ 3π, и слѣдовательно, по причинѣ

$$e^{3\pi i}=-1,$$

$\sqrt{R(x_0)}$ опять перемѣнитъ свой знакъ. Вообще, если кривая окружаетъ одну или различныя изъ точекъ a_0, a_1, a_2 въ положительномъ направленіи (обратное часовой стрѣлкѣ), то полусумма аргументовъ (4) получитъ приращеніе

$$(m-n)\pi,$$

и, смотря потому, будетъ-ли разность $m-n$ четное число, или нечетное, $\sqrt{R(x)}$ приметъ по возвращеніи x въ x_0 свое прежнее значеніе, или противоположное.

26. Соединимъ теперь точки a_1 и a_2 какою нибудь линіей, напримѣръ прямою, и изъ a_0 проведемъ въ безконечность другую линію, которая не пересѣкала бы первую, напримѣръ тоже прямую. Этимъ линіямъ будутъ отвѣчать на сферѣ Неймана линіи, идущія по сферѣ одна изъ α_1 въ α_2, другая изъ α_0 въ $0'$, которыя отвѣчаютъ соотвѣтственно точкамъ a_1, a_2, a_0 и послѣдняя всѣмъ безконечно-удаленнымъ точкамъ плоскости. Этимъ линіямъ какъ на плоскости, такъ и имъ соотвѣтственнымъ на Неймановой сферѣ, припишемъ опредѣленное направленіе каждой, которое назовемъ положительнымъ — это именно изъ a_1 въ a_2 для первой, и изъ ∞ въ a_0 для второй; противоположное ему будемъ называть отрицательнымъ. Возьмемъ какую либо точку x_0, лежащую вправо отъ ломанной линіи $\infty a_0 a_1 a_2$, пробѣгаемой въ положительномъ направленіи; въ ней $\sqrt{R(x)}$ будетъ имѣть два значенія, разнящіяся знакомъ; выберемъ одно изъ нихъ, которое и будемъ разумѣть подъ знакомъ $+\sqrt{R(x_0)}$; [другое тогда будетъ $-\sqrt{R(x_0)}$]. Если поведемъ x изъ x_0 по линіи непересѣкающей ни линіи ∞a_0, ни линіи $a_1 a_2$, то мы будемъ имѣть въ каждой точкѣ каждой изъ этихъ послѣднихъ линій, напримѣръ точкѣ a, два значенія съ противоположными знаками, смотря потому, съ которой стороны разсматриваемой линіи x придетъ въ эту точку, съ правой или лѣвой—(относительно положительнаго направленія). Дѣйствительно, положимъ, что x пришелъ въ a съ правой стороны; мы получимъ для $\sqrt{R(x)}$ значеніе, которое означимъ чрезъ $+\sqrt{R(a)}$; если теперь пожелаемъ перевести x въ ту же точку по другой сторонѣ этой линіи, не переходя ни ея, ни другой подобной, то мы должны обогнуть по сомкнутой кривой одну, или всѣ три, изъ точекъ a_0, a_1, a_2; а потому $\sqrt{R(x)}$ по приходѣ въ a перемѣнитъ свой знакъ, т. е. получитъ значеніе $-\sqrt{R(a)}$.

Такимъ образомъ на всемъ протяженіи линій $\overline{\infty a_0}$ и $\overline{a_1 a_2}$ (ибо a была какая угодно точка этихъ линій) по обѣ стороны каждой изъ нихъ функція $\sqrt{R(x)}$ будетъ имѣть противоположныя значенія. Что же касается линій промежуточныхъ между ними: $\overline{a_0 a_1}$ и $\overline{a_2 - \infty}$, то по обѣ стороны каждой изъ нихъ значенія функціи $\sqrt{R(x)}$ будутъ одинаковы, ибо для того, чтобы съ одной стороны такой линіи перейти на другую, не переходя ни одной изъ первыхъ линій надобно обойти по сомкнутой кривой или двѣ точки a_1 и a_2, или ни одной. Подобные же выводы мы получили бы, если изъ x_0 вышли съ другимъ значеніемъ $\sqrt{R(x)}$,

именно $-\sqrt{R(x_0)}$, съ тою только разницею, что на правой сторонѣ линій $\overline{\infty a_0}$ и $\overline{a_1 a_2}$ мы имѣли бы теперь $-\sqrt{R(a)}$ (въ точкѣ a), а на лѣвой $+\sqrt{R(a)}$.

27. Положимъ теперь, что мы имѣемъ двѣ совпадающія плоскости [какъ бы два листа бумаги, положенныхъ одинъ на другой]; на одной изъ этихъ плоскостей—на одномъ листѣ, какъ будемъ говорить для удобства выраженій, мы распредѣлимъ всѣ значенія, получающіяся изъ $+\sqrt{R(x_0)}$ чрезъ непрерывное измѣненіе x безъ перехода линій $\overline{\infty a_0}$ и $\overline{a_1 a_2}$, на другой—всѣ значенія такимъ же образомъ получаемыя изъ $-\sqrt{R(x_0)}$. Въ точкахъ a_0, a_1, a_2, въ которыхъ эти системы значеній переходятъ одна въ другую, такъ какъ $\sqrt{R(x)}$ обращается въ нуль, мы скрѣпимъ эти листы и затѣмъ сдѣлаемъ прорѣзъ чрезъ оба листа по линіямъ $\overline{a_1 a_2}$ и $\overline{\infty a_0}$. Въ каждой точкѣ такого прорѣза въ верхнемъ листѣ на правой сторонѣ $\sqrt{R(x)}$ будетъ имѣть по сказанному выше тоже значеніе, какъ въ соотвѣтственной точкѣ лѣвой стороны нижняго листа, и на оборотъ: въ каждой точкѣ прорѣза съ лѣвой стороны въ верхнемъ листѣ такое же значеніе, какъ въ соотвѣтственной точкѣ съ правой стороны прорѣза въ нижнемъ листѣ. На этомъ основаніи мы скрѣпляемъ теперь правый край верхняго листа съ лѣвымъ краемъ нижняго листа, и лѣвый край верхняго листа съ правымъ краемъ нижняго: тогда на всемъ протяженіи линій $\overline{\infty a_0}$ и $\overline{a_1 a_2}$ между обоими листами установится переходъ на крестъ (для наблюдателя, смотрящаго вдоль этихъ линій). Если x изъ x_0 въ одномъ изъ листовъ будетъ двигаться по линіи, идущей между a_0 и a_1, или a_2 и $-\infty$, то онъ будетъ оставаться въ томъ же листѣ; но если онъ будетъ двигаться по линіи, пересѣкающей одну изъ линій $\overline{\infty a_0}$ и $\overline{a_1 a_2}$, то всякій разъ при переходѣ чрезъ эти линіи онъ будетъ переходить въ другой листъ. На этомъ основаніи линіи $\overline{\infty a_0}$ и $\overline{a_1 a_2}$ называются *переходными линіями*.

Если x опишетъ сомкнутую кривую около которой нибудь изъ точекъ a_0, a_1, a_2, напримѣръ a_i, такъ что аргументъ $x - a_i$ получитъ приращеніе 2π, то x окажется въ другомъ листѣ, спустившись (или поднявшись) какъ бы по винтовой поверхности; на этомъ основаніи точки a_0, a_1, a_2, называются *винтовыми точками* построенной нами двулиственной поверхности; чтобы вернуться въ исходную точку (того же листа), x долженъ два раза окружить винтовую точку a_i — такъ что аргументъ $x - a_i$ увеличится на 4π. Винтовыя точки называютъ также и *точками развѣтвленія* функціи $\sqrt{R(x)}$, ибо въ каждой изъ нихъ, удаляясь отъ нихъ, мы получимъ двѣ системы значеній $\sqrt{R(x)}$, называемыхъ

каждая *вѣтвью функціи*. Ясно, что на только что описанной двулиственной поверхности съ переходными изъ одного листа въ другой линіями $\overline{\infty a_0}$ и $\overline{a_1 a_2}$ функція $\sqrt{R(x)}$ будетъ однозначна, если въ верхнемъ листѣ въ x_0 прикрѣпимъ значеніе $+\sqrt{R(x_0)}$, въ нижнемъ $-\sqrt{R(x_0)}$; такъ что проведя по этой поверхности линію, пересѣкающую или непересѣкающую переходныя линіи, мы укажемъ съ полною опредѣленностью, какія изъ всей системы значеній $\sqrt{R(x)}$ мы желаемъ выбрать; поэтому и интегралъ, взятый по такой кривой, будетъ вполнѣ опредѣленная величина. Только-что описанная поверхность, состоящая изъ двухъ листовъ съ переходными изъ одного въ другой линіями $\overline{\infty a_0}$ и $\overline{a_1 a_2}$, на которой $\sqrt{R(x)}$, а слѣдовательно и всякая раціональная функція x и $\sqrt{R(x)}$, есть однозначная функція x, по имени придумавшаго такія поверхности германскаго ученаго *Римана* называется *Римановой двулиственной поверхностью для* $\sqrt{R(x)}$.

28. Вообразимъ теперь Нейманову сферу, состоящую изъ двухъ совпадающихъ сферъ, и установивъ соотвѣтствіе между нижнимъ листомъ Римановой поверхности и внутреннею сферой, и верхнимъ листомъ ея и внѣшнею сферою (какъ было указано во введеніи), мы сдѣлаемъ по линіямъ $\overline{\alpha_1 \alpha_2}$ и $\overline{O'\alpha_0}$, отвѣчающимъ линіямъ $\overline{a_1 a_2}$ и $\overline{\infty a_0}$, прорѣзы въ обоихъ листахъ, а затѣмъ края прорѣзовъ соединимъ вновь накрестъ, какъ то было сдѣлано съ плоскостями; тогда мы получимъ *двулиственную сферическую Риманову поверхность для* $\sqrt{R(x)}$, или, короче, *Риманову сферу для* $\sqrt{R(x)}$, (какъ назвалъ ее Нейманъ), на которой, слѣдовательно, $\sqrt{R(x)}$ и всякая раціональная функція отъ x и $\sqrt{R(x)}$ будетъ однозначная функція x. Эта сфера представляетъ такое-же преобразованіе двулиственной Римановой поверхности при помощи взаимныхъ радіусовъ векторовъ, какъ обыкновенная Нейманова сфера преобразованіе обыкновенной плоскости. На Римановой сферѣ имѣются четыре винтовыя точки: $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$, и O', и двѣ переходныя линіи: $\alpha_1 \alpha_2$ и $\alpha_0 O'$.

29. Простая Нейманова сфера есть *односвязная поверхность*: всякая сомкнутая кривая, нигдѣ себя не пересѣкающая и нигдѣ къ себѣ некасающаяся, раздѣляетъ сферу на двѣ части, между которыми нѣтъ иного сообщенія, какъ только чрезъ эту линію; Риманова же сфера, только что описанная, будетъ *трехсвязная* поверхность, ибо на ней можно провести одну сомкнутую кривую, не мѣшающую сообщенію раздѣленныхъ ею частей поверхности *). Въ самомъ дѣлѣ, окружимъ въ верхнемъ

*) Вообще поверхность называется $2n+1$-*связною*, если по ней можно провести заразъ не болѣе n сомкнутыхъ кривыхъ, не устанавливающихъ полнаго разобщенія между прилегающими къ нимъ съ обѣихъ сторонъ частями поверхности. Такъ *кольце-*

листѣ Римановой сферы точки α_1 и α_2 (или въ верхнемъ листѣ Римановой поверхности точки a_1 и a_2) сомкнутою кривою (A), описаннаго сейчасъ характера; съ одной стороны такой кривой можно перейти на другую, не пересѣкая этой кривой: для этого стоитъ только (если слѣва желаемъ перейти на право) спуститься чрезъ переходную линію $\overline{\alpha_1\alpha_2}$ (въ плоскости чрезъ $\overline{a_1a_2}$) въ нижній листъ, перейти по нему къ какую либо точку переходной линіи $O'\alpha'_0$ (или $\overline{\infty a_0}$), и тутъ перейти въ верхній листъ, и по нему можно будетъ подойти съ другой стороны кривой (A) къ любой его точкѣ, напримѣръ къ лежащей на этой сторонѣ противъ исходной. Послѣдній путь, пройденный въ указанномъ направленіи, назовемъ путь (B). Первому также присвоимъ опредѣленное направленіе, именно то, по которому идя, будемъ имѣть точки α_1 и α_2 слѣва отъ себя; такое направленіи пути (A) будемъ называть *положительнымъ* направленіемъ его; положительное направленіе пути (B) есть только-что описанное: идя по пути (B) въ этомъ направленіи, будемъ имѣть слѣва отъ себя окружаемыя имъ винтовыя точки a_0 и a_1. Первый путь — (A) окружаетъ точки a_1 и a_2, оставаясь въ верхнемъ листѣ; второй путь — (B) окружаетъ точки a_0 и a_1, идя сперва въ одномъ листѣ, потомъ переходя въ другой и затѣмъ возвращаясь чрезъ переходную линію $\overline{\infty a_0}$ опять въ первый. Итакъ дѣйствительно по Римановой поверхности, сферической или плоской, можно провести путь (A), не разобщающій части поверхности, прилегающія къ обѣимъ сторонамъ его, и потому Риманова поверхность будетъ многосвязная поверхность. Она будетъ *трехсвязная*, если по проведеніи сомкнутаго сѣченія какъ (A), можно провести только одно *поперечное* сѣченіе, не раздѣляющее ее на отдѣльныя части, но превращающее ее въ такую поверхность съ однимъ цѣльнымъ контуромъ, изъ каждой точки которой можно перейти въ любую другую точку, не переходя ни чрезъ сомкнутое сѣченіе (A) ни другое, поперечное, слѣдовательно въ *односвязную*. Но таково именно будетъ сѣченіе по пути (B): оно поперечное, ибо соединяетъ двѣ точки краевъ той поверхности, въ которую преобразуется Риманова поверхность сѣченіемъ по сомкнутой кривой (A). Это поперечное сѣченіе (B), своими обоими краями [сторонами пути (B)] вмѣстѣ съ обоими краями сомкнутаго сѣченія (A) образуетъ одну *цѣльную* границу полученной поверхности. Дѣйствительно, исходя

вая поверхность будетъ *трехъ-связная*, ибо можно провести только одну сомкнутую кривую, напримѣръ меридіанъ, не разобщающую окончательно части поверхности, прилегающія къ краямъ ея, тогда какъ вторая такая кривая, напримѣръ другой меридіанъ, уже установитъ полное разобщеніе.

изъ узла обоихъ сѣченій и идя по лѣвому краю сѣченія (A) въ положительномъ направленіи, мы перейдемъ съ правой стороны пути (B) на лѣвую; идя далѣе по пути (B) въ положительномъ направленіи по этой лѣвой сторонѣ его, мы придемъ на правую сторону пути (A) въ узелъ: оттуда идя въ отрицательномъ направленіи по этой правой сторонѣ пути (A) придемъ опять на правую сторону пути (B) въ узелъ; откуда идя въ отрицательномъ направленіи по правой сторонѣ пути (B), придемъ опять въ исходную точку въ узлѣ, на лѣвой сторонѣ пути (A) и правой (B). Итакъ дѣйствительно можно полученный край поверхности обойти, непрерывно идя въ одномъ все направленіи; слѣдовательно онъ есть *цѣльный*. Любыя двѣ точки Римановой поверхности можно теперь соединить съ какими-либо точками той или другой стороны либо пути (A), либо пути (B), и такимъ образомъ по полученной непрерывной линіи, состоящей изъ этихъ линій и частей путей (A) и (B), перейти изъ одной точки въ другую. Итакъ дѣйствительно, система сѣченій (A) и (B) превращаетъ Риманову поверхность въ поверхность съ однимъ цѣльнымъ контуромъ, изъ каждой точки которой можно перейти во всякую другую, слѣдовательно въ *односвязную* поверхность. Но какъ для превращенія Римановой поверхности въ односвязную поверхность потребовалось одно поперечное сѣченіе (B), послѣ сомкнутаго сѣченія (A), то Риманова поверхность для $\sqrt{R(x)}$, гдѣ $R(x)$ полиномъ третьей степени, есть *трехсвязная поверхность*. Риманъ свою поверхность въ первоначальномъ ея видѣ обозначаетъ чрезъ T; послѣ же преобразованія въ односвязную сѣченіями по путямъ (A) и (B) чрезъ T'. Примѣняя теорему *Коши* къ интеграламъ, взятымъ по кривымъ, начерченнымъ на Римановой поверхности онъ получаетъ интересныя и важныя для нашей теоріи предложенія касательно эллиптическихъ интеграловъ; эти предложенія получатся у насъ сами собою (по Вейерштрассу) изъ слѣдующихъ разсматриваній.

30. Вернувшись къ тождеству (6) § 10, представимъ его въ такомъ видѣ:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sqrt{R(x)}+\sqrt{R(a)}}{a-x}\,\frac{1}{2\sqrt{R(a)}}\right)-\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\sqrt{R(x)}+\sqrt{R(a)}}{x-a}\,\frac{1}{2\sqrt{R(x)}}\right)=\\&\qquad=\frac{1}{2\sqrt{R(x)}}\,\frac{A(a-c)}{2\sqrt{R(a)}}-\frac{A(x-c)}{2\sqrt{R(x)}}\,\frac{1}{2\sqrt{R(a)}}\,;\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

помноживъ его на da, возьмемъ интегралъ одинъ разъ по кривой (A) въ положительномъ направленіи, другой разъ по кривой (B) въ такомъ же направленіи; мы будемъ имѣть такія два равенства:

*

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{(A)}\frac{\sqrt{R(x)}+\sqrt{R(a)}}{a-x}\,\frac{da}{2\sqrt{R(a)}}\right)=\\&=\frac{1}{2\sqrt{R(x)}}\int_{(A)}\frac{A(a-c)da}{2\sqrt{R(a)}}-\frac{A(x-c)}{2\sqrt{R(x)}}\int_{(A)}\frac{da}{2\sqrt{R(a)}};\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{(B)}\frac{\sqrt{R(x)}+\sqrt{R(a)}}{a-x}\,\frac{da}{2\sqrt{R(a)}}\right)=\\&=\frac{1}{2\sqrt{R(x)}}\int_{(B)}\frac{A(a-c)da}{2\sqrt{R(a)}}-\frac{A(x-c)}{2\sqrt{R(x)}}\int_{(B)}\frac{da}{2\sqrt{R(a)}};\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

[ибо интегралы отъ второго члена лѣвой части по кривымъ (A) и (B) будутъ нули, такъ какъ функція a:

$$\frac{\sqrt{R(x)}+\sqrt{R(a)}}{x-a}\,\frac{1}{2\sqrt{R(x)}},\qquad(4)$$

которой производная по a входитъ въ этотъ членъ, принимаетъ прежнее значеніе, когда a опишетъ или путь (A), или путь (B), ибо эти пути приводятъ въ туже точку Римановой поверхности, на которой эта функція (4) однозначна]. Первыя части этихъ равенствъ содержатъ производныя по x отъ такихъ функцій этой перемѣнной:

$$\Omega(x)=\int_{(A)}\frac{\sqrt{R(x)}+\sqrt{R(a)}}{a-x}\,\frac{da}{2\sqrt{R(a)}}+C;\qquad(5)$$

$$\Omega_1(x)=\int_{(B)}\frac{\sqrt{R(x)}+\sqrt{R(a)}}{a-x}\,\frac{da}{2\sqrt{R(a)}}+C_1.\qquad(6)$$

Чрезъ эти функціи можно выразить интегралы перваго и второго рода. Дѣйствительно, помножая (2) и (3) на dx и интегрируя отъ x_0, мы получимъ, имѣя въ виду (5) и (6), и полагая

$$\Omega(x)-\Omega(x_0)=\Omega(x,x_0),\qquad(7)$$

$$\Omega_1(x)-\Omega_1(x_0)=\Omega_1(x,x_0),\qquad(8)$$

слѣдующія равенства:

$$\Omega(x, x_0) = 2\eta \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} - 2\omega \int_{x_0}^{x} \frac{A(x-c)dx}{2\sqrt{R(x)}}; \tag{9}$$

$$\Omega_1(x, x_0) = 2\eta_1 \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} - 2\omega_1 \int_{x_0}^{x} \frac{A(x-c)dx}{2\sqrt{R(x)}}, \tag{10}$$

гдѣ положено для краткости:

$$\int_{(A)} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} = 2\omega; \qquad \int_{(B)} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} = 2\omega_1; \tag{11}$$

$$\int_{(A)} \frac{A(x-c)dx}{2\sqrt{R(x)}} = 2\eta; \qquad \int_{(B)} \frac{A(x-c)dx}{2\sqrt{R(x)}} = 2\eta_1. \tag{12}$$

Рѣшая (9) и (10) по интеграламъ:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} \quad \text{и} \quad \int_{x_0}^{x} \frac{A(x-c)dx}{2\sqrt{R(x)}}, \tag{13}$$

мы получимъ ихъ выраженія чрезъ функціи:

$$\Omega(x, x_0) \quad \text{и} \quad \Omega_1(x, x_0). \tag{14}$$

31. Изслѣдуемъ сперва эти постоянныя (11) и (12). Пути интегрированія (A) и (B), съ помощію которыхъ мы ихъ опредѣлили, могутъ быть стянуты, не измѣняя величины интеграловъ, въ линіи, плотно прилегающія съ обѣихъ сторонъ соотвѣтственно къ линіямъ $\overline{a_1 a_2}$ и $\overline{a_0 a_1}$: дѣйствительно, между этими линіями и первоначальными (A) и (B) соотвѣтственно производныя интеграловъ перваго и второго рода перваго типа остаются однозначны, конечны и непрерывны, и кромѣ того интегралы остаются конечными и въ самихъ точкахъ a_0, a_1, a_2, какъ мы видѣли въ предыдущей главѣ. Когда путь (A) стянется въ линію плотно прилегающую къ линіи $\overline{a_1 a_2}$ съ обѣихъ сторонъ, тогда интегралъ сведется къ интегралу отъ a_1 до a_2 въ положительномъ направленіи по правой сторонѣ этой линіи и затѣмъ къ интегралу въ обратномъ направленіи отъ a_2 къ a_1 по лѣвой сторонѣ той же линіи; но какъ по лѣвой сторонѣ линіи $\overline{a_1 a_2}$ функція $\sqrt{R(x)}$ имѣетъ знакъ противный знаку ея по правой сторонѣ, то интегралъ взятый по этой второй, обратной, половинѣ пути, будетъ равенъ интегралу по первой половинѣ пути по правой сторонѣ линіи $\overline{a_1 a_2}$, и потому будетъ:

$$2\omega = \int_{(A)} \frac{da}{2\sqrt{R(a)}} = \int_{a_1}^{a_2} \frac{da}{2\sqrt{R(a)}} - \int_{a_2}^{a_1} \frac{da}{2\sqrt{R(a)}} = 2\int_{a_1}^{a_2} \frac{da}{2\sqrt{R(a)}},$$

(гдѣ корень взятъ со знакомъ его на правой сторонѣ), откуда

$$\omega = \int_{a_1}^{a_2} \frac{da}{2\sqrt{R(a)}}, \tag{1}$$

и точно также

$$\eta = \int_{a_1}^{a_2} \frac{A(a-c)da}{2\sqrt{R(a)}}. \tag{2}$$

Интегралъ по пути (B) стянется въ интегралъ по прямой отъ a_0 до a_1 въ верхнемъ листѣ и затѣмъ интегралъ въ обратномъ направленіи по линіи $\overline{a_0 a_1}$, слѣдовательно отъ a_1 къ a_0, но уже въ нижнемъ листѣ; тамъ значенія $\sqrt{R(x)}$ будутъ противоположны значеніямъ его въ верхнемъ листѣ; потому интегралъ по второй части пути (т. е. въ нижнемъ листѣ) будетъ равенъ интегралу по первой части пути (въ верхнемъ листѣ). Такимъ образомъ будетъ:

$$2\omega_1 = \int_{(B)} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} = \int_{a_0}^{a_1} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} - \int_{a_1}^{a_0} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} = 2\int_{a_0}^{a_1} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}},$$

[гдѣ $\sqrt{R(x)}$ взятъ со знакомъ его въ верхнемъ листѣ], откуда получимъ:

$$\omega_1 = \int_{a_0}^{a_1} \frac{da}{2\sqrt{R(a)}}. \tag{3}$$

Точно также найдемъ:

$$\eta_1 = \int_{a_0}^{a_1} \frac{A(a-c)da}{2\sqrt{R(a)}}. \tag{4}$$

32. Опредѣленные интегралы, выражающіе ω и ω_1 [формулы (1) и (3) пред. §], могутъ быть преобразованы въ другіе при помощи подстановки (3) § 9, именно:

$$x - a_i = \frac{(a_i - a_j)(a_i - a_k)}{y - a_i}. \tag{1}$$

Въ силу этой подстановки значеніямъ x:

$$a_i,\quad a_j,\quad a_k,\quad \infty \tag{2}$$

отвѣчаютъ, какъ легко видѣть, такія значенія y:

$$\infty,\quad a_k,\quad a_j,\quad a_i; \tag{3}$$

кромѣ того интеграндъ перваго рода сохраняетъ свой видъ, перемѣняя лишь знакъ, [см. (10) § 9]; потому будетъ:

$$\int_{a_j}^{a_i}\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}=-\int_{a_k}^{\infty}\frac{dy}{2\sqrt{R(y)}}, \tag{4}$$

или

$$\int_{a_i}^{a_j}\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}=\int_{a_k}^{\infty}\frac{dy}{2\sqrt{R(y)}}; \tag{5}$$

принимая здѣсь одинъ разъ $i=1$, $j=2$, слѣдовательно $k=0$, другой разъ $i=1$, $j=0$, слѣдовательно $k=2$, получимъ:

$$\omega=\int_{a_1}^{a_2}\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}=\int_{a_0}^{\infty}\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}; \tag{6}$$

и

$$-\omega_1=\int_{a_1}^{a_0}\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}=\int_{a_2}^{\infty}\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}=\omega', \tag{7}$$

гдѣ пути интегрированія отъ указанныхъ точекъ идутъ въ верхнемъ листѣ по пути не проходящему чрезъ прочія точки развѣтвленія.

[Таже подстановка интеграндъ второго рода перваго типа преобразуетъ въ такой:

$$\frac{A(x-a_i)dx}{2\sqrt{R(x)}}=-\frac{R'(a_i)}{y-a_i}\frac{dy}{2\sqrt{R(y)}}, \tag{8}$$

и, слѣдовательно, болѣе общій такимъ образомъ:

$$\frac{A(x-c)dx}{2\sqrt{R(x)}}=-\left\{\frac{R'(a_i)}{y-a_i}+(c-a_i)\right\}\frac{dy}{2\sqrt{R(y)}}; \tag{9}$$

потому будетъ

$$\int_{a_i}^{a_j}\frac{A(x-c)dx}{2\sqrt{R(x)}}=\int_{a_k}^{\infty}\left\{\frac{R'(a_i)}{y-a_i}+(c-a_i)\right\}\frac{dy}{2\sqrt{R(y)}}, \tag{10}$$

откуда, точно также какъ и выше, получимъ:

$$\eta=\int_{a_1}^{a_2}\frac{A(x-c)dx}{2\sqrt{R(x)}}=\int_{a_0}^{\infty}\left\{\frac{R'(a_1)}{y-a_1}+(c-a_1)\right\}\frac{dy}{2\sqrt{R(y)}}, \tag{11}$$

$$-\eta_1=\int_{a_1}^{a_0}\frac{A(x-c)dx}{2\sqrt{R(x)}}=\int_{a_2}^{\infty}\left\{\frac{R'(a_1)}{y-a_1}+(c-a_1)\right\}\frac{dy}{2\sqrt{R(y)}}=\eta'; \tag{12}$$

пути интегрированія тѣже].

33. Выводъ нашъ относительно интеграловъ перваго рода ω и ω_1 можно получить и такимъ образомъ: окружимъ всѣ четыре точки α_2, $\alpha_1, \alpha_0, O'(\equiv\infty)$ Римановой сферы сомкнутою кривою въ верхнемъ листѣ; такую кривую можно на сферѣ стянуть въ одну точку, не переходя чрезъ точки развѣтвленія; потому интегралъ по такой кривой равенъ нулю; съ другой стороны такая кривая можетъ быть такъ стянута, что она будетъ плотно прилегать съ обѣихъ сторонъ къ линіи $\overline{O'\alpha_0\alpha_1\alpha_2}$; вслѣдствіе этого каждая часть этой линіи отъ одной винтовой точки до другой будетъ проходиться два раза, но по противоположнымъ направленіямъ; такъ какъ по обѣ стороны линій $\overline{O'\alpha_0}$ и $\overline{\alpha_1\alpha_2}$ въ верхнемъ листѣ $\sqrt{R(x)}$ имѣетъ противоположныя значенія, то интегралы по этимъ частямъ сведутся, какъ было выше объяснено, къ два раза взятымъ интеграламъ отъ O' до α_0, и отъ α_1 до α_2; интегралы же по линіи $\overline{\alpha_1\alpha_2}$ сократятся, ибо $\sqrt{R(x)}$ по обѣ стороны этой линіи имѣетъ одинаковый знакъ, а эта линія проходится, какъ и тѣ, разъ въ одномъ направленіи, другой въ противоположномъ. Итакъ переходя съ Римановой сферы на плоскость, будемъ имѣть:

$$2\int_{\infty}^{a_0}\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}+2\int_{a_1}^{a_2}\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}=0, \tag{1}$$

откуда получится:

$$\int_{a_1}^{a_2}\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}=\omega=\int_{a_0}^{\infty}\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}. \tag{2}$$

Для вывода формулы (7) нужно нашу сомкнутую кривую, способную быть стянутою въ верхнемъ листѣ Римановой сферы въ одну точку, такъ провести, чтобы она окружала точки въ такомъ порядкѣ: $\alpha_0\alpha_1\alpha_2 O'$. Тогда сократится часть интеграла зависящая отъ части $\alpha_1\alpha_2$ всего пути: въ самомъ дѣлѣ, обратная половина пути отъ O' къ α_2 будетъ лежать въ нижнемъ листѣ, равно какъ и отъ α_2 къ α_1, и отъ α_1 къ α_0; но на линіи $\alpha_1\alpha_2$ съ лѣвой стороны въ нижнемъ листѣ значенія $\sqrt{R(x)}$ одинаковы со значеніями его на правой сторонѣ верхняго листа, проходится же этотъ отрѣзокъ въ обратномъ направленіи; по другимъ же частямъ пути, также проходимымъ въ разныхъ листахъ по противоположнымъ направленіямъ, и значенія $\sqrt{R(x)}$ будутъ противоположны; оттого соотвѣтственные интегралы удвоятся, и мы будемъ имѣть, переходя съ Римановой сферы на плоскость:

$$2\int_{\alpha_2}^{\infty}\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}+2\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}=0\,, \tag{3}$$

откуда найдемъ:

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}=\omega_1=-\int_{\alpha_2}^{\infty}\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}=-\,\omega'. \tag{4}$$

Можно получить по этому способу еще значеніе интеграла

$$\int_{\alpha_1}^{\infty}\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}\,, \tag{5}$$

взятаго также въ верхнемъ листѣ, какъ и предыдущіе, по пути, не встрѣчающему прочихъ точекъ развѣтвленія. Для этого туже сомкнутую кривую, способную въ верхнемъ листѣ Римановой сферы быть стянутой въ одну точку, слѣдуетъ повести такимъ образомъ: изъ α_1 въ O'; вокругъ ея въ нижній листъ: тамъ поведемъ справа отъ линіи $O'\alpha_0\alpha_1$ къ точкѣ α_1; оттуда назадъ вокругъ α_0 въ верхній листъ, въ которомъ поведемъ вокругъ α_2 къ α_1. Интегралъ разобьется на такія части:

$$\underset{\text{в.}}{\int_{\alpha_1}^{O'}}+\underset{\text{н.}}{\int_{O'}^{\alpha_1}}+\underset{\text{н.}}{\int_{\alpha_1}^{\alpha_0}}+\underset{\text{в.}}{\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}}+\underset{\text{в.л.}}{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}}+\underset{\text{в.п.}}{\int_{\alpha_2}^{\alpha_1}}=0\,; \tag{6}$$

здѣсь *в.* обозначаетъ верхній листъ; *н.* нижній; *в.л.* верхній листъ лѣвую сторону линіи $\overrightarrow{\alpha_1\alpha_2}$, *в.п.* верхній листъ правую сторону той же линіи. Легко видѣть, что будетъ:

$$\underset{н.}{\int_{O'}^{\alpha_1}} = \underset{в.}{\int_{\alpha_1}^{O'}}; \quad \underset{н.}{\int_{\alpha_1}^{\alpha_0}} = \underset{в.}{\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}} = -\underset{в.}{\int_{\alpha_1}^{\alpha_0}}; \quad \underset{в.л.}{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}} = \underset{в.п.}{\int_{\alpha_2}^{\alpha_1}} = -\underset{в.п.}{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}}; \tag{7}$$

на основанiи этого изъ (6) по раздѣленiи на 2 будемъ имѣть (переходя также со сферы на плоскость):

$$\int_{a_1}^{\infty} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} = \int_{a_1}^{a_0} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} + \int_{a_1}^{a_2} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}, \tag{8}$$

или, полагая еще

$$\int_{a_1}^{\infty} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} = \omega'', \tag{9}$$

и имѣя въ виду (2) и (4) этого §:

$$\omega'' = \omega + \omega'. \tag{10}$$

Для интеграловъ второго рода введемъ тоже величину η'', которую опредѣлимъ посредствомъ равенства:

$$\eta'' = \eta + \eta'. \tag{11}$$

34. Переходимъ теперь къ разсмотрѣнiю функцiй $\Omega(x, x_0)$ и $\Omega_1(x, x_0)$. Эти функцiи суть частные случаи болѣе общихъ $\Omega(x)$ и $\Omega_1(x)$, изъ которыхъ получаются, если мы C и C_1 въ (5) и (6) § 30 опредѣлимъ такъ, чтобы онѣ обращались въ нуль при $x = x_0$. Эти болѣе общiя функцiи, какъ видно изъ (2) и (3) § 30, имѣютъ алгебраическiя производныя, однозначныя и непрерывныя на Римановой поверхности за исключенiемъ всѣхъ четырехъ винтовыхъ точекъ, гдѣ онѣ обращаются алгебраически въ безконечность; но только эти алгебраическiя функцiи имѣютъ трансцендентные коэффицiенты ω и η, ω_1 и η_1. Свойства функцiи $\Omega_1(x)$, очевидно, аналогичны свойствамъ функцiи $\Omega(x)$, а потому достаточно разсмотрѣть свойства этой послѣдней. Очевидно, что $\Omega(x)$ есть конечная, однозначная и непрерывная функцiя x на Римановой поверхности, пока x не переходитъ линiи (A): когда онъ вступаетъ на эту линiю, то опредѣленiе функцiи интеграломъ теряетъ смыслъ, ибо интеграндъ обращается въ этомъ случаѣ въ ∞^1; въ этомъ случаѣ, чтобы интегралъ получилъ смыслъ, нужно нѣсколько измѣнить видъ кривой (A), заставляя ее миновать такое положенiе x, напримѣръ по полукругу, описанному изъ этого положенiя x какъ центра достаточно-ма-

лымъ радіусомъ; въ такомъ случаѣ опредѣленіе функціи интеграломъ опять станетъ возможно, но только результаты получатся различные, смотря по тому, какъ будетъ описана эта полуокружность: такъ ли, что x останется внутри кривой (A), или перейдетъ во внѣшнее пространство; въ послѣднемъ случаѣ значеніе интеграла будетъ на $2\pi i$ менѣе чѣмъ въ первомъ. Дѣйствительно, первый путь сводится ко второму плюсъ описанная въ положительномъ направленіи цѣлая окружность вокругъ разсматриваемаго положенія x какъ центра; но какъ интеграндъ обращается при $a=x$ въ безконечность какъ $\dfrac{1}{a-x}$ при $a=x$, то интегралъ по этому кругу будетъ $=2\pi i$, а отсюда и слѣдуетъ сказанное. Итакъ линія (A) для нашей функціи $\Omega(x)$ есть линія разрыва (coupure), при переходѣ x чрезъ которую функція получаетъ приращеніе $\mp 2\pi i$, смотря потому, переходитъ ли x чрезъ эту линію извнутри ея наружу, или снаружи внутрь. Такъ какъ на Римановой поверхности x можетъ сколько угодно разъ попадать внутрь линіи (A), не переходя ея, то мы видимъ отсюда, что функція $\Omega(x)$ въ каждой точкѣ Римановой поверхности имѣетъ безчисленное множество конечныхъ значеній разнящихся между собою на кратное $2\pi i$, т. е. на

$$k.2\pi i,$$

гдѣ k какое угодно цѣлое число, положительное или отрицательное. При $x=\infty$ функція $\Omega(x)$ обращается въ безконечность какъ $\sqrt{x}$, помноженный на нѣкоторую постоянную. Дѣйствительно, полагая въ (5) § 30 $x=\dfrac{1}{t^2}$, мы будемъ имѣть:

$$\Omega\left(\frac{1}{t^2}\right)=\int_{(A)}\frac{t^3\sqrt{R(a)}+\sqrt{t^6R\left(\frac{1}{t^2}\right)}}{t(t^2a-1)}\,\frac{da}{2\sqrt{R(a)}}\,; \tag{1}$$

если по умноженіи всего на t, положить $t=0$, то мы получимъ:

$$\text{пред.}\, t\Omega\left(\frac{1}{t^2}\right)\bigg|_{t=0}=-\sqrt{A}\int_{(A)}\frac{da}{2\sqrt{R(a)}}=-\sqrt{A}\,2\omega\,; \tag{2}$$

пока t не достигнетъ нуля, будетъ

$$t\Omega\left(\frac{1}{t^2}\right)=-\sqrt{A}\,2\omega+\varepsilon\,, \tag{3}$$

гдѣ ε безконечно-мало при безконечно-маломъ t; дѣля на t будемъ имѣть:

$$\Omega\left(\frac{1}{t^2}\right) = -\sqrt{A}\, 2\omega \frac{1}{t} + \frac{\varepsilon}{t}, \tag{4}$$

или, вводя опять x:

$$\Omega(x) = -\sqrt{A}\, 2\omega \sqrt{x} + \varepsilon\sqrt{x}, \tag{5}$$

[гдѣ въ виду безконечной малости ε, первый членъ будетъ преобладающимъ]. Это ε имѣетъ вообще такой видъ:

$$\varepsilon = t\mathfrak{P}(t^2), \tag{6}$$

гдѣ $\mathfrak{P}(t^2)$ рядъ, расположенный по положительнымъ степенямъ t^2. Функція $\Omega_1(x)$ будетъ отъ функціи $\Omega(x)$ отличаться только тѣмъ, что для нея линія (B) будетъ линіей разрыва, при переходѣ чрезъ которую значеніе функціи будетъ вдругъ измѣняться на $\mp 2\pi i$, смотря потому, будетъ-ли x переходить линію (B) извнутри наружу, или снаружи внутрь.

35. Вводя функціи $\Omega(x)$ и $\Omega_1(x)$ въ равенства (2) и (3) § 30, мы будемъ имѣть:

$$\frac{d\Omega(x)}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{R(x)}}\int_{(A)} \frac{A(a-c)da}{2\sqrt{R(x)}} - \frac{A(x-c)}{2\sqrt{R(x)}}\int_{(A)} \frac{da}{2\sqrt{R(a)}}; \tag{1}$$

$$\frac{d\Omega_1(x)}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{R(x)}}\int_{(B)} \frac{A(a-c)da}{2\sqrt{R(a)}} - \frac{A(x-c)}{2\sqrt{R(x)}}\int_{(B)} \frac{da}{2\sqrt{R(a)}}; \tag{2}$$

помножимъ первое на dx и проинтегрируемъ по пути (B) въ положительномъ направленіи начиная съ узла; налѣво мы получимъ:

$$\Omega(x)_r - \Omega(x)_l = -2\pi i, \tag{3}$$

[обозначая чрезъ приписку l и r значенія функціи $\Omega(x)$ соотвѣтственно по лѣвую и правую сторону пути (A)], такъ какъ значеніе $\Omega(x)$ по лѣвую сторону (A) болѣе на $2\pi i$ чѣмъ по правую, какъ мы только что видѣли, интегрированіе же начинается на лѣвой сторонѣ и кончается на правой; на право-же—опредѣлитель изъ интеграловъ перваго и второго рода по путямъ (A) и (B); такъ что, вводя ихъ обозначенія изъ (1), (2), (3) и (4) § 31, мы будемъ имѣть такое равенство:

$$-2\pi i = 2\omega_1 \cdot 2\eta - 2\omega \cdot 2\eta_1. \tag{4}$$

Тоже равенство (помноженное на -1) получимъ, помножая (2) на dx и интегрируя по пути (A). Если въ (4) ввести вмѣсто ω_1 и η_1 величины $\omega' = -\omega_1$ и $\eta' = -\eta_1$, то это равенство (по умноженіи на -1) такъ напишется:

$$2\eta \cdot 2\omega' - 2\omega \cdot 2\eta' = 2\pi i, \tag{5}$$

или, раздѣляя обѣ части на 2^2:

$$\eta\omega' - \omega\eta' = \frac{\pi}{2} i. \tag{6}$$

36. Рѣшая (9) и (10) § 31 по интеграламъ перваго и второго рода, на основаніи (4) пред. § будемъ имѣть:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} = \frac{1}{2\pi i}\left\{2\omega\Omega_1(x, x_0) - 2\omega_1\Omega(x, x_0)\right\}; \tag{1}$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{A(x-c)dx}{2\sqrt{R(x)}} = \frac{1}{2\pi i}\left\{2\eta\Omega_1(x, x_0) - 2\eta_1\Omega(x, x_0)\right\}. \tag{2}$$

Отсюда, изъ этихъ выраженій интеграловъ перваго и второго рода чрезъ $\Omega(x, x_0)$ и $\Omega_1(x, x_0)$, легко вывести періодичность этихъ интеграловъ. Если заставимъ x описать сомкнутый путь (A) въ положительномъ направленіи, то функція $\Omega(x, x_0)$ вернется къ своему прежнему значенію, тогда какъ значеніе функціи $\Omega_1(x, x_0)$ получитъ приращеніе $+2\pi i$ [ибо x перейдетъ съ внѣшней стороны линіи (B) на внутреннюю]; вслѣдствіе этого правыя части равенствъ (1) и (2), а слѣдовательно и лѣвыя, т. е. *интегралы перваго* и *второго рода* получатъ соотвѣтственно приращенія:

$$2\omega \quad \text{и} \quad 2\eta; \tag{3}$$

[если-же заставимъ x описать путь (A) въ обратномъ направленіи, то $\Omega_1(x, x_0)$ получитъ приращеніе $-2\pi i$ (ибо x перейдетъ извнутри наружу линіи (B)), и оттого приращенія тѣхъ же интеграловъ будутъ соотвѣтственно -2ω и -2η]. Если теперь заставимъ x описать (B) въ положительномъ направленіи, то въ такомъ случаѣ функція $\Omega(x, x_0)$ получитъ приращеніе $-2\pi i$ [ибо x перейдетъ извнутри (A) наружу], тогда какъ $\Omega_1(x, x_0)$ вернется къ прежнему своему значенію; слѣдова-

тельно интегралы перваго и второго рода получатъ соотвѣтственно приращенія:

$$2\omega_1 \quad \text{и} \quad 2\eta_1; \tag{4}$$

[если-же x опишетъ путь (B) въ отрицательномъ направленіи, то приращеніе функціи $\Omega(x, x_0)$ будетъ $+2\pi i$, и слѣдовательно приращенія тѣхъ же интеграловъ будутъ соотвѣтственно $-2\omega_1$ и $-2\eta_1$]. Теперь всякій путь изъ x_0 въ x можетъ быть сведенъ къ одному опредѣленному пути изъ x_0 въ x послѣ обходовъ по путямъ (A) и (B) въ какой либо послѣдовательности, по тому или другому направленію, и, какъ каждый такой обходъ приводитъ для интеграловъ перваго рода къ $\pm 2\omega$ или $\pm 2\omega_1$, для интеграловъ второго рода къ $\pm 2\eta$ или $\pm 2\eta_1$, то всѣ возможныя значенія этихъ интеграловъ отъ x_0 до x по какимъ бы то ни было путямъ приведутся къ интегралу по тому опредѣленному пути (такой интегралъ мы будемъ обозначать знакомъ $\int\big|$), сложенному съ линейной функціей съ цѣлыми коэффиціентами отъ соотвѣтственныхъ періодовъ, такимъ образомъ:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} = \int_{x_0}^{x}\Big| \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} + 2m\omega + 2n\omega_1; \tag{5}$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{A(x-c)dx}{2\sqrt{R(x)}} = \int_{x_0}^{x}\Big| \frac{A(x-c)dx}{2\sqrt{R(x)}} + 2m\eta + 2n\eta_1. \tag{6}$$

Всѣ интегралы второго рода, которые различаются на алгебраическую функцію отъ интеграла второго рода этого типа, слѣдовательно и нормальный [(11) § 12], будутъ имѣть тѣ-же самые періоды, какъ и этотъ, ибо раціональная функція x и $\sqrt{R(x)}$ на Римановой поверхности однозначна, и слѣдовательно по какому бы пути x не вернулся въ туже точку этой поверхности, приметъ по возвращеніи прежнее свое значеніе. Тѣже интегралы второго рода, которые разнятся отъ интеграла второго рода перваго типа на линейную функцію интеграла перваго рода, будутъ имѣть другіе періоды. Между такими интегралами второго рода всегда найдется такой, котораго одинъ періодъ будетъ $=0$. Дѣйствительно, взявъ интегралъ второго рода, въ который вмѣсто постоянной c входитъ постоянная c', будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}\int_{(A)} \frac{A(x-c')dx}{2\sqrt{R(x)}} &= \int_{(A)} \frac{A(x-c)dx}{2\sqrt{R(x)}} + (c-c')\int_{(A)} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} = \\ &= 2\eta + (c-c')2\omega;\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

полагая

$$2\eta + (c - c')2\omega = 0\,, \tag{8}$$

найдемъ отсюда то значеніе c', именно:

$$c' = c + \frac{2\eta}{2\omega}, \tag{9}$$

для котораго первый періодъ интеграла

$$\int_{x_0}^{x} \frac{A(x-c')dx}{2\sqrt{R(x)}} \tag{10}$$

будетъ $=0$:

$$\int_{(A)} \frac{A(x-c')dx}{2\sqrt{R(x)}} = 0. \tag{11}$$

Точно также интегралъ

$$\int_{x_0}^{x} \frac{A(x-c'')dx}{2\sqrt{R(x)}}, \tag{12}$$

гдѣ

$$c'' = c + \frac{2\eta_1}{2\omega_1} = c + \frac{2\eta'}{2\omega'}, \tag{13}$$

будетъ имѣть второй періодъ $=0$:

$$\int_{(B)} \frac{A(x-c'')dx}{2\sqrt{R(x)}} = 0. \tag{14}$$

37. Мы видѣли, что всѣ значенія функціи $\Omega(x)$, [а также и $\Omega_1(x)$] отличаются одно отъ другого на кратное $2\pi i$, такъ что если $\Omega(x)_0$ будетъ обозначать одно какое либо изъ значеній функціи $\Omega(x)$ въ разсматриваемой точкѣ, то всѣ другія ея значенія представятся формулою:

$$\Omega(x) = \Omega(x)_0 + 2k\pi i\,; \tag{1}$$

отсюда слѣдуетъ, что

$$e^{\Omega(x)} = e^{\Omega(x)_0 + 2k\pi i} = e^{\Omega(x)_0}, \tag{2}$$

ибо $e^{2k\pi i} = 1$, т. е. функція

$$E(x) = e^{\Omega(x)} \tag{3}$$

будетъ однозначная на всей Римановой поверхности; кромѣ того—легко видѣть—, что она конечна и непрерывна на всей поверхности за исключеніемъ точки $x = \infty$ (или O' Римановой сферы), которая будетъ для нея *существенно-особенною* точкой (wesentlich-singuläre Stelle), ибо она въ ней можетъ принимать всякое значеніе. Дѣйствительно по (4) и (5) § 34 для x безконечно-большого будетъ:

$$\Omega(x) = -\sqrt{A}\cdot 2\omega\sqrt{x} + \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right), \tag{4}$$

и слѣдовательно для x безконечно-большого:

$$E(x) = e^{\Omega(x)} = e^{-\sqrt{A}\,2\omega\sqrt{x}}\left[C + \frac{1}{x}\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right)\right] \tag{5}$$

[разлагая

$$e^{\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)}$$

въ рядъ по нисходящимъ степенямъ x и обозначая чрезъ C членъ ряда несодержащій x]; благодаря первому множителю второй части этого равенства:

$$e^{-\sqrt{A}\,2\omega\sqrt{x}} \tag{6}$$

функція $E(x) = e^{\Omega(x)}$ при $x = \infty$ можетъ имѣть всякое значеніе, откуда и слѣдуетъ, что $x = \infty$ для этой функціи существенно-особенная точка.

Изложенными свойствами функція $E(x)$ опредѣляется вполнѣ до постояннаго множителя. Въ самомъ дѣлѣ, если $\mathfrak{E}(x)$ обладаетъ тѣми же свойствами, т. е. на всей Римановой поверхности однозначна, конечна и непрерывна, за исключеніемъ $x = \infty$, въ каковой точкѣ она имѣетъ видъ:

$$\mathfrak{E}(x) = e^{-\sqrt{A}\,2\omega\sqrt{x}}\left[K + \frac{1}{x}\mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{x}\right)\right], \tag{7}$$

то частное будетъ и въ этой точкѣ конечное и опредѣленное, именно:

$$\text{пред.}\left.\frac{\mathfrak{E}(x)}{E(x)}\right|_{x=\infty} = \text{пред.}\left.\frac{K + \frac{1}{x}\mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{x}\right)}{C + \frac{1}{x}\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right)}\right|_{x=\infty} = \frac{K}{C}, \tag{8}$$

а потому есть постоянное количество, именно $\frac{K}{C}$, какъ величина на всей Римановой поверхности однозначная, конечная и непрерывная.

Тоже самое будетъ имѣть мѣсто и относительно функціи

$$E_1(x) = e^{\Omega_1(x)}. \tag{9}$$

Изъ числа функцій этого рода слѣдующія двѣ:

$$E(x, x_0) = e^{\Omega(x, x_0)}, \tag{10}$$

и

$$E_1(x, x_0) = e^{\Omega_1(x, x_0)}, \tag{11}$$

[изъ которыхъ первая опредѣляется при помощи пути (A), вторая при помощи (B)] обладаютъ еще свойствомъ обращаться въ единицу при $x = x_0$, какъ то слѣдуетъ изъ (7) и (8) § 30. Изъ (10) и (11) имѣемъ:

$$\Omega\,(x, x_0) = \log E(x, x_0)\,; \tag{12}$$

$$\Omega_1(x, x_0) = \log E(x, x_0)\,; \tag{13}$$

вводя это въ (1) и (2) § 36, будемъ имѣть:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} = \frac{1}{2\pi i}\left\{2\omega \log E_1(x, x_0) - 2\omega_1 \log E(x, x_0)\right\}; \tag{14}$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{A(x-c)dx}{2\sqrt{R(x)}} = \frac{1}{2\pi i}\left\{2\eta \log E_1(x, x_0) - 2\eta_1 \log E(x, x_0)\right\}. \tag{15}$$

Функціи $E(x, x_0)$ и $E_1(x, x_0)$, входящія сюда и опредѣляемыя равенствами (10) и (11), называются по Вейерштрассу *примъ-функціями* перваго рода—прибавимъ мы, ибо сейчасъ увидимъ и другія примъ-функціи. Примъ-функціи перваго рода остаются однозначными, конечными и отличными отъ нуля на всей Римановой поверхности, за исключеніемъ точки O' (гдѣ $x = \infty$), въ которой онѣ принимаютъ всякое значеніе и которая потому для нихъ *существенно-особенная* точка, подобно функціи e^x, которая на всей Неймановой сферѣ однозначна, конечна и непрерывна за исключеніемъ тоже O' $(x = \infty)$, въ которой точкѣ она принимаетъ всякое значеніе и которая слѣдовательно для e^x есть существенно-особенная.

38. Примъ-функцiя *второго рода* войдетъ въ выраженiе интеграла третьяго рода.

Полагая

$$\Omega(x, x_0; a, a_0) = \int_{a_0}^{a} \left\{ \frac{\sqrt{R(x)} + \sqrt{R(a)}}{a - x} - \frac{\sqrt{R(x_0)} + \sqrt{R(a)}}{a - x_0} \right\} \frac{da}{2\sqrt{R(a)}}, \quad (1)$$

мы выраженiю нормальнаго интеграла третьяго рода на основанiи формулы (1) § 14 дадимъ такой видъ:

$$\left. \begin{aligned} &\int_{x_0}^{x} \left\{ \frac{\sqrt{R(x)} + \sqrt{R(a)}}{x - a} - \frac{\sqrt{R(x)} + \sqrt{R(a_0)}}{x - a_0} \right\} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} + \int_{a_0}^{a} \frac{A(a - c)da}{2\sqrt{R(a)}} \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} = \\ &\qquad = \Omega(x, x_0;\ a, a_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{A(x - c)dx}{2\sqrt{R(x)}} \int_{a_0}^{a} \frac{da}{2\sqrt{R(a)}}. \end{aligned} \right\} (2)$$

Входящая сюда, опредѣляемая равенствомъ (1) функцiя

$$\Omega(x, x_0;\ a, a_0) \quad (3)$$

есть функцiя x, конечная и непрерывная на всей Римановой поверхности, пока x не приходитъ въ точки a и a_0, въ которыхъ она обращается въ безконечность соотвѣтственно какъ

$$\log(a - x) \qquad \text{и} \qquad -\log(a_0 - x), \quad (4)$$

(ибо есть ничто иное, какъ интегралъ третьяго рода, разсматриваемый какъ функцiя его параметра). Если же x вступаетъ на линiю интегрированiя между a_0 и a, то опредѣленiе функцiи интеграломъ теряетъ смыслъ, ибо интеграндъ тогда обращается въ ∞^1; для того, чтобы опредѣленiе функцiи интеграломъ сдѣлалось возможнымъ и въ такомъ случаѣ, надобно обойти при интегрированiи разсматриваемое положенiе x по полукругу, описанному изъ него какъ центра достаточно-малымъ радiусомъ; но смотря по тому будетъ ли x послѣ этого лежать справа или слѣва отъ новаго пути интегрированiя, результаты получатся различные: въ первомъ случаѣ результатъ будетъ на $2\pi i$ менѣе, чѣмъ во второмъ. Дѣйствительно, путь, имѣющiй x слѣва отъ себя, можетъ быть преобразованъ въ путь, имѣющiй x справа отъ себя плюсъ полная окружность, описанная вокругъ x какъ центра достаточно-малымъ радiусомъ

въ положительномъ направленіи; но интегралъ по этой окружности будетъ тогда $=2\pi i$, откуда и слѣдуетъ сказанное. Итакъ функція x:

$$\Omega(x, x_0;\ a, a_0) \tag{5}$$

конечна на всей Римановой поверхности за исключеніемъ точекъ a и a_0, гдѣ она обращается логариѳмически въ безконечность [какъ (4)]; вообще непрерывна, но при переходѣ чрезъ линію $\overline{a_0 a}$ претерпѣваетъ вдругъ измѣненіе на $\pm 2\pi i$, смотря по тому, переходитъ-ли x справа на лѣво пути интегрированія или наоборотъ, вслѣдствіе чего имѣетъ въ каждой точкѣ Римановой поверхности безчисленное множество значеній, разнящихся на кратное $2\pi i$; въ точкѣ же O' $(x=\infty)$ Римановой сферы будетъ она [какъ то видно изъ (1)] обращаться въ безконечность какъ ея первый членъ, т. е. какъ

$$-\sqrt{A}\int_{a_0}^{a}\frac{da}{2\sqrt{R(a)}}\sqrt{x}. \tag{6}$$

39. Если же взять эту функцію $\Omega(x, x_0;\ a, a_0)$ показателемъ числа e — основанія Неперовыхъ логариѳмовъ, то получимъ функцію:

$$E(x, x_0;\ a, a_0) = e^{\Omega(x, x_0;\ a, a_0)}, \tag{1}$$

которая на всей Римановой сферѣ будетъ *однозначна, конечна и непрерывна, за исключеніемъ точки* $x=a_0$, *гдѣ она будетъ обращаться въ* ∞^1, какъ $\dfrac{1}{a_0 - x}$ при $x=a_0$, *и еще точки* $O'(x=\infty)$, *которая будетъ для нея существенно-особенною*, такъ какъ она въ ней принимаетъ всякое значеніе, благодаря множителю:

$$e^{-A\int_{a_0}^{a}\frac{da}{2\sqrt{R(a)}}\sqrt{x}}, \tag{2}$$

который можно отъ нея отдѣлить въ такомъ случаѣ; *въ точкѣ-же* $x=a$, *она будетъ обращаться* въ 0^1, *и въ точкѣ* $x=x_0$ *равна единицѣ.* Благодаря тому именно обстоятельству, что эта функція только въ одной точкѣ обращается въ нуль и въ одной точкѣ въ безконечность, (то и другое перваго порядка), она и названа Вейерштрассомъ *примъ-функціей* (втораго рода). Перечисленныя сейчасъ свойства характеристичны для этой функціи и опредѣляютъ ее вполнѣ до нѣкотораго множителя, ко-

*

торый есть не что иное, какъ болѣе общая примъ-функція перваго рода, относящаяся не къ одному изъ путей (A) или (B), но пути, составленному изъ повторенія этихъ путей. Дѣйствительно, если бы $\mathfrak{E}(x, x_0;\ a, a_0)$ была другая функція, обладающая всѣми перечисленными свойствами функціи $E(x, x_0;\ a, a_0)$, то частное

$$\frac{\mathfrak{E}(x, x_0;\ a, a_0)}{E(x, x_0;\ a, a_0)}$$

было бы функціей однозначной, конечной и непрерывной, и отличной отъ нуля на всей Римановой сферѣ, за исключеніемъ точки O', которая была бы для нея существенно-особенной точкой; при $x = x_0$ обращалось бы, (какъ ея числитель и знаменатель) въ единицу; слѣдовательно это была бы функція

$$\overline{E}(x, x_0) = e^{\overline{\Omega}(x, x_0)}, \tag{4}$$

гдѣ

$$\overline{\Omega}(x, x_0) = \int_{(L)} \left\{ \frac{\sqrt{R(x)} + \sqrt{R(a)}}{a - x} - \frac{\sqrt{R(x_0)} + \sqrt{R(a)}}{a - x_0} \right\} \frac{da}{2\sqrt{R(a)}}, \tag{5}$$

и L обозначаетъ кривую, которая можетъ быть приведена къ m разъ пройденному пути (A) и къ n разъ пройденному пути (B), такъ что

$$(L) = m(A) + n(B); \tag{6}$$

тогда будетъ

$$\overline{\Omega}(x, x_0) = m\Omega(x, x_0) + n\Omega_1(x, x_0), \tag{7}$$

и слѣдовательно

$$\left.\begin{aligned} \overline{E}(x, x_0) &= e^{\overline{\Omega}(x, x_0)} = e^{m\Omega(x, x_0)}\, e^{n\Omega_1(x, x_0)} = \\ &= E^m(x, x_0)\, E^n(x, x_0). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Итакъ будетъ

$$\mathfrak{E}(x, x_0;\ a, a_0) = E^m(x, x_0)\, E_1^n(x, x_0)\, E(x, x_0;\ a, a_0), \tag{9}$$

откуда и слѣдуетъ сказанное.

40. Изъ (2) § 38, вводя туда вмѣсто интеграловъ перваго и второго рода ихъ выраженія чрезъ функціи $\Omega(x, x_0)$ и $\Omega_1(x, x_0)$ по формуламъ (1) и (2) § 36, мы будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}\int_{x_0}^{x}\left\{\frac{\sqrt{R(x)}+\sqrt{R(a)}}{x-a}-\frac{\sqrt{R(x)}+\sqrt{R(a_0)}}{x-a_0}\right\}\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}=\Omega(x, x_0;\, a, a_0)+\\ +\frac{1}{2\pi i}\left\{(2\eta\overset{a}{\underset{a_0}{\mathrm{I}}}-2\omega\overset{a}{\underset{a_0}{\mathrm{II}}})\,\Omega_1(x, x_0)-(2\eta_1\overset{a}{\underset{a_0}{\mathrm{I}}}-2\omega_1\overset{a}{\underset{a_0}{\mathrm{II}}})\,\Omega(x, x_0)\right\},\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

гдѣ для краткости положено:

$$\overset{a}{\underset{a_0}{\mathrm{I}}}=\int_{a_0}^{a}\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}};\tag{2}$$

$$\overset{a}{\underset{a_0}{\mathrm{II}}}=\int_{a_0}^{a}\frac{A(x-c)dx}{2\sqrt{R(x)}}.\tag{3}$$

Изъ равенства (1) видно, что періодами интеграла третьяго рода Вейерштрассовскаго типа съ двумя конечными параметрами [лѣвая часть (1)] будутъ величины

$$2\pi i;\tag{4}$$

$$2\eta\overset{a}{\underset{a_0}{\mathrm{I}}}-2\omega\overset{a}{\underset{a_0}{\mathrm{II}}};\tag{5}$$

$$2\eta_1\overset{a}{\underset{a_0}{\mathrm{I}}}-2\omega_1\overset{a}{\underset{a_0}{\mathrm{II}}};\tag{6}$$

изъ нихъ (5) представляетъ величину нашего интеграла третьяго рода по пути (A), (6)—по пути (B), какъ то легко видѣть изъ (1), заставивъ x описать пути (A) и (B) соотвѣтственно и вычитая изъ имѣющихся получиться результатовъ само (1). Вводя сокращенное обозначеніе для разсматриваемаго интеграла третьяго рода, полагая для этого

$$\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}}{}_{a,a_0}=\int_{x_0}^{x}\left\{\frac{\sqrt{R(x)}+\sqrt{R(a)}}{x-a}-\frac{\sqrt{R(x)}+\sqrt{R(a_0)}}{x-a_0}\right\}\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}},\tag{7}$$

мы будемъ слѣдовательно имѣть:

$$\underset{(A)}{\text{III}}_{a,a_0} = 2\eta \int_{a_0}^{a}\text{I} - 2\omega \int_{a_0}^{a}\text{II}\,; \tag{8}$$

$$\underset{(B)}{\text{III}}_{a,a_0} = 2\eta_1 \int_{a_0}^{a}\text{I} - 2\omega_1 \int_{a_0}^{a}\text{II}\,, \tag{9}$$

для періодовъ интеграловъ третьяго рода, сверхъ періода $2\pi i$. Вводя сокращенныя обозначенія изъ (7), (8) и (9) въ (1), будемъ имѣть:

$$\int_{x_0}^{x}\text{III}_{a,a_0} = \Omega(x, x_0;\ a, a_0) + \frac{1}{2\pi i}\left\{\underset{(A)}{\text{III}}_{a,a_0}\,\Omega_1(x, x_0) - \underset{(B)}{\text{III}}_{a,a_0}\,\Omega(x, x_0)\right\}, \tag{10}$$

— формула, отвѣчающая (1) и (2) § 36.

41. Изъ (14) и (15) § 37 слѣдуетъ:

$$\int_{a_0}^{a}\text{I} = \frac{1}{2\pi i}\left\{2\omega \log\frac{E_1(a, x_0)}{E_1(a_0, x_0)} - 2\omega_1 \log\frac{E(a, x_0)}{E(a_0, x_0)}\right\}; \tag{1}$$

$$\int_{a_0}^{a}\text{II} = \frac{1}{2\pi i}\left\{2\eta \log\frac{E_1(a, x_0)}{E_1(a_0, x_0)} - 2\eta_1 \log\frac{E(a, x_0)}{E(a_0, x_0)}\right\}; \tag{2}$$

внося это въ (8) и (9) пред. §, на основаніи (4) § 35 получимъ:

$$\underset{(A)}{\text{III}}_{a,a_0} = \log\frac{E(a, x_0)}{E(a_0, x_0)}; \qquad \underset{(B)}{\text{III}}_{a,a_0} = \log\frac{E_1(a, x_0)}{E_1(a_0, x_0)}. \tag{3}$$

Далѣе изъ (1) § 39 имѣемъ:

$$\Omega(x, x_0;\ a, a_0) = \log E(x, x_0;\ a, a_0)\,; \tag{4}$$

внося отсюда и изъ (3) въ (10) пред. §, мы получимъ выраженіе интеграла третьяго рода съ параметрами a и a_0 чрезъ примъ-функціи обоихъ родовъ:

$$\left.\begin{aligned}\prod_{x_0}^{x}{}_{a,a_0} &= \log E(x,x_0;a,a_0)+\\ +\frac{1}{2\pi i}\left\{\log\frac{E(a,x_0)}{E(a_0,x_0)}\log E_1(x,x_0)-\log\frac{E_1(a,x_0)}{E_1(a_0,x_0)}\log E(x,x_0)\right\}.\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

Эта формула равно какъ и (14) и (15) § 37 даны *Вейерштрассомъ.* Чрезъ примъ-функціи можетъ быть выражена и всякая алгебраическая однозначная на разсматриваемой Римановой поверхности функція, какъ то замѣтилъ Вейерштрассъ. Это будетъ показано въ слѣдующей главѣ.

ГЛАВА IV.

Выраженіе алгебраической функціи x и $\sqrt{R(x)}$ чрезъ примъ-функціи. Теорема Абеля.

42. Общій видъ алгебраической функціи y отъ x и $\sqrt{R(x)}$ есть слѣдующій:

$$y=\frac{\varphi(x)+\psi(x)\sqrt{R(x)}}{\varphi_1(x)+\psi_1(x)\sqrt{R(x)}}, \tag{1}$$

гдѣ $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ суть цѣлыя функціи отъ x, или полиномы, какъ то мы видѣли въ § 2. Означимъ степени этихъ функцій соотвѣтственно чрезъ m, n; m_1, n_1. Значенія x, для которыхъ y получаетъ данное значеніе, найдутся изъ уравненія:

$$[\varphi(x)-y\varphi_1(x)]^2-[\psi(x)-y\psi_1(x)]^2R(x)=0\,; \tag{2}$$

степень этого уравненія относительно x будетъ равна наибольшему изъ чиселъ:

$$2m\,;\qquad 2n+3\,;\qquad 2n_1\,;\qquad 2n_1+3\,; \tag{3}$$

означимъ его чрезъ λ. Отсюда видимъ, что принимая во вниманіе возможную кратность нѣкоторыхъ корней уравненія (2), можемъ сказать, что функція y [(1)] всякое значеніе получаетъ въ λ точкахъ Римановой сферы, изъ которыхъ нѣкоторыя могутъ совпадать. Значенія x, для которыхъ будетъ $y=0$, найдутся изъ уравненія:

$$[\varphi(x)]^2-[\psi(x)]^2R(x)=0\,; \tag{4}$$

значенія x, для которыхъ будетъ $y=\infty$, изъ уравненія:

$$[\varphi_1(x)]^2-[\psi_1(x)]^2R(x)=0\,. \tag{5}$$

Если изъ чиселъ ряда (3) числа одинаковой четности не равны между собою, то степень одного изъ этихъ уравненій будетъ $< \lambda$: если оба числа $2m$ и $2n+3$ менѣе λ, то степень уравненія (4) будетъ $<\lambda$, и, означая наибольшее изъ этихъ двухъ чиселъ чрезъ k, число нулей функціи y будетъ менѣе повидимому числа ея безконечностей на $\lambda - k$; если же оба числа $2m_1$ и $2n_1+3$ будутъ $<\lambda$, то степень уравненія (5) $<\lambda$, и, означая наибольше изъ этихъ двухъ чиселъ чрезъ k_1, число безконечностей функціи y будетъ повидимому менѣе числа ея нулей на $\lambda - k_1$. Но легко показать, что повидимому недостающіе нули, соотвѣтственно безконечности, въ этихъ случаяхъ въ дѣйствительности только удаляются въ безконечность, въ точку O' Римановой сферы.

Такъ какъ это точка винтовая, то положимъ въ (1)

$$x = \frac{1}{t^2}; \tag{6}$$

помножая числителя и знаменателя имѣющаго получиться выраженія на t^λ, мы будемъ имѣть:

$$y = \frac{t^\lambda \varphi\left(\frac{1}{t^2}\right) + t^{\lambda-3}\psi\left(\frac{1}{t^2}\right)\sqrt{t^6 R\left(\frac{1}{t^2}\right)}}{t^\lambda \varphi_1\left(\frac{1}{t^2}\right) + t^{\lambda-3}\psi_1\left(\frac{1}{t^2}\right)\sqrt{t^6 R\left(\frac{1}{t^2}\right)}}, \tag{7}$$

гдѣ функціи:

$$t^\lambda \varphi\left(\frac{1}{t^2}\right);\quad t^{\lambda-3}\psi\left(\frac{1}{t^2}\right);\quad t^\lambda\varphi_1\left(\frac{1}{t^2}\right);\quad t^{\lambda-3}\psi_1\left(\frac{1}{t^2}\right);\quad t^6 R\left(\frac{1}{t^2}\right) \tag{8}$$

будутъ полиномы степеней соотвѣтственно:

$$\lambda;\quad \lambda-3;\quad \lambda;\quad \lambda-3;\quad 6 \tag{9}$$

относительно t. Если $2m$ и $2n+3$ будутъ $<\lambda$, то, означая, какъ выше, чрезъ k наибольшее изъ этихъ двухъ чиселъ, въ числителѣ $t^{\lambda-k}$ выйдетъ общимъ множителемъ за скобки, гдѣ останется выраженіе отличное отъ нуля для $t=0$; слѣдовательно въ точкѣ O' Римановой сферы, для которой $t=0$ (такъ какъ $x=\infty$), будетъ $y=0^{\lambda-k}$, т. е. y будетъ имѣть $\lambda-k$-кратный корень $x=\infty$. Если же будутъ числа $2m_1$ и $2n_1+3$ оба $<\lambda$, то означая по прежнему наибольшее изъ нихъ чрезъ k_1, въ знаменателѣ можно будетъ вывести $t^{\lambda-k_1}$ за скобки, послѣ

чего въ скобкахъ окажется выраженіе не $=0$ при $t=0$; почему при $t=0$, слѣдовательно $x=\infty$, будетъ $y=\infty^{\lambda-k_1}$, т. е. въ точкѣ O' Римановой сферы будетъ соединено $\lambda-k_1$ безконечностей функціи y. Тоже самое, какъ извѣстно, имѣетъ мѣсто для раціональной функціи, однозначной на обыкновенной Неймановой сферѣ: если степень ея числителя на μ единицъ ниже степени ея знаменателя, то μ нулей ея будутъ въ безконечности; если же степень числителя превосходитъ на ν единицъ степень ея знаменателя; то ν безконечностей ея будутъ въ безконечности.

43. Раціональная дробь вполнѣ опредѣлена, когда даны всѣ ея нули и безконечности, лежащіе въ конечномъ удаленіи отъ точки $x=0$, да еще значеніе ея въ какой либо отличной отъ нихъ точкѣ: — безъ послѣдняго условія она будетъ опредѣлена до постояннаго множителя.

Дѣйствительно, тогда можно составить два полинома, изъ которыхъ одинъ будетъ имѣть своими нулями нули требуемой раціональной функціи, другой — ея безконечности; затѣмъ первый полиномъ раздѣлить на второй и помножить на постоянный множитель, выбранный такъ, чтобы значеніе составленной функціи совпадало съ даннымъ значеніемъ требуемой функціи въ заданной точкѣ, отличной отъ ея нулей и безконечностей: это и будетъ требуемая раціональная дробь, такъ какъ удовлетворяетъ, очевидно всѣмъ поставленнымъ ей условіямъ; другого же рѣшенія быть не можетъ, ибо частное двухъ такихъ рѣшеній было бы, какъ вездѣ конечное, постоянная величина $=1$ [Введеніе § 26]. Самые полиномы можно получить, или составляя произведеніе изъ линейныхъ множителей, отвѣчающихъ для перваго всѣмъ нулямъ искомой функціи, для второго всѣмъ ея безконечностямъ, принимая при этомъ во вниманіе заданную кратность каждаго нуля, соотвѣтственно—каждой безконечности; или же, написавъ каждый полиномъ съ неопредѣленными коэффиціентами, опредѣлить ихъ изъ условій, что эти полиномы должны тождественно обращаться въ нуль при подстановкѣ вмѣсто x въ первый изъ нихъ каждаго нуля искомой функціи, во второй каждой ея безконечности, а въ случаѣ m-кратнаго нуля (соотвѣтственно безконечности) вмѣстѣ со своими производными до порядка $m-1$ включительно, (причемъ степени полиномовъ этихъ выбираются равными числу заданныхъ нулей, соотвѣтственно безконечностей искомой функціи).

Этотъ послѣдній методъ примѣнимъ и къ опредѣленію функціи y отъ x и $\sqrt{R(x)}$, которая насъ занимаетъ теперь [(1) § 42]; но тогда какъ всѣ нули и безконечности раціональной дроби, лежащіе въ конечномъ удаленіи отъ точки $x=0$, могутъ быть заданы произвольно,

нули и безконечности функціи y, лежащіе въ конечномъ удаленіи отъ точки $x=0$, могутъ быть произвольно заданы лишь *за исключеніемъ одной* изъ этихъ точекъ, которая вполнѣ опредѣляется по прочимъ, какъ то увидимъ въ слѣдующемъ §.

44. Разсмотримъ сперва частный случай функціи y, когда $\varphi_1(x)=1$, а $\psi_1(x)=0$ для всякого x, когда слѣдовательно y имѣетъ такой видъ:

$$y=\varphi(x)+\psi(x)\sqrt{R(x)}; \tag{1}$$

въ этомъ случаѣ всѣ ея безконечности удаляются въ безконечность, т. е. въ точку O' на Римановой сферѣ, и функція y по аналогіи съ цѣлой раціональной функціей получаетъ названіе *цѣлой* алгебраической функціи. Если λ число всѣхъ ея нулей, то столько же будетъ и безконечностей, которыя, находясь въ точкѣ O' Римановой сферы, должны считаться данными. Если λ четное число (оно данное), то k [т. е. наибольше изъ чиселъ $2m$ и $2n+3$, гдѣ m степень функціи $\varphi(x)$ и n степень $\psi(x)$,] должно быть $=\lambda$; такъ какъ λ четное, то и k четное, а потому должно быть:

$$k=\lambda=2m,$$

[ибо $2n+3$ нечетное число]; отсюда находимъ

$$m=\frac{\lambda}{2}, \tag{1}$$

но какъ $2n+3<\lambda=2m$, то наибольшее значеніе возможное для n будетъ:

$$n=\frac{\lambda-4}{2}=\frac{\lambda}{2}-2; \tag{2}$$

принявъ его, мы будемъ имѣть въ полиномахъ $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ такое число неопредѣленныхъ коэффиціентовъ:

$$n+m+1^{*)}=\lambda-1, \tag{3}$$

т. е. на единицу меньше числа всѣхъ нулей искомой функціи; а потому при всѣхъ данныхъ безконечностяхъ нули мы можемъ произвольно

*) Ибо столько отношеній всѣхъ коэффиціентовъ къ одному, который долженъ выйти за скобки общимъ множителемъ всѣхъ членовъ и опредѣлиться по значенію функціи y въ какой либо точкѣ отличной отъ нулей и безконечностей ея; имѣя въ виду этотъ общій множитель, можно одинъ коэффиціэнтъ принять $=1$.

(въ случаѣ λ четнаго) задать лишь за исключеніемъ одного, который опредѣляется по нимъ. Если теперь λ число нечетное, то и k нечетное, слѣдовательно

$$k=\lambda=2n+3\,, \tag{4}$$

откуда

$$n=\frac{\lambda-3}{2}\,; \tag{3}$$

и какъ $2m<\lambda$, то наибольшее возможное для $2m$ значеніе будетъ:

$$2m=\lambda-1\,, \tag{6}$$

откуда найдемъ

$$m=\frac{\lambda-1}{2}\,; \tag{7}$$

слѣдовательно всѣхъ коэффиціентовъ въ обоихъ полиномахъ вмѣстѣ будетъ:

$$m+n+1=\lambda-1\,, \tag{8}$$

слѣдовательно опять на единицу меньше всего числа нулей; слѣдовательно опять одинъ корень опредѣляется по всѣмъ прочимъ. Что же касается до самихъ коэффиціентовъ, то они найдутся изъ уравненій вида:

$$\varphi(x_i)+\psi(x_i)\sqrt{R(x_i)}=0\,, \tag{9}$$
$$(i=1,2,3\ldots\lambda-1)$$

гдѣ x_i суть данные корни, причемъ предполагаются данными и знаки $\sqrt{R(x_i)}$, такъ какъ корни задаются на Римановой поверхности; въ случаѣ же m'-кратнаго корня x_k къ уравненію

$$\varphi(x_k)+\psi(x_k)\sqrt{R(x_k)}=0 \tag{10}$$

присоединяются и $m'-1$ уравненій

$$\frac{d^q}{dx^q}\left[\varphi(x)+\psi(x)\sqrt{R(x)}\right]_{x=x_k}=0\,. \tag{10}$$
$$(q=1,2,3\ldots m'-1)$$

Когда полиномы $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ будутъ такимъ образомъ опредѣлены, тогда мы будемъ знать первую часть уравненія:

$$[\varphi(x)]^2 - [\psi(x)]^2 R(x) = 0 \tag{12}$$

и $\lambda - 1$ его корней; дѣля первую часть на произведеніе линейныхъ множителей, отвѣчающихъ этимъ корнямъ (въ случаѣ m'-ой кратности ихъ возвышенныхъ въ степень m'), мы получимъ въ частномъ функцію первой степени,—линейный множитель, отвѣчающій послѣднему корню, который и найдемъ, приравнивая нулю этотъ множитель. Такъ найдется послѣдній корень по прочимъ даннымъ, когда y есть цѣлая функція x на Римановой сферѣ.

45. Если y есть дробная функція, [т. е. не цѣлая пред. §], которой всѣ нули и всѣ безконечности лежатъ въ конечномъ удаленіи отъ точки $x = 0$; то означая чрезъ λ число тѣхъ и другихъ, и принимая $k = \lambda + 1$, [гдѣ подъ k опять разумѣемъ наибольшее изъ чиселъ $2m$ и $2n + 3$ — показателей $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ въ (1) § 42] мы можемъ по предыдущему найти такую цѣлую на Римановой поверхности функцію, которая будетъ имѣть своими нулями всѣ данные нули, числомъ λ, искомой функціи и кромѣ того еще одинъ корень, который опредѣлится по первымъ. Присоединивъ этотъ послѣдній къ $\lambda - 1$ даннымъ безконечностямъ искомой функціи, мы можемъ построить другую цѣлую на Римановой поверхности функцію, которой нулями будутъ всѣ эти λ величинъ и еще одна, которая опредѣлится по нимъ, какъ было показано. Взявъ первую цѣлую функцію числителемъ, вторую знаменателемъ, получимъ функцію, которая будетъ имѣть λ данныхъ нулей и $\lambda - 1$ данныхъ безконечностей и еще одну безконечность, которая будетъ уже опредѣлена по тѣмъ даннымъ; что же касается до $\lambda + 1$-го нуля числителя (который опредѣленъ былъ по λ даннымъ), то, такъ какъ мы его сдѣлали и нулемъ знаменателя, для x равнаго этой величинѣ функція не будетъ ни нуль, ни безконечность.

46. Мы предполагали всѣ нули и всѣ безконечности лежащими въ конечномъ удаленіи отъ точки $x = 0$; пусть теперь p нулей лежатъ въ безконечности; ихъ тоже надобно считать за данные, такъ что изъ остальныхъ $\lambda - p$ нулей и λ безконечностей только $2\lambda - p - 1$ величинъ можно задать произвольно. Дѣйствительно, такъ какъ въ разсматриваемомъ случаѣ $\lambda - p$ нулей искомой функціи лежатъ въ конечномъ удаленіи отъ $x = 0$, то принимая $k = \lambda - p + 1$, мы можемъ построить цѣлую функцію, которая будетъ имѣть своими нулями всѣ $\lambda - p$ дан-

ные конечные нули искомой функціи и еще одинъ нуль, опредѣляющійся по нимъ; присоединяя этотъ послѣдній къ $\lambda - 1$ даннымъ безконечностямъ искомой функціи, строимъ цѣлую функцію, которая имѣла бы эти величины своими нулями; она будетъ по предыдущему имѣть еще одинъ нуль, опредѣляющійся по этимъ. Если теперь первый полиномъ возьмемъ числителемъ, второй знаменателемъ, то будемъ имѣть функцію, имѣющую всѣ данные $\lambda - p$ конечные нули своими нулями, всѣ $\lambda - 1$ данныя безконечности своими безконечностями и еще одну безконечность, опредѣляющуюся по этимъ даннымъ, а также p нулей въ безконечномъ (т. е. въ точкѣ O' Римановой сферы), ибо опять для общаго корня числителя и знаменателя эта функція будетъ конечна и отлична отъ нуля. Если бы p безконечностей лежало въ безконечномъ, то тогда слѣдовало бы начать опредѣленіе функціи съ ея знаменателя, и тогда точно также мы увидѣли бы, что одинъ нуль опредѣлился бы по остальнымъ нулямъ и безконечностямъ. Итакъ мы видимъ, что дѣйствительно изъ числа всѣхъ нулей и безконечностей алгебраической функціи однозначной на Римановой поверхности для $\sqrt{R(x)}$, одинъ нуль или одну безконечность мы не можемъ задать произвольно, ибо она опредѣляется по остальнымъ даннымъ.

47. Изъ предыдущаго видно, что всегда можно, и притомъ и какимъ способомъ, найти такую алгебраическую функцію однозначную на Римановой поверхности для $\sqrt{R(x)}$, которая бы обращалась въ данныхъ точкахъ числомъ λ въ нуль и въ λ другихъ данныхъ точкахъ въ безконечность, если только одна изъ этихъ 2λ величинъ опредѣлена надлежащимъ образомъ по прочимъ. Всегда можно также построить изъ произведенія примъ-функцій такую функцію также однозначную на Римановой поверхности, которая въ тѣхъ же самыхъ точкахъ обращалась бы въ нуль, соотвѣтственно въ безконечность, и притомъ того же порядка, какъ и эта алгебраическая функція. Пусть эта алгебраическая функція будетъ:

$$y = \frac{\varphi(x) + \psi(x)\sqrt{R(x)}}{\varphi_1(x) + \psi_1(x)\sqrt{R(x)}}; \tag{1}$$

ея нули пусть будутъ:

$$x_1, x_2, x_3, \dots x_\lambda; \tag{2}$$

ея безконечности

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_\lambda; \tag{3}$$

тогда функція

$$\Omega(x, x_0;\ x_i, \alpha_i) = \int_{\alpha_i}^{x_i} \left(\frac{\sqrt{R(a)} + \sqrt{R(x)}}{a - x} - \frac{\sqrt{R(a)} + \sqrt{R(x_0)}}{a - x_0} \right) \frac{da}{2\sqrt{R(a)}}, \quad (4)$$

будучи взята показателемъ числа e, дастъ примъ-функцію:

$$E(x, x_0;\ x_i, \alpha_i) = e^{\Omega(x, x_0;\ x_i, \alpha_i)}, \quad (5)$$

которая обращается въ 0^1 при $x = x_i$, и въ ∞^1 при $x = \alpha_i$, въ единицу при $x = x_0$. Взявъ произведеніе этихъ функцій:

$$\prod_{i=1}^{i=\lambda} E(x, x_0;\ x_i, \alpha_i) = e^{\sum\limits_{i=1}^{i=\lambda} \Omega(x, x_0;\ x_i, \alpha_i)}, \quad (6)$$

будемъ имѣть функцію, которая обращается въ нуль, соотвѣтственно въ безконечность, въ тѣхъ же самыхъ точкахъ Римановой поверхности какъ и функція y [(1)], и притомъ того же порядка; ибо, если нѣкоторыя изъ $[x_i, \sqrt{R(x_i)}]$ равны между собою, то столько же множителей $E(x, x_0;\ x_i, \alpha_i)$ въ (6) обратится въ 0^1; равнымъ образомъ, если нѣкоторые изъ $[\alpha_i, \sqrt{R(\alpha_i)}]$ равны между собою, то такое же число множителей $E(x, x_0;\ x_i, \alpha_i)$ въ (6) обратится въ ∞^1. Теперь, раздѣливъ y на его значеніе въ точкѣ $[x_0, \sqrt{R(x_0)}]$, будемъ имѣть функцію:

$$\Phi[x, \sqrt{R(x)}] = \frac{\varphi(x) + \psi(x)\sqrt{R(x)}}{\varphi_1(x) + \psi_1(x)\sqrt{R(x)}} : \frac{\varphi(x_0) + \psi(x_0)\sqrt{R(x_0)}}{\varphi_1(x_0) + \psi_1(x_0)\sqrt{R(x_0)}}, \quad (7)$$

которая, какъ и функція (6), при $x = x_0$, обращается въ 1. Если теперь раздѣлимъ (7) на (6), то получимъ функцію:

$$\frac{\Phi[x, \sqrt{R(x)}]}{\prod\limits_{i=1}^{i=\lambda} E(x, x_0;\ x_i, \alpha_i)}, \quad (8)$$

которая будетъ однозначна, конечна и непрерывна, и отлична отъ нуля во всѣхъ точкахъ Римановой сферы, кромѣ точки O', которая для нея,

какъ для ея знаменателя, будетъ существенно-особенная точка; кромѣ того для $x = x_0$, эта функція будетъ $= 1$; слѣдовательно это будетъ общая примъ-функція перваго рода:

$$\overline{E}(x, x_0), \tag{9}$$

[см. § 39, формулы (4) и (8)], относящаяся къ нѣкоторому сомкнутому пути, сложному изъ пути (A), повтореннаго нѣкоторое число p разъ, и пути (B), повтореннаго нѣкоторое число q разъ, слѣдовательно по (8) § 39:

$$\overline{E}(x, x_0) = [E(x, x_0)]^p\,[E_1(x, x_0)]^q. \tag{10}$$

Но какъ и функція $E(x, x_0;\ x_i, \alpha_i)$ нулями и безконечностями и условіемъ обращаться въ единицу при $x = x_0$ опредѣлена лишь до множителя вида (9), то предполагая множителя $\overline{E}(x, x_0)$ уже отнесеннымъ къ примъ-функціямъ $E(x, x_0;\ x_i, \alpha_i)$, мы можемъ принять отношеніе (8) равнымъ единицѣ, и тогда будетъ:

$$\mathcal{F}[x, \sqrt{R(x)}] = \prod_{i=1}^{i=\lambda} E(x, x_0;\ x_i\, \alpha_i), \tag{11}$$

откуда, внося вмѣсто $\mathcal{F}[x, \sqrt{R(x)}]$ ея значеніе изъ (7), получимъ:

$$\frac{\varphi(x) + \psi(x)\sqrt{R(x)}}{\varphi_1(x) + \psi_1(x)\sqrt{R(x)}} = \frac{\varphi(x_0) + \psi(x_0)\sqrt{R(x_0)}}{\varphi_1(x_0) + \psi_1(x_0)\sqrt{R(x_0)}} \prod_{i=1}^{i=\lambda} E(x, x_0;\ x_i, \alpha_i). \tag{12}$$

Такимъ образомъ дѣйствительно алгебраическая функція, однозначная на Римановой поверхности для $\sqrt{R(x)}$, разлагается на произведеніе примъ-функцій, однозначныхъ на той же поверхности, подобно тому, какъ раціональная дробь разлагается на произведеніе множителей вида $\dfrac{x - x_i}{x - \alpha_i}$.

48. Если возьмемъ логариѳмъ отъ (12), то принимая во вниманіе (4) и (5) пред. §, мы получимъ такое равенство:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{i=\lambda}\int_{\alpha_i}^{x_i}\left(\frac{\sqrt{R(a)} + \sqrt{R(x)}}{a - x} - \frac{\sqrt{R(a)} + \sqrt{R(x_0)}}{a - x_0}\right)\frac{da}{2\sqrt{R(a)}} = \\ &= \log\left\{\frac{\varphi(x) + \psi(x)\sqrt{R(x)}}{\varphi_1(x) + \psi_1(x)\sqrt{R(x)}}\,\frac{\varphi_1(x_0) + \psi_1(x_0)\sqrt{R(x_0)}}{\varphi(x_0) + \psi(x_0)\sqrt{R(x_0)}}\right\}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

которое и выражаетъ *теорему сложенія* интеграловъ третьяго рода, извѣстную подъ именемъ *теоремы Абеля*, такъ какъ она впервые во всей ея общности дана *Абелемъ*, хотя частные случаи ея были извѣстны и ранѣе [теоремы Fagnano и Euler'a]. Пути интегрированія въ $\lambda - 1$ интегралахъ могутъ быть выбраны произвольно, подчиняясь лишь одному условію — непроходитъ чрезъ x и x_0, ибо тогда интегралы теряютъ смыслъ, такъ какъ интеграндъ обращается въ ∞^1; послѣдній же интегралъ, λ-ый, долженъ быть взятъ по опредѣленному пути, для того чтобы равенство (1) имѣло мѣсто; въ противномъ случаѣ результатъ можетъ получиться различающійся отъ этой второй части на линейную функцію періодовъ интеграловъ третьяго рода лѣвой части этого равенства, ибо всѣ другіе пути интегрированія различаются отъ тѣхъ, при которыхъ имѣетъ мѣсто равенство (1), на нѣкоторую послѣдовательность сомкнутыхъ путей (A) и (B); это же слѣдуетъ и изъ вывода предположенія пред. §, въ которомъ отнесеніе множителя $\overline{E}(x, x_0)$ къ произведенію $\sum_{i=1}^{i=\lambda} E(x, x_0;\ x_i, \alpha_i)$ равносильно измѣненію пути интегрированія въ одномъ интегралѣ, который входитъ въ опредѣленіе одного изъ множителей этого произведенія. Только-что изложенный выводъ *Абелевой теоремы*, весьма простой, какъ видимъ, принадлежитъ *Вейерштрассу*. Въ виду фундаментальнаго значенія теоремы Абеля въ теоріи эллиптическихъ интеграловъ и вообще интеграловъ отъ алгебраическихъ функцій, мы дадимъ еще другой ея выводъ, принадлежащій самому *Абелю*, разработанный затѣмъ *Якоби* и приведенный къ ясной отчетливой формулировкѣ *Кенигсбергеромъ*.

49. Возвращаясь къ уравненію (2) § 42, мы видимъ, что корни его суть функціи перемѣнной y, которыя при измѣненіи y отъ 0 до ∞ переходятъ отъ корней уравненія (4):

$$x_1,\quad x_2,\quad x_3, \ldots x_\lambda \tag{1}$$

къ корнямъ уравненія (5) того же §:

$$\alpha_1,\quad \alpha_2,\quad \alpha_3, \ldots \alpha_\lambda. \tag{2}$$

Означая эти корни въ перемѣнномъ состояніи, т. е. для какого нибудь значенія y, промежуточнаго между 0 и ∞, чрезъ: $z_1, z_2, z_3, \ldots z_\lambda$ [такъ, что z_i переходитъ отъ x_i къ α_i, когда y переходитъ отъ 0 къ ∞], мы будемъ имѣть такое дождество:

$$[\varphi(z_i) - y\varphi_1(z_i)]^2 - [\psi(z_i) - y\psi_1(z_i)]^2 R(z_i) = 0\,; \tag{3}$$

дифференцируя его по y, помня, что z_i есть функція y, мы получимъ:

$$\left.\begin{aligned} -2\left\{[\varphi(z_i)-y\varphi_1(z_i)]\varphi_1(z_i)-[\psi(z_i)-y\psi_1(z_i)]\psi_1(z_i)R(z_i)\right\}+ \\ +\frac{\partial\mathcal{F}(z_i)}{\partial z_i}\frac{dz_i}{dy}=0, \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

гдѣ для краткости положено:

$$\mathcal{F}(z_i)=[\varphi(z_i)-y\varphi_1(z_i)]^2-[\psi(z_i)-y\psi_1(z_i)]^2R(z_i). \quad (5)$$

Но изъ (1) § 47 имѣемъ:

$$\varphi(z_i)-y\varphi_1(z_i)=-[\psi(z_i)-y\psi_1(z_i)]\sqrt{R(z_i)}, \quad (6)$$

внося въ первый членъ выраженія въ скобкахъ $\{\}$ во (4) правую часть этого равенства вмѣсто лѣвой, а во второй лѣвую вмѣсто правой, мы дадимъ равенству (4) такой видъ:

$$\left.\begin{aligned} +2\sqrt{R(z_i)}\left\{\varphi_1(z_i)[\psi(z_i)-y\psi_1(z_i)]-\psi_1(z_i)[\varphi(z_i)-y\varphi_1(z_i)]\right\}+ \\ +\mathcal{F}'(z_i)\frac{dz_i}{dy}=0, \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

гдѣ еще положено для краткости

$$\frac{\partial\mathcal{F}(z_i)}{\partial z_i}=\mathcal{F}'(z_i). \quad (8)$$

Перенося въ (7) первый членъ на право и дѣля обѣ части на $2\sqrt{R(z_i)}\mathcal{F}'(z_i)$, будемъ имѣть:

$$\frac{1}{2\sqrt{R(z_i)}}\frac{dz_i}{dy}=-\frac{\varphi_1(z_i)[\psi(z_i)-y\psi_1(z_i)]-\psi_1(z_i)[\varphi(z_i)-y\varphi_1(z_i)]}{\mathcal{F}'(z_i)}; \quad (9)$$

помножая обѣ части этого равенства на $\frac{\sqrt{R(x)}}{z_i-x}$ и суммируя затѣмъ по i отъ 1 до λ, получимъ:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{i=\lambda}\frac{\sqrt{R(x)}}{z_i-x}\,\frac{1}{2\sqrt{R(z_i)}}\,\frac{dz_i}{dy}=\\=&\sum_{i=1}^{i=\lambda}\frac{\varphi_1(z_i)[\psi(z_i)-y\psi_1(z_i)]-\psi_1(z_i)[\varphi(z_i)-y\varphi_1(z_i)]}{f'(z_i)(x-z_i)}\sqrt{R(x)}.\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

Но правая часть здѣсь представляетъ произведеніе на $\sqrt{R(x)}$ дробной части разложенія на частныя дроби, такой дроби:

$$\frac{\varphi_1(x)[\psi(x)-y\psi_1(x)]-\psi_1(x)[\varphi(x)-y\varphi_1(x)]}{f(x)},\tag{11}$$

гдѣ по (3)

$$\left.\begin{aligned}f(x)=[\varphi(x)-y\varphi_1(x)]^2-[\psi(x)-y\psi_1(x)]^2R(x)=\\=C\prod_{i=1}^{i=\lambda}(x-z_i),\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

[означая чрезъ C коэффиціентъ при наивысшей степени x въ этомъ полиномѣ]—такъ какъ z_i суть его корни. Но цѣлой части дробь (11) не будетъ имѣть, ибо она правильная, такъ какъ степень числителя по крайней мѣрѣ на 2 единицы ниже степени его знаменателя λ. Дѣйствительно λ есть наибольшее изъ чиселъ:

$$2m,\quad 2m_1,\quad 2n+3\quad \text{и}\quad 2n_1+3;\tag{13}$$

степень же членовъ числителя, остающихся послѣ приведенія подобныхъ членовъ, суть

$$m_1+n\quad \text{и}\quad m+n_1,\tag{14}$$

а эти числа менѣе λ: если $\lambda=2m$, или $2m_1$, то n и n_1 не больше $\frac{\lambda}{2}-2$; слѣдовательно для чиселъ (14) наибольшее возможное значеніе будетъ: $\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda}{2}-2=\lambda-2$; если $\lambda=2n+3$, или $2n_1+3$, то m или m_1 не болѣе $\frac{\lambda-1}{2}$, тогда какъ n или n_1 будетъ $\frac{\lambda-3}{2}$; слѣдовательно наибольшее возможное значеніе для чиселъ (14) будетъ опять:

$\frac{\lambda-1}{2}+\frac{\lambda-3}{2}=\lambda-2$. Имѣя сказанное въ виду, можемъ (10) такъ представить:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{i=\lambda}\frac{\sqrt{R(x)}}{z_i-x}\,\frac{1}{2\sqrt{R(z_i)}}\,\frac{dz_i}{dy}=\\&=\frac{\varphi_1(x)[\psi(x)-y\psi_1(x)]-\psi_1(x)[\varphi(x)-y\varphi_1(x)]}{[\varphi(x)-y\varphi_1(x)]^2-[\psi(x)-y\psi_1(x)]^2R(x)}\sqrt{R(x)}.\end{aligned}\right\}\qquad(15)$$

Помножая обѣ части этого равенства на $-dy$ и интегрируя по y отъ 0 до ∞, слѣдовательно по z_i отъ x_i до α_i, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{i=\lambda}-\int_{x_i}^{\alpha_i}\frac{\sqrt{R(x)}}{z_i-x}\,\frac{dz_i}{2\sqrt{R(z_i)}}=\\&=\int_0^{\infty}-\frac{\varphi_1(x)[\psi(x)-y\psi_1(x)]-\psi_1(x)[\varphi(x)-y\varphi_1(x)]}{[\varphi(x)-y\varphi_1(x)]^2-[\psi(x)-y\psi_1(x)]^2R(x)}\sqrt{R(x)}\,dy.\end{aligned}\right\}\qquad(16)$$

Но интегралъ второй части по раздѣленіи числителя и знаменателя на первый членъ знаменателя можно такъ представить и найти:

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^{\infty}\frac{-\dfrac{[\varphi(x)-y\varphi_1(x)]\psi_1(x)-[\psi(x)-y\psi_1(x)]\varphi_1(x)}{[\varphi(x)-y\varphi_1(x)]^2}\sqrt{R(x)}}{\left(\dfrac{\psi(x)-y\psi_1(x)}{\varphi(x)-y\varphi_1(x)}\sqrt{R(x)}\right)^2-1}\,dy=\\&=\frac{1}{2}\log\left\{\frac{\dfrac{\psi(x)-y\psi_1(x)}{\varphi(x)-y\varphi_1(x)}\sqrt{R(x)}-1}{\dfrac{\psi(x)-y\psi_1(x)}{\varphi(x)-y\varphi_1(x)}\sqrt{R(x)}+1}\right\}_0^{\infty}=\\&=\frac{1}{2}\log\left\{\frac{\dfrac{\psi_1(x)}{\varphi_1(x)}\sqrt{R(x)}-1}{\dfrac{\psi_1(x)}{\varphi_1(x)}\sqrt{R(x)}+1}\,\frac{\dfrac{\psi(x)}{\varphi(x)}\sqrt{R(x)}+1}{\dfrac{\psi(x)}{\varphi(x)}\sqrt{R(x)}-1}\right\}=\\&=\frac{1}{2}\log\left\{\frac{\varphi(x)+\psi(x)\sqrt{R(x)}}{\varphi_1(x)+\psi_1(x)\sqrt{R(x)}}\,\frac{\varphi_1(x)-\psi_1(x)\sqrt{R(x)}}{\varphi(x)-\psi(x)\sqrt{R(x)}}\right\};\end{aligned}\right\}\qquad(17)$$

внося это въ (16) и мѣняя порядокъ предѣловъ въ лѣвой части его, мы получимъ:

$$\left.\begin{array}{c}\sum_{i=1}^{i=\lambda}\int_{\alpha_i}^{x_i}\frac{\sqrt{R(x)}}{z_i-x}\frac{dz_i}{2\sqrt{R(z_i)}}=\\ =\frac{1}{2}\log\left\{\frac{\varphi(x)+\psi(x)\sqrt{R(x)}}{\varphi_1(x)+\psi_1(x)\sqrt{R(x)}}\frac{\varphi_1(x)-\psi_1(x)\sqrt{R(x)}}{\varphi(x)-\psi(x)\sqrt{R(x)}}\right\}.\end{array}\right\} \quad (18)$$

Это равенство выражаетъ теорему Абеля для интеграловъ третьяго рода Якобіевскаго типа.

50. Чтобы получить ту-же теорему для интеграловъ третьяго рода Вейерштрассовскаго типа, стоитъ только замѣтить, что

$$\left.\begin{array}{c}\sum_{i=1}^{i=\lambda}\int_{\alpha_i}^{x_i}\frac{\sqrt{R(z_i)}}{z_i-x}\frac{dz_i}{2\sqrt{R(z_i)}}=\sum_{i=1}^{i=\lambda}\frac{1}{2}\int_{\alpha_i}^{x_i}\frac{dz_i}{z_i-x}=\frac{1}{2}\log\left(\frac{\prod_{i=1}^{i=\lambda}(x_i-x)}{\prod_{i=1}^{i=\lambda}(\alpha_i-x)}\right)=\\ =\frac{1}{2}\log\frac{\prod_{i=1}^{i=\lambda}(x-x_i)}{\prod_{i=1}^{i=\lambda}(x-\alpha_i)}=\frac{1}{2}\log\left\{\frac{[\varphi(x)]^2-[\psi(x)]^2R(x)}{[\varphi_1(x)]^2-[\psi_1(x)]^2R(x)}\right\};\end{array}\right\} \quad (1)$$

придавая это равенство къ (16) пред. §, послѣ сокращеній подъ знакомъ log получимъ слѣдующее:

$$\sum_{i=1}^{i=\lambda}\int_{\alpha_i}^{x_i}\frac{\sqrt{R(z_i)}+\sqrt{R(x)}}{z_i-x}\frac{dz_i}{2\sqrt{R(z_i)}}=\log\left(\frac{\varphi(x)+\psi(x)\sqrt{R(x)}}{\varphi_1(x)+\psi_1(x)\sqrt{R(x)}}\right); \quad (2)$$

это выражаетъ теорему Абеля для интеграловъ третьяго рода Вейерштрассовскаго типа. Если перемѣнимъ здѣсь x на x_0 и вычтемъ результатъ изъ (2), то получимъ слѣдующее равенство, выражающее теорему Абеля для интеграловъ третьяго рода болѣе общаго Вейерштрассовскаго типа:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{i=\lambda}\int_{\alpha_i}^{x_i}\left(\frac{\sqrt{R(z_i)}+\sqrt{R(x)}}{z_i-x}-\frac{\sqrt{R(z_i)}+\sqrt{R(x_0)}}{z_i-x_0}\right)\frac{dz_i}{2\sqrt{R(z_i)}}=\\&=\log\left\{\frac{[\varphi(x)+\psi(x)\sqrt{R(x)}]\,[\varphi_1(x_0)+\psi_1(x_0)\sqrt{R(x_0)}]}{[\varphi_1(x)+\psi_2(x)\sqrt{R(x)}]\,[\varphi(x_0)+\psi(x_0)\sqrt{R(x_0)}]}\right\}.\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

Нормальный интегралъ третьяго рода разнится отъ этого на интегралъ перваго рода, умноженный на нѣкоторую постоянную; поэтому теорему Абеля для нормальнаго интеграла третьяго рода легко получимъ, когда найдемъ ея выраженіе для интеграловъ перваго рода.

51. Теорему Абеля для интеграловъ перваго рода получимъ, помножая обѣ части равенства (18) § 49 на $-\frac{x}{\sqrt{R(x)}}$ и полагая затѣмъ $x=\infty$; тогда интегралы лѣвой части въ предѣлѣ обратятся въ интегралы перваго рода; вторая же часть обратится въ нуль, ибо выраженіе подъ знакомъ log обратится въ единицу, слѣдовательно log его въ нуль; тоже будетъ и съ $-\frac{x}{\sqrt{R(x)}}$, ибо числитель будетъ $=\infty^1$, знаменатель $\infty^{\frac{3}{2}}$. Итакъ мы получимъ въ предѣлѣ такое равенство:

$$\sum_{i=1}^{i=\lambda}\int_{\alpha_i}^{x_i}\frac{dz_i}{2\sqrt{R(z_i)}}=0, \qquad (1)$$

что и выразитъ теорему Абеля для интеграловъ перваго рода. Тотъ же результатъ можно получить и изъ (9) § 49. Суммируя его по i отъ 1 до λ, получимъ:

$$\sum_{i=1}^{i=\lambda}\frac{1}{2\sqrt{R(z_i)}}\frac{dz_i}{dy}=-\sum_{i=1}^{i=\lambda}\frac{\varphi_1(z_i)[\psi(z_i)-y\psi_1(z_i)]-\psi_1(z_i)[\varphi(z_i)-y\psi(z_i)]}{f'(z_i)}; \qquad (2)$$

но вторая часть здѣсь равна нулю по извѣстному предложенію теоріи раціональныхъ дробей: она есть коэффиціентъ при $x^{\lambda-1}$ въ числителѣ дроби (11) § 49, а мы видѣли, что этотъ числитель степени не выше $\lambda-2$; итакъ

$$\sum_{i=1}^{i=\lambda}\frac{1}{2\sqrt{R(z_i)}}\frac{dz_i}{dy}=0, \qquad (3)$$

а отсюда, интегрируя по y отъ 0 до ∞, и получимъ (1).

52. Помножая (1) пред. § на $\int_{a_0}^{a} \frac{A(a-c)da}{2\sqrt{R(a)}}$ и придавая къ (3) § 50, получимъ равенство выражающее теорему Абеля для нормальнаго интеграла третьяго рода:

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{i=\lambda}\left\{\int_{\alpha_i}^{x_i}\left(\frac{\sqrt{R(z_i)}+\sqrt{R(x)}}{z_i-x}-\frac{\sqrt{R(z_i)}+\sqrt{R(x_0)}}{z_i-x_0}\right)\frac{dz_i}{2\sqrt{R(z_i)}}+\int_{a_0}^{a}\frac{A(a-c)da}{2\sqrt{R(a)}}\int_{\alpha_i}^{x_i}\frac{dz_i}{2\sqrt{R(z_i)}}\right\}=\\ =\log\left\{\frac{[\varphi(x)+\psi(x)\sqrt{R(x)}]\,[\varphi_1(x_0)+\psi_1(x_0)\sqrt{R(x_0)}]}{[\varphi_1(x)+\psi_1(x)\sqrt{R(x)}]\,[\psi(x_0)+\psi(x_0)\sqrt{R(x_0)}]}\right\}.\end{aligned}\right\}(1)$$

Давая входящему сюда нормальному интегралу третьяго рода форму двойнаго интеграла, мы получимъ такое равенство, выражающее ту-же теорему:

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{i=\lambda}\int_{x_0}^{x}\int_{\alpha_i}^{x_i}\left\{\left(\frac{\sqrt{R(z_i)}+\sqrt{R(x)}}{z_i-x}\right)^2-A(z_i+x)-(Ac+B)\right\}\frac{dz_i}{2\sqrt{R(z_i)}}\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}=\\ =\log\left\{\frac{[\varphi(x)+\psi(x)\sqrt{R(x)}]\,[\varphi_1(x_0)+\psi_1(x_0)\sqrt{R(x_0)}]}{[\varphi_1(x)+\psi_1(x)\sqrt{R(x)}]\,[\varphi(x_0)+\psi(x_0)\sqrt{R(x_0)}]}\right\}.\end{aligned}\right\}(2)$$

53. Отсюда, дифференцируя по x, получимъ теорему Абеля для нормальнаго интеграла второго рода, обращающагося въ ∞^1 въ точкѣ x Римановой поверхности:

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{i=\lambda}\int_{\alpha_i}^{x_i}\left\{\left(\frac{\sqrt{R(z_i)}+\sqrt{R(x)}}{z_i-x}\right)^2-A(z_i+x)-(Ac+B)\right\}\frac{dz_i}{2\sqrt{R(z_i)}}\frac{1}{2\sqrt{R(x)}}=\\ =\frac{d}{dx}\log\left\{\frac{\varphi(x)+\psi(x)\sqrt{R(x)}}{\varphi_1(x)+\psi_1(x)\sqrt{R(x)}}\right\},\end{aligned}\right\}(1)$$

или, помножая на $2\sqrt{R(x)}$:

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{i=\lambda}\int_{\alpha_i}^{x_i}\left\{\left(\frac{\sqrt{R(z_i)}+\sqrt{R(x)}}{z_i-x}\right)^2-A(z_i+x)-(Ac+B)\right\}\frac{dz_i}{2\sqrt{R(z_i)}}=\\ =2\sqrt{R(x)}\,\frac{d}{dx}\log\left\{\frac{\varphi(x)+\psi(x)\sqrt{R(x)}}{\varphi_1(x)+\psi_1(x)\sqrt{R(x)}}\right\}.\end{aligned}\right\}(2)$$

Въ этомъ видѣ равенство, выражающее теорему Абеля для нормальнаго интеграла второго рода легко запоминается; если же указанное здѣсь дифференцированіе выполнить на самомъ дѣлѣ, то будемъ имѣть такое равенство:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{i=\lambda}\int_{a_i}^{x_i}\left\{\left(\frac{\sqrt{R(z_i)}+\sqrt{R(x)}}{z_i-x}\right)^2-A(z_i+x)-(Ac+B)\right\}\frac{dz_i}{2\sqrt{R(z_i)}}=\\&=\Big\{[\varphi'(x)\varphi_1(x)-\varphi_1'(x)\varphi(x)]2\sqrt{R(x)}+[\psi'(x)\varphi_1(x)-\psi_1'(x)\varphi(x)]2R(x)+\\&+[\varphi'(x)\psi_1(x)-\varphi_1'(x)\psi(x)]2R(x)+[\psi'(x)\psi_1(x)-\psi_1'(x)\psi(x)]2R(x)\sqrt{R(x)}+\\&+[\psi(x)\varphi_1(x)-\psi_1(x)\varphi(x)]R'(x)\Big\}:[\varphi(x)+\psi(x)\sqrt{R(x)}][\varphi_1(x)+\psi_1(x)\sqrt{R(x)}].\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

Отсюда легко получить выраженія теоремы Абеля для частныхъ видовъ интеграла второго рода обращающихся въ ∞^1 въ точкахъ развѣтвленія функціи $\sqrt{R(x)}$, т. е. въ точкахъ $a_0, a_1, a_2, 0'$ Римановой сферы. Полагая $x=a_k$, если только этой величины нѣтъ въ числѣ α_i и x_i — въ какомъ случаѣ одинъ изъ интеграловъ былъ бы безконеченъ — мы получимъ, на основаніи разъясненій § 13 и имѣя въ виду равенство (1) § 51, такой результатъ:

$$\sum_{i=1}^{i=\lambda}\int_{a_i}^{x_i}\frac{R'(a_k)}{z_i-a_k}\frac{dz_i}{2\sqrt{R(z_i)}}=R'(a_k)\left\{\frac{\psi(a_k)}{\varphi(a_k)}-\frac{\psi_1(a_k)}{\varphi_1(a_k)}\right\}.\qquad(4)$$

Если же положить $x=\infty$, если только ни одно изъ α_i и x_i не $=\infty$ (въ какомъ случаѣ интегралъ обратистя въ ∞ при $x=\infty$), то интегралы лѣвой части равенства (3) обратятся въ интегралы II § 5, какъ то мы видѣли въ § 12; для того же, чтобы найти во что обратится для $x=\infty$ вторая часть того же равенства, надобно войти въ ближайшее разсмотрѣніе разныхъ обстоятельствъ. Прежде всего замѣтимъ, что для того чтобы равенство (3) имѣло смыслъ для $x=\infty$, необходимо, какъ уже замѣчено, чтобы всѣ x_i и α_i были конечны, т. е. чтобы всѣ нули и безконечности функціи

$$y=\frac{\varphi(x)+\psi(x)\sqrt{R(x)}}{\varphi_1(x)+\psi_1(x)\sqrt{R(x)}},\qquad(5)$$

лежали въ конечномъ удаленіи отъ точки $x=0$, слѣдовательно, чтобы степени $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$ были одинаковы, когда λ четное число, и степени

$\psi(x)$ и $\psi_1(x)$, когда λ нечетное число. Въ первомъ случаѣ, означая степени этихъ функцій какъ и въ § 42, будемъ имѣть:

$$m = m_1 \quad \text{и} \quad n = n_1 = m - 2 \text{ (максимально)}; \tag{6}$$

слѣдовательно первый членъ второй части (3) въ числителѣ будетъ относительно x степени

$$2m - 2 + \frac{3}{2} = 2m - \frac{1}{2}, \tag{7}$$

ибо старшіе члены сократятся очевидно; второй и третій степени:

$$2m - 3 + 3 = 2m; \tag{8}$$

четвертый степени:

$$2m - 6 + 3 + \frac{3}{2} = 2m - \frac{3}{2}, \tag{9}$$

ибо старшіе члены сократятся; пятый членъ степени:

$$2m - 2 + 2 = 2m; \tag{10}$$

знаменатель тоже степени $2m$; слѣдовательно при $x = \infty$ всѣ члены обратятся въ нуль, за исключеніемъ старшихъ членовъ выраженій, стоящихъ въ скобкахъ [] во второмъ и въ третьемъ членахъ, помноженныхъ на $2A$, и старшихъ членовъ выраженія въ скобкахъ въ пятомъ членѣ, помноженныхъ на $3A$, которые раздѣлятся на старшіе члены $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$. Означая ихъ коэффиціенты чрезъ α_0 и α'_0, а старшихъ членовъ въ $\psi(x)$ и $\psi_1(x)$ чрезъ β_0 и β'_0, мы получимъ слѣдовательно, когда $n = n_1$, такое равенство въ разсматриваемомъ случаѣ четнаго числа паръ значеній (α_i, x_i):

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=\lambda} \int_{\alpha_i}^{x_i} \frac{A(z_i - c)dz_i}{2\sqrt{R(z_i)}} &= A(\alpha_0\beta'_0 - \alpha'_0\beta_0)[2(m-n) - 3] : \alpha_0\alpha'_0 = \\ &= A\left(\frac{\beta'_0}{\alpha'_0} - \frac{\beta_0}{\alpha_0}\right)[2(m-n) - 3]. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Множитель $2(m - n) - 3$ будетъ $= 1$, если $n = n_1 = m - 2$.

Если λ нечетное число, то

$$n = n_1 = \frac{\lambda - 3}{2}\,; \quad m = m_1 = n + 1\,; \text{ (максимально)} \tag{12}$$

слѣдовательно первый членъ во второй части (3) (въ числителѣ) будетъ относительно x степени

$$2n + \frac{3}{2}. \tag{13}$$

(ибо старшіе члены сократятся); второй и третій члены степени

$$2n + 3\,; \tag{14}$$

четвертый степени

$$2n - 2 + 3 + \frac{3}{2} = 2n + \frac{5}{2}, \tag{15}$$

(ибо старшіе члены сократятся); пятый степени:

$$2n + 1 + 2 = 2n + 3\,; \tag{16}$$

знаменатель той-же степени $2n + 3$; такимъ образомъ и въ этомъ случаѣ нечетнаго числа паръ значеній (α_i, x_i) при $x = \infty$ останутся въ числителѣ тѣже самые члены:

$$A(\alpha_0\beta_0' - \alpha_0'\beta_0)[2(m-n) - 3], \tag{17}$$

но въ знаменателѣ теперь старшими членами будутъ уже:

$$A\beta_0\beta_0', \tag{18}$$

(опуская x^{m+n+2}), и потому для нечетнаго значенія λ равенство (3) обратится теперь въ такое:

$$\sum_{i=1}^{i=\lambda} \int_{\alpha_i}^{x_i} \frac{A(z_i - c)dz_i}{2\sqrt{R(z_i)}} = \left(\frac{\alpha_0}{\beta_0} - \frac{\alpha_0'}{\beta_0'}\right)[2(m-n) - 3]. \tag{19}$$

Величины α_0, β_0; α_0' и β_0' суть раціональныя функціи α_i, $\sqrt{R(\alpha_i)}$; x_i, $\sqrt{R(x_i)}$, слѣдовательно алгебраическія функціи этихъ величинъ. Такимъ образомъ мы видимъ, что сумма интеграловъ второго рода каждого изъ разсмотрѣнныхъ нами типовъ, взятыхъ отъ значенія α_i, въ

которыхъ функція y [(5) этого §] обращается въ безконечность, до значеній x_i, въ которыхъ она обращается въ нуль, всегда выражается алгебраическою функціей этихъ значеній.

54. Резюмируя найденное въ предыдущихъ §§, *теорему Абеля* для эллиптическихъ интеграловъ всѣхъ трехъ родовъ можно выразить слѣдующими словами:

1) *Сумма интеграловъ перваго рода*, взятыхъ отъ значеній x, въ которыхъ данная алгебраическая функція x, однозначная на Римановой сферѣ для $\sqrt{R(x)}$, обращается въ ∞, до тѣхъ, въ которыхъ она обращается въ нуль, *равна нулю*, или общнѣе постоянной, именно линейной функціи періодовъ интеграловъ перваго рода съ цѣлыми коэффиціентами.

2) *Сумма интеграловъ второго рода*, взятыхъ между тѣми же предѣлами, *равна* нѣкоторой *алгебраической функціи тѣхъ предѣловъ*, сложенной вообще съ линейною функціей періодовъ интеграловъ второго рода, съ цѣлыми коэффиціентами, тѣми-же самыми, если пути интегрированія тѣже, что и выше.

3) *Сумма интеграловъ третьяго рода*, взятыхъ между тѣми же предѣлами, *равна логариѳму отъ частнаго, получающагося чрезъ дѣленіе значенія функціи y для x равнаго первому параметру* этихъ интеграловъ *на значеніе ея для x равнаго второму параметру*, логариѳму сложенному вообще съ линейною функціей періодовъ того же интеграла третьяго рода съ цѣлыми коэффиціентами, тѣми-же самыми, что и выше въ случаѣ тѣхъ же путей интегрированія.

Эти „линейныя функціи съ цѣлыми коэффиціентами періодовъ интеграла того же рода" придется прибавить тогда, когда пути интегрированія, которыя разумѣлись при выводѣ этихъ теоремъ, опредѣлявшіеся непрерывнымъ измѣненіемъ y отъ ∞ до 0, замѣнимъ какими либо другими путями между тѣми же предѣлами.

55. Теорема Абеля въ примѣненіи къ эллиптическимъ интеграламъ позволяетъ сумму интеграловъ одного какого либо рода сводить къ одному интегралу того же рода при помощи либо постоянной, либо алгебраической функціи, либо логариѳма отъ алгебраической функціи, смотря по тому будутъ ли наши интегралы перваго, второго или третьяго рода. Самый общій эллиптическій интегралъ по доказанному въ первой главѣ сводится къ суммѣ интеграловъ всѣхъ трехъ родовъ и алгебраическихъ функцій; отсюда можно получить и теорему Абеля для самого общаго эллиптическаго интеграла, именно:

„Сумма эллиптическихъ интеграловъ самого общаго вида, взятыхъ между тѣми же предѣлами, какъ выше, равна суммѣ изъ постоянной,

алгебраической функціи и логариѳмовъ отъ алгебраическихъ функцій, однозначныхъ на той же Римановой поверхности для $\sqrt{R(x)}$, при x, равныхъ параметрамъ".

Можно прямо доказать теорему Абеля для этихъ общихъ эллиптическихъ интеграловъ и затѣмъ разсмотрѣть, когда эта сумма приводится или къ постоянной, или къ алгебраической функціи, или къ логариѳму отъ алгебраической функціи; чрезъ такое изслѣдованіе мы какъ разъ придемъ къ интеграламъ трехъ родовъ. Это будетъ тотъ путь, которымъ шелъ Абель въ своемъ знаменитомъ мемуарѣ, представленномъ въ 1826 г. Парижской академіи наукъ: „Sur les proprietes générales d'une sorte des transcendentes", въ которомъ онъ разсматривалъ интегралы самыхъ общихъ алгебраическихъ дифференціаловъ. Къ этому мемуару, помѣщенному въ I томѣ новаго изданія его „Oeuvres complétes" (memoire XII), мы и отсылаемъ читателя, желающаго ознакомиться съ этимъ способомъ вывода теоремы Абеля, а также и къ „Precis d'une théorie des fonctions élliptiques" (тамъ же); мы же въ слѣдующей главѣ перейдемъ къ разсмотрѣнію одного частнаго случая этой теоремы, который приведетъ насъ самъ собою къ канонической формѣ эллиптическихъ дифференціаловъ, принятой *Вейерштрассомъ*, и къ множеству его формулъ, а также къ формуламъ, рѣшающимъ задачу объ обращеніи эллиптическихъ интеграловъ.

ГЛАВА V.

Частный случай Абелевой теоремы. Каноническая форма эллиптическихъ дифференцiаловъ Вейерштрасса.

56. Разсмотримъ одинъ частный случай теоремы Абеля, который еще раньше былъ замѣченъ *Эйлеромъ* (а для одного частнаго вида эллиптическихъ интеграловъ и еще раньше Фаньяно), и потому называется *теоремой Эйлера*. Эта теорема была выведена сперва самимъ Эйлеромъ; потомъ хорошiй выводъ ея былъ данъ Лагранжемъ; Якоби она была выведена изъ геометрическихъ соображенiй; затѣмъ она имѣла громадное число другихъ выводовъ и доказательствъ, изъ которыхъ наиболѣе простымъ представляется намъ выводъ Дарбу (см. Bertrand, Calcul intégral. p. 571); затѣмъ еще болѣе элементарный и независящiй отъ канонической формы подрадикальной функцiи данъ нами въ „Сообщенiяхъ и протоколахъ Математическаго Общества при Императорскомъ Харьковскомъ университетѣ“ за 1884 г.; здѣсь мы ее выведемъ по общему методу предыдущей главы, принадлежащему Абелю, употреблявшемуся и Якоби. Отсюда легко получаются многiя формулы Вейерштрасса, относящiяся къ эллиптическимъ функцiямъ, и мы само собою приходимъ къ той канонической формѣ эллиптическихъ интеграловъ, которая найдена Эрмитомъ (Crelle Journal, Bd. 52. Sur les formes quadratiques) и принята окончательно Вейерштрассомъ въ его лекцiяхъ и составленныхъ по этимъ лекцiямъ: „*Formeln und Lehrzätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen* nach Vorlesungen und Anfzeichnungen des Herrn Weierstrass bearbeitet und herausgegeben von Schwartz“, Göttingen 1883, (еще не кончено), а также въ неоконченномъ трудѣ Halphen'a: „Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications“. Paris 1886—1888 г. Эта каноническая форма представляется вполнѣ естественною, ибо сама собою появляется, какъ увидимъ скоро, и кромѣ того обладаетъ инварiантными свойствами; отъ нея легокъ переходъ къ каноническимъ формамъ Лежандра и Якоби, принятымъ въ большинствѣ

прежнихъ сочиненій по теоріи эллиптическихъ функцій. Въ виду всего этого, разъ придя само собою къ канонической формѣ Вейерштрасса, мы будемъ въ дальнѣйшемъ ея держаться.

57. Вышеупомянутый частный случай Абелевой теоремы мы получимъ принявъ въ формулѣ (1) § 47:

$$\varphi(x) = ax + b\,; \quad \psi(x) = 1\,; \quad \varphi_1(x) = 1\,; \quad \psi_1(x) = 0\,,$$

т. е. положивъ

$$y = ax + b + \sqrt{R(x)}\,; \tag{1}$$

это будетъ, слѣдовательно, цѣлая функція x, однозначная на Римановой сферѣ для $\sqrt{R(x)}$. Значенія x, для которыхъ y принимаетъ данное значеніе, найдутся изъ уравненія:

$$(ax + b - y)^2 - R(x) = 0\,, \tag{2}$$

или, внося сюда вмѣсто $R(x)$ его значеніе изъ (4) § 1:

$$Ax^3 + (B - a^2)x^2 + [C - 2a(b - y)]x + [D - (b - y)^2] = 0\,, \tag{3}$$

— уравненіе третьей степени. Отсюда видно, что (какъ мы уже знаемъ, при $y = \infty$, и всѣ три значенія x будутъ безконечны, т. е.

$$\alpha_1 = \infty\,, \quad \alpha_2 = \infty\,, \quad \alpha_3 = \infty\,; \tag{4}$$

значенія x для $y = 0$ найдутся изъ уравненія:

$$Ax^3 + (B - a^2)x^2 + (C - 2ab)x + (D - b^2) = 0\,; \tag{5}$$

означая ихъ по прежнему чрезъ x_1, x_2, x_3, мы будемъ имѣть между ними и коэффиціентами уравненія (5) такія соотношенія:

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{a^2 - B}{A}\,; \tag{6}$$

$$x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2 = \frac{C - 2ab}{A}\,; \tag{7}$$

$$x_1x_2x_3 = \frac{b^2 - D}{A}\,. \tag{8}$$

Изъ нихъ (6) и (8) удобны для нахожденія x_3 по даннымъ x_1 и x_2, когда по тѣмъ же даннымъ будутъ найдены a и b; эти же послѣднія такъ найдутся. Такъ какъ x_1 и x_2 суть нули функціи y отъ x, то подставляя ихъ въ (1), будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} ax_1+b+\sqrt{R(x_1)}=0; \\ ax_2+b+\sqrt{R(x_2)}=0; \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

— здѣсь знакъ предъ каждымъ корнемъ задается произвольно; рѣшая эти уравненія по a и b, будемъ имѣть:

$$a=-\frac{\sqrt{R(x_1)}-\sqrt{R(x_2)}}{x_1-x_2}; \tag{10}$$

$$b=-\frac{x_1\sqrt{R(x_2)}-x_2\sqrt{R(x_1)}}{x_1-x_2}. \tag{11}$$

Знакъ предъ $\sqrt{R(x_3)}$ найдется изъ уравненія:

$$ax_3+b+\sqrt{R(x_3)}=0, \tag{12}$$

когда сюда подставимъ вмѣсто a и b ихъ значенія изъ (10) и (11). Исключая a и b изъ уравненій (9) и (12), мы получимъ въ такой формѣ уравненіе для опредѣленія $\sqrt{R(x_3)}$:

$$\begin{vmatrix} x_1 & 1 & \sqrt{R(x_1)} \\ x_2 & 1 & \sqrt{R(x_2)} \\ x_3 & 1 & \sqrt{R(x_3)} \end{vmatrix}=0, \tag{13}$$

или, раскрывая опредѣлитель по элементамъ послѣдняго столбца:

$$(x_2-x_3)\sqrt{R(x_1)}+(x_3-x_1)\sqrt{R(x_2)}+(x_1-x_2)\sqrt{R(x_3)}=0. \tag{14}$$

58. Если значеніе a изъ (10) пред. § внести въ (6) того же §, то мы получимъ:

$$x_1+x_2+x_3=\frac{1}{A}\left(\frac{\sqrt{R(x_1)}-\sqrt{R(x_2)}}{x_1-x_2}\right)^2-\frac{B}{A}; \tag{1}$$

если же мы примѣнимъ къ нашему случаю равенство (3) § 51, то будемъ имѣть:

$$\int_{x_1}^{\infty}\frac{dx_1}{2\sqrt{R(x_1)}}+\int_{x_2}^{\infty}\frac{dx_2}{2\sqrt{R(x_2)}}+\int_{x_3}^{\infty}\frac{dx_3}{2\sqrt{R(x_3)}}=0. \qquad (2)$$

Совокупность этихъ двухъ равенствъ и выражаетъ теорему Эйлера, когда x_3 принимается за постоянное. Тогда въ силу (1) x_2 станетъ алгебраическою фукціей одного x_1, тогда какъ (2) будетъ представлять другое, трансцендентное между ними уравненіе. Дифференцируя (2) по x_1 въ томъ же предположеніи $x_3=$ пост., мы получимъ такое дифференціальное уравненіе:

$$\frac{dx_1}{2\sqrt{R(x_1)}}+\frac{dx_2}{2\sqrt{R(x_2)}}=0, \qquad (3)$$

котораго (1) и (2) суть интегралы, первый въ алгебраической формѣ, второй въ трансцендентной; слѣдовательно уравненіе (3) имѣетъ алгебраическій интегралъ, именно (1). И дѣйствительно интегрируя уравненіе (3) по методу Лагранжа, мы получимъ его алгебраическій интегралъ въ такомъ видѣ, который легко приводится къ (1) (см. Bertrand, Calcul intégral. Livre III).

59. Для интеграловъ третьяго рода по (2) § 52 будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{i=3}\int_{x_0}^{x}\int_{\infty}^{x_i}\left\{\left(\frac{\sqrt{R(z_i)}+\sqrt{R(a)}}{z_i-a}\right)^2-A(z_i+a)-(Ac+B)\right\}\frac{dz_i}{2\sqrt{R(z_i)}}\,\frac{da}{2\sqrt{R(a)}}=\\ =\log\left(\frac{ax+b+\sqrt{R(x)}}{ax_0+b+\sqrt{R(x_0)}}\right),\end{aligned}\right\}(1)$$

или, внося вмѣсто a и b ихъ выраженія изъ (10) и (11) § 57 и освобождая отъ знаменателей подъ знакомъ log, окончательно:

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{i=3}\int_{x_0}^{x}\int_{\infty}^{x_i}\left\{\left(\frac{\sqrt{R(z_i)}+\sqrt{R(a)}}{z_i-a}\right)^2-A(z_i+a)-(Ac+B)\right\}\frac{dz_i}{2\sqrt{R(z_i)}}\,\frac{da}{2\sqrt{R(a)}}=\\ =\log\left\{\frac{(x_2-x)\sqrt{R(x_1)}+(x-x_1)\sqrt{R(x_2)}+(x_1-x_2)\sqrt{R(x)}}{(x_2-x_0)\sqrt{R(x_1)}+(x_0-x_1)\sqrt{R(x_2)}+(x_1-x_2)\sqrt{R(x_0)}}\right\}.\end{aligned}\right\}(2)$$

Дифференцируя это по x, получимъ теорему сложенія нормальныхъ интеграловъ второго рода:

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{i=3}\int_{\infty}^{x_i}\left\{\left(\frac{\sqrt{R(z_i)}+\sqrt{R(x)}}{z_i-x}\right)^2-A(z_i+x)-(Ac+B)\right\}\frac{dz_i}{2\sqrt{R(z_i)}}\frac{1}{2\sqrt{R(x)}}=\\ =\frac{-[\sqrt{R(x_1)}-\sqrt{R(x_2)}]2\sqrt{R(x)}+(x_1-x_2)R'(x)}{(x_2-x)\sqrt{R(x_1)}+(x-x_1)\sqrt{R(x_2)}+(x_1-x_2)\sqrt{R(x)}}\frac{1}{2\sqrt{R(x)}}.\end{aligned}\right\}(3)$$

Отбрасывая общій множитель обѣихъ частей, можно будетъ положить $x=a_j$; тогда получимъ теорему сложенія для интеграловъ второго рода, обращающихся въ ∞^1 въ a_j, именно:

$$\sum_{i=1}^{i=3}\int_{\infty}^{x_i}\frac{R'(a_j)}{z_i-a_j}\frac{dz_i}{2\sqrt{R(z_i)}}=\frac{(x_1-x_2)R'(a_j)}{(x_2-a_j)\sqrt{R(x_1)}-(x_1-a_j)\sqrt{R(x_2)}}. \tag{4}$$

Интегралы второго рода перваго типа не могутъ имѣть теорему сложенія въ этомъ видѣ, ибо ∞ не можетъ быть взята ихъ предѣломъ, такъ какъ они въ этой точкѣ Римановой сферы обращаются въ ∞; но при помощи подстановки (3) § 9 можно ее въ надлежащемъ видѣ вывести изъ (4). Дѣйствительно полагая

$$A(y-a_j)=\frac{R'(a_j)}{z_i-a_j} \tag{5}$$

и означая значеніе y для $z=z_i$ чрезъ y_i, мы получимъ налѣво въ (4) такую сумму:

$$\sum_{i=1}^{i=3}-\int_{a_j}^{y_i}\frac{A(y_i-a_j)dy_i}{2\sqrt{R(y_i)}}, \tag{6}$$

направо же будемъ имѣть послѣ упрощеній:

$$\frac{A(y_2-y_1)(y_1-a_j)(y_2-a_j)}{(y_2-a_j)\sqrt{R(y_1)}-(y_1-a_j)\sqrt{R(y_2)}}, \tag{7}$$

такъ что, слѣдовательно будетъ

$$\sum_{i=1}^{i=3}\int_{a_j}^{y_i}\frac{A(y_i-a_j)dy_j}{2\sqrt{R(y_i)}}=\frac{A(y_1-y_2)(y_1-a_j)(y_2-a_j)}{(y_2-a_j)\sqrt{R(y_1)}-(y_1-a_j)\sqrt{R(y_2)}}. \tag{8}$$

Такъ какъ по (10) § 9 чрезъ интегрированіе будемъ имѣть:

$$\sum_{i=1}^{i=3}\int_{\infty}^{x_i}\frac{dx_i}{2\sqrt{R(x_i)}}=0=\sum_{i=1}^{i=3}-\int_{a_j}^{y_i}\frac{dy}{2\sqrt{R(y_i)}}, \tag{9}$$

то помножая послѣднее на $a_j - c$ и вычитая изъ предыдущаго, получимъ болѣе общее равенство:

$$\sum_{i=1}^{i=3}\int_{a_j}^{y_i}\frac{A(y_i-c)dy_i}{2\sqrt{R(y_i)}}=\frac{A(y_1-y_2)(y_1-a_j)(y_2-a_j)}{(y_2-a_j)\sqrt{R(y_1)}-(y_1-a_j)\sqrt{R(y_2)}}. \tag{10}$$

Чтобы во второй части ирраціональность перенести изъ знаменателя въ числитель, помножимъ обоихъ на

$$(y_2-a_j)\sqrt{R(y_1)}+(y_1-a_j)\sqrt{R(y_2)}; \tag{11}$$

тогда въ знаменателѣ получимъ:

$$\left.\begin{aligned}&(y_2-a_j)^2R(y_1)-(y_1-a_j)^2R(y_2)=\\&=(y_2-a_j)^2[R'(a_j)(y_1-a_j)+\frac{R''(a_j)}{1.2}(y_1-a_j)^2+\frac{R'''(a_j)}{1.2.3}(y_1-a_j)^3]-\\&-(y_1-a_j)^2[R'(a_j)(y_2-a_j)+\frac{R''(a_j)}{1.2}(y_2-a_j)^2+\frac{R'''(a_j)}{1.2.3}(y_2-a_j)^3]=\\&=(y_1-a_j)(y_2-a_j)(y_2-y_1)[R'(a_j)-A(y_1-a_j)(y_2-a_j)];\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

внося это въ (10), послѣ сокращеній получимъ окончательно:

$$\sum_{i=1}^{i=3}\int_{a_j}^{y_i}\frac{A(y_i-c)dy_i}{2\sqrt{R(y_i)}}=-\frac{A[(y_2-a_j)\sqrt{R(y_1)}+(y_1-a_j)\sqrt{R(y_2)}]}{R'(a_j)-A(y_1-a_j)(y_2-a_j)}. \tag{13}$$

60. Интегрируя уравненіе (3) § 58 отъ a_j, легко получить, какъ я показалъ въ выше упомянутой (§ 56) замѣткѣ моей, алгебраическій интегралъ этого уравненія въ такой формѣ, съ помощію которой можно дать другую форму этому послѣднему равенству, а также получить легко многія формулы Якоби. Освободивъ уравненіе (3) § 58 отъ знаменателя, мы дадимъ ему такой видъ:

$$\sqrt{R(x_2)}d(x_1-a_j)+\sqrt{R(x_1)}d(x_2-a_j)=0; \tag{1}$$

придавъ къ нему почленно тождество:

$$\left.\begin{aligned}(x_1-a_j)d\sqrt{R(x_2)}+(x_2-a_j)d\sqrt{R(x_1)}=\\=(x_1-a_j)\frac{R'(x_2)dx_2}{2\sqrt{R(x_2)}}+(x_2-a_j)\frac{R'(x_1)dx_1}{2\sqrt{R(x_1)}},\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

мы получимъ такое равенство:

$$\left.\begin{aligned}d\left\{(x_1-a_j)\sqrt{R(x_2)}+(x_2-a_j)\sqrt{R(x_1)}\right\}=\\=(x_1-a_j)\frac{R'(x_2)dx_2}{2\sqrt{R(x_2)}}+(x_2-a_j)\frac{R'(x_1)dx_1}{2\sqrt{R(x_1)}};\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

но по (3) § 58 имѣемъ:

$$\frac{dx_2}{2\sqrt{R(x_2)}}=-\frac{dx_1}{2\sqrt{R(x_1)}},\tag{4}$$

а потому предыдущее можно такъ представить:

$$\left.\begin{aligned}d[(x_1-a_j)\sqrt{R(x_2)}+(x_2-a_j)\sqrt{R(x_1)}]=\\=[(x_2-a_j)R'(x_1)-(x_1-a_j)R'(x_2)]\frac{dx_1}{2\sqrt{R(x_1)}};\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

дѣля обѣ части этого равенства на дифференцируемое въ лѣвой части его, мы получимъ:

$$\left.\begin{aligned}d\log[(x_1-a_j)\sqrt{R(x_2)}+(x_2-a_j)\sqrt{R(x_1)}]=\\=\frac{(x_2-a_j)R'(x_1)-(x_1-a_j)R'(x_2)}{(x_1-a_j)\sqrt{R(x_2)}+(x_2-a_j)\sqrt{R(x_1)}}\frac{dx_1}{2\sqrt{R(x_1)}};\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

помножая числителя и знаменателя правой части на

$$(x_2-a_j)\sqrt{R(x_1)}-(x_1-a_j)\sqrt{R(x_2)},\tag{7}$$

мы получимъ въ знаменателѣ по (12) пред. §:

$$(x_2-x_1)(x_1-a_j)(x_2-a_j)[R'(a_j)-A(x_1-a_j)(x_2-a_j)];\tag{8}$$

числитель же будетъ тамъ такой:

$$[(x_2-a_j)R'(x_1)-(x_1-a_j)R'(x_2)][x_2-a_j)\sqrt{R(x_1)}-(x_1-a_j)\sqrt{R(x_2)}]\frac{dx_1}{2\sqrt{R(x_1)}}. \quad (9)$$

Первый множитель при помощи строки Тэйлора такъ преобразуется:

$$\left.\begin{aligned} &(x_2-a_j)R'(x_1)-(x_1-a_j)R'(x_2)= \\ &=(x_2-a_j)\left\{R'(a_j)+R''(a_j)(x_1-a_j)+\frac{R'''(a_j)}{1.2}(x_1-a_j)^2\right\}- \\ &-(x_1-a_j)\left\{R'(a_j)+R''(a_j)(x_2-a_j)+\frac{R'''(a_j)}{1.2}(x_2-a_j)^2\right\}= \\ &=(x_2-x_1)\left\{R'(a_j)-3A(x_1-a_j)(x_2-a_j)\right\}= \\ &=(x_2-x_1)\left\{R'(a_j)-A(x_1-a_j)(x_2-a_j)\right\}-2(x_2-x_1)(x_1-a_j)(x_2-a_j); \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

второй же на основаніи (4) такъ представится:

$$[(x_2-a_j)\sqrt{R(x_1)}-(x_1-a_j)\sqrt{R(x_2)}]\frac{dx_1}{2\sqrt{R(x_1)}}=\frac{1}{2}d[(x_1-a_j)(x_2-a_j)], \quad (11)$$

а потому весь числитель, т. е. (9), приметъ такой видъ:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}(x_2-x_1)\left\{R'(a_j)-A(x_1-a_j)(x_2-a_j)\right\}d[(x_1-a_j)(x_2-a_j)]- \\ &-A(x_2-x_1)(x_1-a_j)(x_2-a_j)d[(x_1-a_j)(x_2-a_j)]; \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

дѣля это на (8), получимъ для второй части (6) такое выраженіе:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d[(x_1-a_j)(x_2-a_j)]}{(x_1-a_j)(x_2-a_j)}-\frac{Ad[(x_1-a_j)(x_2-a_j)]}{R'(a_j)-A(x_1-a_j)(x_2-a_j)}= \\ &=d\log\left\{\sqrt{x_1-a_j}\sqrt{x_2-a_j}\,[R'(a_j)-A(x_1-a_j)(x_2-a_j)]\right\}; \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

внося это въ (6) вмѣсто второй части его и перенося все налѣво, получимъ результатъ, которому легко дать такой видъ:

$$d\log\left\{\frac{(x_1-a_j)\sqrt{R(x_2)}+(x_2-a_j)\sqrt{R(x_1)}}{\sqrt{x_1-a_j}\sqrt{x_2-a_j}\,[R'(a_j)-A(x_1-a_j)(x_2-a_j)]}\right\}=0\,, \qquad (14)$$

откуда получимъ, интегрируя и переходя отъ логариѳма къ числу, такой результатъ:

$$\frac{(x_1-a_j)\sqrt{R(x_2)}+(x_2-a_j)\sqrt{R(x_1)}}{\sqrt{x_1-a_j}\sqrt{x_2-a_j}\,[R'(a_j)-A(x_1-a_j)(x_2-a_j)]}=C. \qquad (15)$$

Интегрируя же (3) § 58, не преобразуя, между предѣлами: первый членъ a_j и x_1, второй между a_j и x_2, получимъ:

$$\int_{a_j}^{x_1}\frac{dx_1}{2\sqrt{R(x_1)}}+\int_{a_j}^{x_2}\frac{dx_2}{2\sqrt{R(x_2)}}=C_1. \qquad (16)$$

Можно между C_1 и C установить такую связь, что x_2, какъ функція x_1, будетъ одна и таже, опредѣлимъ ли ее изъ уравненія (15), или (16). Для этого замѣтимъ, что когда x_1 будетъ $=a_j$, изъ обоихъ уравненій получимъ, обозначая чрезъ $\overset{+}{x}_2$ соотвѣтственное значеніе x_2:

$$\frac{1}{\sqrt{R'(a_j)}}\sqrt{\overset{+}{x}_2-a_j}=C; \qquad (17)$$

$$\int_{a_j}^{\overset{+}{x}_2}\frac{dx_2}{2\sqrt{R(x_2)}}=C_1; \qquad (18)$$

слѣдовательно внося вмѣсто C его выраженіе изъ (17), гдѣ $\overset{+}{x}$ опредѣляться будетъ изъ (18), мы будемъ имѣть изъ (15) такое равенство:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{(x_1-a_j)\sqrt{R(x_2)}+(x_2-a_j)\sqrt{R(x_1)}}{R'(a_j)-A(x_1-a_j)(x_2-a_j)}=\\&=\frac{\sqrt{x_1-a_j}\sqrt{x_2-a_j}\sqrt{\overset{+}{x}_2-a_j}}{\sqrt{R'(a_j)}}.\end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

На основаніи этого равенству (13) пред. § можно дать такой видъ:

$$\sum_{i=1}^{i=3}\int_{a_i}^{y_i}\frac{A(y_i-c)dy_i}{2\sqrt{R(y_i)}}=-\frac{A\sqrt{y_1-a_j}\sqrt{y_2-a_j}\sqrt{\overset{+}{y}_2-a_j}}{\sqrt{R'(a_j)}}, \tag{20}$$

гдѣ $\overset{+}{y}_2$ опредѣляется такимъ трансцендентнымъ равенствомъ:

$$\int_{a_j}^{y_1}\frac{dy_1}{2\sqrt{R(y_1)}}+\int_{a_j}^{y_2}\frac{dy_2}{2\sqrt{R(y_2)}}=\int_{a_j}^{\overset{+}{y}_2}\frac{dy_2}{2\sqrt{R(y_2)}}; \tag{21}$$

сравнивая это равенство съ (9) пред. §, увидимъ, что

$$\int_{a_j}^{y_3}\frac{dy_3}{2\sqrt{R(y_3)}}=-\int_{a_j}^{\overset{+}{y}_2}\frac{dy_2}{2\sqrt{R(y_2)}}; \tag{22}$$

оба интеграла, слѣдовательно, относятся къ одинаковымъ путямъ, идущимъ отъ a_j одинъ надъ другимъ въ разныхъ листахъ Римановой сферы; слѣдовательно

$$y_3=\overset{+}{y}_2, \tag{23}$$

а потому (20) можно окончательно такъ представить:

$$\sum_{i=1}^{i=3}\int_{a_j}^{y_i}\frac{A(y_i-c)dy_i}{2\sqrt{R(y_i)}}=-\frac{A\sqrt{y_1-a_j}\sqrt{y_2-a_j}\sqrt{y_3-a_j}}{\sqrt{R'(a_j)}}. \tag{24}$$

61. Возвращаясь къ равенству (1) § 58, представимъ его такъ:

$$A(x_1+x_2+x_3)+B=\left(\frac{\sqrt{R(x_1)}-\sqrt{R(x_2)}}{x_1-x_2}\right)^2; \tag{1}$$

полагая теперь

$$Ax+\frac{1}{3}B=s, \tag{2}$$

помножая въ скобкахъ второй части числителя и знаменателя на $2A$, послѣ подведенія этой величины подъ корень въ числителѣ и выведеніи 2 за скобки въ знаменателѣ, мы получимъ:

$$s_1 + s_2 + s_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}}{s_1 - s_2}\right)^2, \tag{3}$$

гдѣ по (2)

$$s_i = Ax_i + \frac{1}{3}B \qquad {\scriptstyle (i=1,2,3)} \tag{4}$$

а S_i соотвѣтственное значеніе полинома:

$$\left.\begin{aligned} S &= 4A^2R(x) = 4\left\{(Ax)^3 + B(Ax)^2 + CA(Ax) + DA^2\right\} = \\ &= 4s^3 - \left(\frac{4}{3}B^2 - 4AC\right)s - \left(\frac{4}{3}ABC - 4A^2D - \frac{8}{27}B^3\right). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Но полиномъ

$$4Ax^3 + 4Bx^2 + 4Cx + 4D \tag{6}$$

заключается какъ частный случай въ полиномѣ 4-ой степени:

$$a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4, \tag{7}$$

когда именно будетъ:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = A, \quad a_2 = \frac{2}{3}B, \quad a_3 = C, \quad a_4 = 4D; \tag{8}$$

дѣлая эту подстановку въ инваріантахъ полинома (7) (см. слѣдующіе §§):

$$g_2 = a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2; \tag{9}$$

$$g_3 = a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_4a_1^2 - a_2^3; \tag{10}$$

мы получимъ:

$$g_2 = -4AC - \frac{4}{3}B^2; \tag{11}$$

$$g_3 = \frac{4}{3} ABC - 4A^2D - \frac{8}{27} B^3 ; \tag{12}$$

на основанiи чего полиномъ S можно такъ представить:

$$S = 4s^3 - g_2 s - g_3 . \tag{13}$$

Интегралъ перваго рода, входящiй въ равенство (2) § 58 чрезъ подстановку (2) такъ преобразуется:

$$\int_x^\infty \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} = \int_x^\infty \frac{d(Ax)}{\sqrt{4A^2R(x)}} = \int_s^\infty \frac{ds}{\sqrt{S}}, \tag{14}$$

— и само это равенство приметъ такой видъ:

$$\int_{s_1}^\infty \frac{ds}{\sqrt{S}} + \int_{s_2}^\infty \frac{ds}{\sqrt{S}} + \int_{s_3}^\infty \frac{ds}{\sqrt{S}} = 0 ;$$

а интегралъ второго рода перваго типа такъ:

$$\int_{x_0}^x \frac{A(x-c)dx}{2\sqrt{R(x)}} = \int_{s_0}^s \frac{(s-c')ds}{\sqrt{S}}, \tag{15}$$

гдѣ $c' = Ac + \frac{1}{3} B$; нормальный интегралъ второго рода приметъ такой видъ послѣ той же подстановки:

$$\left.\begin{aligned} &\int_{x_0}^x \left\{ \left(\frac{\sqrt{R(x)} + \sqrt{R(a)}}{x-a} \right)^2 - A(x+a) - (Ac+B) \right\} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} \frac{1}{2\sqrt{R(a)}} = \\ &\qquad = \int_{s_0}^s \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{S} + \sqrt{S_\alpha}}{s-\alpha} \right)^2 - s - \alpha - c' \right\} \frac{ds}{\sqrt{S}} \frac{1}{\sqrt{S_\alpha}}, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

гдѣ $\alpha = Aa + \frac{1}{3} B$, c' имѣемъ тоже значенiе, какъ и выше, а S_α значенiе S для $s = \alpha$; нормальный же интегралъ третьяго рода обратится въ такой:

$$\left.\begin{aligned}\int_{s_0}^{s}\frac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{S}+\sqrt{S_\alpha}}{s-\alpha}-\frac{\sqrt{S}+\sqrt{S_0}}{s-\alpha_0}\right\}\frac{ds}{\sqrt{S}}+\int_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{(\alpha-c')d\alpha}{\sqrt{S_\alpha}}\int_{s_0}^{s}\frac{ds}{\sqrt{S}}=\\ =\int_{\alpha_0}^{\alpha}\int_{s_0}^{s}\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{S}+\sqrt{S_\alpha}}{s-\alpha}\right)^2-s-\alpha-c'\right\}\frac{ds}{\sqrt{S}}\frac{d\alpha}{\sqrt{S_\alpha}}.\end{aligned}\right\}\quad(17)$$

Замѣтимъ еще, что чрезъ подстановку (2) корни полинома $R(x)$ перейдутъ соотвѣтственно въ корни полинома S (13), которые означимъ чрезъ e_1, e_2, e_3, такъ что будетъ

$$e_i = Aa_{i-1} + \frac{1}{3}B, \tag{18}$$

и интегралы, обозначенные нами чрезъ $\omega, \omega', \omega''$, примутъ такой видъ:

$$\left.\begin{aligned}\omega &= \int_{e_1}^{\infty}\frac{ds}{\sqrt{S}} = \int_{e_2}^{e_3}\frac{ds}{\sqrt{S}};\\ \omega'' &= \int_{e_2}^{\infty}\frac{ds}{\sqrt{S}} = \omega + \omega';\\ \omega' &= \int_{e_3}^{\infty}\frac{ds}{\sqrt{S}} = \int_{e_2}^{e_1}\frac{ds}{\sqrt{S}};\end{aligned}\right\}\quad(19)$$

и соотвѣтственно имъ интегралы, обозначенные нами чрезъ η, η', η'', по формуламъ (2), (4) § 31 и (11) § 33:

$$\left.\begin{aligned}\eta &= \int_{e_2}^{e_3}\frac{(S-c')ds}{\sqrt{S}}\\ \eta'' &= \eta + \eta'\\ \eta' &= \int_{e_2}^{e_1}\frac{(S-c')ds}{\sqrt{S}}.\end{aligned}\right\}\quad(20)$$

62. Каноническая форма (13) пред. § для полинома подъ корнемъ квадратнымъ эллиптическихъ интеграловъ была найдена *Эрмитомъ* и принята Вейерштрассомъ въ его лекціяхъ, (какъ выше было уже замѣчено нами), почему и извѣстна подъ его именемъ. Эрмитъ пришелъ къ этой канонической формѣ, изучая инваріанты и коваріанты бинар-

ной формы 4-й степени, въ которой, какъ частный случай, заключаются, какъ то было замѣчено въ пред. §, и формы третьей степени. Общій видъ формы четвертой степени есть слѣдующій:

$$f(x, y) = a_0x^4 + 4a_1x^3y + 6a_2x^2y^2 + 4a_3xy^3 + a_4y^4 . \tag{1}$$

Полагая здѣсь

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha x' + \beta y' \\ y &= \gamma x' + \delta y' \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

и располагая результатъ по степенямъ x' и y', будемъ имѣть преобразованную форму:

$$f_1(x', y') = a_0'x'^4 + 4a_1'x'^3 + 6a_2'x'^2y'^2 + 4a_3'x'y'^2 + a_4'y'^4 = f(x, y) , \tag{3}$$

которой коэффиціенты $a_0', a_1', a_2', a_3', a_4'$ будутъ линейныя функціи коэффиціентовъ первоначальной, относительно же коэффиціентовъ подстановки (2) $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ однородныя функціи 4-ой степени. Всякая функція коэффиціентовъ данной формы (1), которая по замѣнѣ этихъ коэффиціентовъ данной формы соотвѣтственными коэффиціентами преобразованной формы (3) приводится къ произведенію самой себя на нѣкоторую степень опредѣлителя подстановки (2):

$$\triangle = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} , \tag{4}$$

называется *инваріантомъ* формы; опредѣленіе его для нашей формы (1) заключается слѣдовательно въ такомъ равенствѣ:

$$F(a_0', a_1', a_2', a_3', a_4') = \triangle^m F(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) ; \tag{5}$$

если же имѣемъ функцію не только коэффиціентовъ данной формы, но и ея перемѣнныхъ, которая отъ замѣны этихъ величинъ соотвѣтственными коэффиціентами и перемѣнными преобразованной формы (3) приводится къ произведенію себя самой на нѣкоторую степень опредѣлителя (4) подстановки (2), то она называется *коваріантомъ* формы; опредѣленіе его для нашей формы (1) слѣдовательно заключается въ такомъ равенствѣ:

$$\Phi(a_0', a_1', a_2', a_3', a_4'; x', y') = \triangle^n \Phi(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4; x, y) . \tag{6}$$

Если имѣемъ систему формъ, то функція коэффиціентовъ этихъ формъ будетъ *инваріантомъ* этой *системы формъ*, если отъ замѣны коэффиціентовъ данныхъ формъ соотвѣтственными коэффиціентами преобразованныхъ формъ она приводится къ произведенію себя самой на нѣкоторую степень опредѣлителя подстановки, $\triangle$; функція же не только коэффиціентовъ данныхъ формъ, но и самихъ перемѣнныхъ, обладающая свойствомъ по замѣнѣ этихъ коэффиціентовъ и перемѣнныхъ данныхъ формъ соотвѣтственными коэффиціентами и перемѣнными преобразованныхъ формъ приводиться къ произведенію себя самой на степень опредѣлителя подстановки, $\triangle$, называется *коваріантомъ данной системы формъ*. Примѣромъ инваріанта системы формъ можетъ служить опредѣлитель системы двухъ формъ первой степени:

$$\left.\begin{aligned} u &= ax + by \\ v &= cx + \partial y \end{aligned}\right\}, \tag{7}$$

именно

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & \partial \end{vmatrix}, \tag{8}$$

ибо по извѣстному свойству опредѣлителя будетъ:

$$\begin{vmatrix} a' & b' \\ c' & \partial' \end{vmatrix} = \triangle \begin{vmatrix} a & b \\ c & \partial \end{vmatrix}; \tag{9}$$

примѣромъ коваріанта системы формъ можетъ служить *Якобіанъ* двухъ формъ $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$, именно:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Дѣйствительно, легко видѣть по (2), что

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\varphi'}{\partial x'} &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\gamma; \qquad \frac{\partial\varphi'}{\partial y'} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\beta + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta; \\ \frac{\partial\psi'}{\partial x'} &= \frac{\partial\psi}{\partial x}\alpha + \frac{\partial\psi}{\partial y}\gamma; \qquad \frac{\partial\psi'}{\partial y'} = \frac{\partial\psi}{\partial x}\beta + \frac{\partial\psi}{\partial y}\delta; \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

потому, на основанiи того же свойства опредѣлителей, будетъ

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi'}{\partial x'} & \frac{\partial\varphi'}{\partial y'} \\ \frac{\partial\psi'}{\partial x'} & \frac{\partial\psi'}{\partial y'} \end{vmatrix} = \triangle \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix}. \tag{12}$$

Если примемъ въ (10)

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x,y) &= \frac{1}{4}\frac{\partial f}{\partial x} = a_0x^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3\,; \\ \psi(x,y) &= \frac{1}{4}\frac{\partial f}{\partial y} = a_1x^3 + 3a_2x^2y + 3a_3xy^2 + a_4y^3\,; \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

то Якобiанъ этихъ функцiй, по раздѣленiи на 3^2, обратится въ *Гессiанъ* формы $f(x,y)$ (1), который, слѣдовательно, будетъ коварiантъ этой формы. Такъ какъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{4\,.\,3}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2\,; \\ \frac{1}{4\,.\,3}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= a_1x^2 + 2a_2xy + a_3y^2\,; \\ \frac{1}{4\,.\,3}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= a_2x^2 + 2a_3xy + a_4y^2\,; \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

то Гессiанъ H формы (1) будетъ:

$$H = \frac{1}{144}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0x^2+2a_1xy+a_2y^2 & a_1x^2+2a_2xy+a_0y^2 \\ a_1x^2+2a_2xy+a_3y^2 & a_2x^2+2a_3xy+a_4y^2 \end{vmatrix}. \tag{15}$$

Раскрывая опредѣлитель второй части, легко найдемъ

$$\left.\begin{aligned} H = (a_0a_2 - a_1^2)x^4 + 2(a_0a_3 - a_1a_2)x^3y^2 + \\ + \left\{3(a_1a_3 - a_2^2) + (a_0a_4 - a_1a_3)\right\}x^2y^2 + 2(a_1a_4 - a_2a_3)xy^3 + (a_2a_4 - a_3^2)y^4\,. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Принявъ въ (10) за $\varphi(x,y)$ саму форму $f(x,y)$, за $\psi(x,y)$ функцію H, мы получимъ, по раздѣленіи на 8, новый коваріантъ формы $f(x,y)$, который означимъ чрезъ T, такъ что, слѣдовательно, будетъ

$$T=\begin{vmatrix} \frac{1}{4}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{1}{4}\frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial x} & \frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial y} \end{vmatrix}; \tag{17}$$

раскрывать этотъ опредѣлитель мы не станемъ, предоставляя это читателю; замѣтимъ только, что этотъ коваріантъ будетъ 6-ой степени относительно перемѣнныхъ x и y, тогда какъ Гессіанъ былъ 4-ой степени; относительно же коэффиціентовъ формы послѣдній 2-ой степени, а T 3-ей степени. Комбинируя этотъ коваріантъ съ каждою изъ прежнихъ формъ, т. е. данною и ея Гессіаномъ, можемъ получить новый коваріантъ, и т. д. Другой способъ полученія коваріантовъ, а также и инваріантовъ, увидимъ въ слѣдующемъ §.

63. Рѣшая верхнія изъ равенствъ (11) пред. § относительно $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, мы получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\frac{\partial\varphi}{\partial x} &= \quad\delta\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}-\gamma\frac{\partial\varphi'}{\partial y'}, \\ \Delta\frac{\partial\varphi}{\partial y} &= -\beta\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}+\alpha\frac{\partial\varphi'}{\partial y'}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

что можно и такъ представить:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\frac{\partial\varphi}{\partial y} &= \alpha\frac{\partial\varphi'}{\partial y'}+\beta\left(-\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}\right), \\ \Delta\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) &= \gamma\frac{\partial\varphi'}{\partial y'}+\delta\left(-\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}\right); \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

сличая это со (2) пред. §, видимъ что функціи:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \tag{3}$$

преобразуются чрезъ ту же подстановку, какъ и самыя перемѣнныя x и y данной формы $\varphi(x,y)$, получая при этомъ дѣлителемъ опредѣлитель подстановки $\triangle$. Если теперь въ какую либо форму $f(x,y)$ подставить вмѣсто x и y соотвѣтственно функціи (3), то получится новая форма, которая по причинѣ ея однородности, послѣ преобразованія (2) пред. § перемѣнныхъ x и y, на основаніи формулъ (2) настоящаго § приведется къ выраженію такъ-же точно составленному изъ коэффиціентовъ преобразованной формы $f_1(x',y')$ и функцій $\frac{\partial\varphi'}{\partial y'}$ и $-\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}$, какъ первоначальная изъ коэффиціентовъ первоначальной формы и функцій $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ и $-\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, раздѣленному на нѣкоторую степень $\triangle$; слѣдовательно оно будетъ обладать инваріантнымъ свойствомъ, и будетъ инваріантомъ системы формъ $f(x,y)$ и $\varphi(x,y)$, когда перемѣнныхъ не останется послѣ выполненія указанныхъ операцій, въ противномъ случаѣ коваріантомъ. Отдѣляя операціонные символы отъ функціональнаго, результатъ символически можно такъ представить:

$$f\left(\frac{\partial}{\partial y},-\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x,y); \tag{4}$$

такого рода формы называются *контраваріантами* системы формъ $f(x,y)$ и $\varphi(x,y)$, вслѣдствіе того, что частныя производныя $\frac{\partial}{\partial y'}$, $-\frac{\partial}{\partial x'}$ по новымъ перемѣннымъ выражаются такъ чрезъ таковыя по старымъ, какъ эти послѣднія перемѣнныя чрезъ новыя. Если за $\varphi(x,y)$ возьмемъ форму 4-ой степени, какъ и $f(x,y)$, то въ контраваріантъ не будутъ входить перемѣнныя, слѣдовательно получимъ инваріантъ системы формъ $f(x,y)$ и $\varphi(x,y)$. Если въ (4) за $\varphi(x,y)$ будемъ брать саму форму $f(x,y)$ или ея коваріанты, то будемъ получать инваріанты и коваріанты этой формы. Примѣняя (4) къ самой формѣ и къ ея Гессіану, получимъ слѣдующіе ея инваріанты:

$$\frac{1}{4!}f\left(\frac{\partial}{\partial y},-\frac{\partial}{\partial x}\right)f=2(a_0a_4-4a_1a_3+3a_2^2); \tag{5}$$

$$\frac{1}{4!}f\left(\frac{\partial}{\partial y},-\frac{\partial}{\partial x}\right)H=3(a_0a_2a_4+2a_1a_2a_3-a_0a_3^2-a_4a_1^2-a_2^3). \tag{6}$$

Если же выполнимъ операцію (4) надъ T, то получимъ коваріантъ второй степени относительно x и y.

64. Инваріанты (5) и (6) пред. § суть однородныя функціи, первый второй степени, второй третьей степени относительно коэффиціентовъ формы $f(x, y)$; вѣсъ перваго (т. е. сумма значковъ коэффиціентовъ входящихъ въ одинъ членъ) равенъ 4, вѣсъ второго $= 6$. Легко убѣдиться, что всегда инваріантъ формы будетъ однородная функція ея коэффиціентовъ, состоящая изъ членовъ равнаго вѣса. Первое обстоятельство прямо слѣдуетъ изъ самаго опредѣленія инваріанта: уравненіе (5) § 62: тамъ вторая часть есть однородная функція коэффиціентовъ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ подстановки (2) того же §; слѣдовательно и лѣвая должна быть такова-же; но въ лѣвую часть величины $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ входятъ только чрезъ посредство коэффиціентовъ преобразованной формы: $a_0', a_1', a_2', a_3', a_4'$, которые суть однородныя функціи [четвертой степени] этихъ величинъ; а потому эта лѣвая часть можетъ быть однородной функціей величинъ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ лишь, когда она однородна относительно коэффиціентовъ $a_0', a_1', a_2', a_3', a_4'$; но она составлена изъ нихъ, какъ $F(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ изъ коэффиціентовъ a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 данной формы $f(x, y)$; слѣдовательно $F(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ однородна относительно этихъ коэффиціентовъ. Для доказательства одинаковости вѣса всѣхъ членовъ инваріанта обратимся опять къ тѣмъ же равенствамъ (2) § 62, но только теперь примемъ тамъ:

$$\alpha = 1\,, \qquad \beta = 0\,, \qquad \gamma = 0\,, \qquad \delta = \lambda\,, \tag{7}$$

что отвѣчаетъ подстановкѣ

$$x = x'\,; \qquad y = \lambda y'\,; \tag{8}$$

тогда будетъ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \tag{9}$$

и

$$a_0' = a_0\,; \quad a_1' = \lambda a_1\,; \quad a_2' = \lambda^2 a_2\,; \quad a_3' = \lambda^3 a_3\,; \quad a_4' = \lambda^4 a_4\,, \tag{10}$$

— такъ какъ вся подстановка сводится къ умноженію y на λ; но тогда равенство (5) § 62 обратится въ такое:

$$F(a_0, \lambda a_1, \lambda^2 a_2, \lambda^3 a_3, \lambda^4 a_4) = \lambda^m F(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)\,, \tag{11}$$

что возможно только тогда, когда сумма значковъ коэффиціентовъ въ каждомъ членѣ

$$F(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4), \tag{12}$$

т. е. вѣсъ членовъ этой функціи, есть величина постоянная, именно m. — При помощи (6) § 62 точно также убѣдимся, что коваріантъ долженъ быть однородная функція отдѣльно коэффиціентовъ и перемѣнныхъ формы $f(x, y)$; что же касается до вѣса коэффиціентовъ коваріанта, то, какъ показываетъ примѣръ гессіана формы [(16) пред. §], онъ будетъ въ разныхъ членахъ, различный именно будетъ съ показателемъ степени x образовать постоянную для всѣхъ членовъ сумму, подобно тому какъ то имѣетъ мѣсто и въ самой формѣ. Это объяснимо при помощи контраваріанта.

65. Уравненіе (5) § 62, опредѣляющее инваріантъ, выражаетъ соотношеніе между коэффиціентами первоначальной формы, коэффиціентами преобразованной формы и опредѣлителемъ $\triangle$ подстановки, служившей къ преобразованію; но легко убѣдиться, что независимыхъ одно отъ другого соотношеній между этими величинами будетъ всего два. Дѣйствительно, уравненій, опредѣляющихъ величины $a_0', a_1', a_2', a_3', a_4'$, пять, и они такого вида:

$$\left. \begin{array}{c} a_i' = F_i(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4;\ \alpha, \beta, \gamma, \delta)\,; \\ {\scriptstyle (i=0,1,2,3,4)} \end{array} \right\} \quad (1)$$

присоединивъ къ нимъ еще одно, опредѣляющее $\triangle$:

$$\triangle = \alpha\delta - \beta\gamma\,, \quad (2)$$

будемъ имѣть 6 уравненій, исключивъ изъ нихъ 4 величины $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, получимъ всего только два уравненія между коэффиціентами первоначальной и преобразованной формъ и опредѣлителемъ $\triangle$ подстановки. Слѣдовательно всѣ другіе инваріанты могутъ быть выражены чрезъ два какіе либо независимые одинъ отъ другого. За такіе можно принять инваріанты (5) и (6) § 63. Первый, будучи второй степени относительно коэффиціентовъ первоначальной формы, по преобразованіи будетъ восьмой степени относительно $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, и слѣдовательно четвертой степени относительно $\triangle$, т. е. m формулы (5) § 62 будетъ для этого инваріанта $= 4$; второй же инваріантъ, будучи третьей степени относительно коэффиціентовъ данной формы, послѣ преобразованія будетъ двѣнадцатой степени относительно $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и, слѣдовательно, шестой степени относительно $\triangle$, т. е. для него $m = 6$. Числа 4 и 6 ясно указываютъ, что оба инваріанта, будучи раціональными функціями коэффиціентовъ формы, не могутъ быть выражены одинъ черезъ другой, и потому суть независимы. Мы ихъ уже означили такъ:

$$a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2 = g_2; \tag{3}$$

$$a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_4a_1^2 - a_2^3 = g_3. \tag{4}$$

Изъ нихъ легко получается такъ называемый *абсолютный инваріантъ*:

$$J = \frac{g_2^3}{g_3^2}: \tag{5}$$

дѣйствительно, для числителя и знаменателя этого выраженія будетъ $m = 12$, слѣдовательно въ преобразованномъ J, которое означимъ чрезъ J', во второй части опредѣляющаго его равенства $\triangle$ сократится, и мы получимъ:

$$J' = J, \tag{6}$$

такъ что для этого инваріанта $m = 0$, откуда и названіе его *).

Дискриминантъ D формы $f(x, y)$ есть тоже инваріантъ и потому можетъ быть выраженъ раціонально чрезъ инваріанты g_2 и g_3. Дѣйствительно D степени 6-ой относительно коэффиціентовъ формы и вѣса 12; той же степени и того же вѣса будутъ g_2^3 и g_3^2; всякія же другія степени g_2 и g_3 и произведенія ихъ не будутъ этой степени и этого вѣса; имѣя въ виду что дискриминантъ D есть также цѣлая функція коэффиціентовъ формы, какъ и эти степени инваріантовъ g_2 и g_3, мы можемъ положить:

$$D = Mg_2^3 + Ng_3^2, \tag{7}$$

гдѣ M и N численные коэффиціенты, независящіе отъ спеціальнаго вида формы; потому для ихъ опредѣленія можно взять какія либо частныя формы четвертой степени, для которыхъ D, g_2, g_3 легко вычисляются. Таковы суть формы:

$$\text{I)}\quad x^4 - y^4 \qquad \text{и} \qquad \text{II)}\quad x^4 - xy^3. \tag{8}$$

Коэффиціенты и дискриминанты этихъ формъ суть соотвѣтственно тѣже, что и уравненій:

$$\text{I}')\quad z^4 - 1 = 0 \qquad \text{и} \qquad \text{II}')\quad z^4 - z = 0; \tag{9}$$

*) Теперь Клейнъ такъ называетъ и обозначаетъ выраженіе $\frac{g_2^3}{\triangle}$, гдѣ $\triangle$ опредѣляется формулою (24) этого §. [См. Klein-Fricke. Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen. I. Bd. S. 15. Leipzig 1890].

дискриминантъ же уравненія n-ой степени:

$$F(z) = 0 \tag{10}$$

есть

$$D = \prod_{i=1}^{i=n} \frac{1}{n} F'(z_i). \tag{11}$$

Для перваго изъ уравненій (9) имѣемъ:

$$a_0 = 1\,; \quad a_1 = a_2 = a_3 = 0\,; \quad a_4 = -1\,; \tag{12}$$

$$z_1 = -1\,; \quad z_2 = +1\,; \quad z_3 = +\sqrt{-1}\,; \quad z_4 = -\sqrt{-1}\,, \tag{13}$$

и слѣдовательно

$$g_2 = -1\,; \qquad g_3 = 0\,; \tag{14}$$

$$D = \prod_{i=1}^{i=4} \frac{1}{4}(z_i^4 - 1)' = \prod_{i=1}^{i=3} z_i^3 = -1 \,.\, +1 \,.\, (+\sqrt{-1})^3 (-\sqrt{-1})^3 = -1\,; \tag{15}$$

и потому (7) приметъ такой видъ:

$$-1 = M(-1)^3 + N . 0^2, \tag{16}$$

откуда

$$M = 1\,. \tag{17}$$

Для второго уравненія изъ (9) будетъ:

$$a_0 = 1\,; \quad a_1 = a_2 = 0\,; \quad a_3 = -\frac{1}{4}\,; \quad a_4 = 0\,; \tag{18}$$

$$z_1 = 0\,; \quad z_2 = 1\,; \quad z_3 = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} = \alpha\,; \quad z_4 = \alpha^2\,; \tag{19}$$

и потому

$$g_2 = 0\,; \quad g_3 = -\left(-\frac{1}{4}\right)^2 = -\frac{1}{4^2}\,; \tag{20}$$

$$\left.\begin{aligned} D &= \prod_{i=1}^{i=4} \frac{1}{4}(z_i^4 - z_i)' = \prod_{i=1}^{i=4} \left(z_i^3 - \frac{1}{4}\right) = \\ &= \left(-\frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(\alpha^3 - \frac{1}{4}\right)\left(\alpha^6 - \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4}\right)^3 = -\frac{3^3}{4^4}\,; \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

и слѣдовательно (7) обратится въ такое:

$$-\frac{3^3}{4^4}=M\cdot 0^3+N\left(-\frac{1}{4^2}\right)^2, \tag{22}$$

откуда

$$N=-27. \tag{23}$$

Внося теперь въ (7) значенія M и N изъ (17) и (23), будемъ имѣть такое выраженіе дискриминанта формы четвертой степени чрезъ ея инваріанты g_2 и g_3, перемѣняя при этомъ букву D на общепринятую $\triangle$:

$$\triangle=g_2^3-27g_3^2. \tag{24}$$

66. Независимыхъ коваріантовъ будетъ тоже два для нашей формы (1) § 62. Дѣйствительно, уравненіе (6) § 62, опредѣляющее коваріантъ, выражаетъ соотношеніе между коэффиціентами и перемѣнными первоначальной и преобразованной формъ и опредѣлителемъ подстановки $\triangle$; но между всѣми этими величинами имѣются слѣдующія соотношенія: 5 соотношеній (1) пред. §, одно (2) того же § и два (2) § 62, опредѣляющія подстановку, итого 8 уравненій; исключая четыре величины $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ изъ этихъ уравненій, мы получимъ четыре уравненія между

$$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4;\ x, y; \tag{1}$$

$$a_0', a_1', a_2', a_3', a_4';\ x', y'; \tag{2}$$

и величиною $\triangle$; но изъ нихъ два не будутъ зависѣть отъ перемѣнныхъ, именно будутъ не что иное, какъ независимые инваріанты пред. §, (ибо 6 изъ этихъ 8 уравненій тѣже самые, какъ и въ пред. §); остальные же два и будутъ независимые коваріанты, которыхъ и будетъ такимъ образомъ два. Къ числу ихъ принадлежитъ сама форма $f(x, y)$, ибо имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned}&a_0'x'^4+4a_1'x'^3y'+6a_2'x'^2y'^2+4a_3'x'y'^3+a_4'y'^4=\\&=a_0x^4+4a_1x^3y+6a_2x^2y^2+4a_3xy^3+a_4y^4,\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

что представляетъ уравненіе такого же вида, какъ (6) § 62, когда $m=0$; другой независимый коваріантъ есть гессіанъ H [(15) и (16) § 62]. Независимость обоихъ коваріантовъ слѣдуетъ изъ того, что они,

будучи одинаковой степени относительно x и y, могли бы и должны были бы отличаться только инваріантнымъ множителемъ для того, чтобы удовлетворять уравненію (6) § 62; этого же на самомъ дѣлѣ нѣтъ, такъ какъ нѣтъ цѣлаго инваріанта первой степени относительно коэффиціентовъ данной формы, а только такой степени и могъ бы быть этотъ множитель. Слѣдовательно всякой другой коваріантъ долженъ быть связанъ съ этими двумя алгебраическимъ соотношеніемъ. Въ частности такая связь должна имѣть мѣсто между f, H и T. Но f и H суть функціи четвертой степени, а T шестой относительно перемѣнныхъ x и y; наименьшее кратное этихъ чиселъ есть 12, а потому можно положить:

$$T^2 = Kf^3 + Lf^2H + MfH^2 + NH^3\,, \tag{4}$$

гдѣ дѣйствительно измѣреніе каждаго члена есть 12. Такъ какъ f^3, f^2H, fH^2, H^3 суть коваріанты, равно какъ и T^2, то K, L, M, N должны быть инваріанты, для того чтобы и вторая часть, какъ и первая, обладала бы инваріантнымъ свойствомъ; остается опредѣлить степени m этихъ инваріантовъ относительно $\triangle$. Но изъ опредѣленія H и T какъ Якобіановъ (15 и 17 § 62) слѣдуетъ, что

$$H' = \triangle^2 H\,,^{*)} \tag{5}$$

$$T' = \triangle^3 T\,,^{**)} \tag{6}$$

слѣдовательно для инваріантовъ K, L, M, N должно быть соотвѣтственно

$$m = 6\,; \quad 4\,; \quad 2\,; \quad 0\,; \tag{7}$$

*) Дѣйствительно по 12 § 62, мѣняя φ на $\dfrac{\partial f'}{\partial x'}$, ψ на $\dfrac{\partial f'}{\partial y'}$, получимъ:

$$144H' = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f'}{\partial x'^2} & \dfrac{\partial^2 f'}{\partial x'\partial y'} \\ \dfrac{\partial^2 f'}{\partial x'\partial y'} & \dfrac{\partial^2 f'}{\partial y'^2} \end{vmatrix} = \triangle \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(\dfrac{\partial f'}{\partial x'}\Big) & \dfrac{\partial}{\partial y}\Big(\dfrac{\partial f'}{\partial x'}\Big) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(\dfrac{\partial f'}{\partial y'}\Big) & \dfrac{\partial}{\partial y}\Big(\dfrac{\partial f'}{\partial y'}\Big) \end{vmatrix} = \triangle \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\alpha + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\gamma & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\alpha + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\gamma \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\beta + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\delta & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\beta + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\delta \end{vmatrix} =$$
$$= 144.\triangle^2 H.$$

**) Въ самомъ дѣлѣ на основаніи предыдущаго:

$$8T' = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f'}{\partial x'} & \dfrac{\partial f'}{\partial y'} \\ \dfrac{\partial H'}{\partial x'} & \dfrac{\partial H'}{\partial y'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}\alpha + \dfrac{\partial f}{\partial y}\gamma & \dfrac{\partial f}{\partial x}\beta + \dfrac{\partial f}{\partial y}\delta \\ \Big(\dfrac{\partial H}{\partial x}\alpha + \dfrac{\partial H}{\partial y}\gamma\Big)\triangle^2 & \Big(\dfrac{\partial H}{\partial x}\beta + \dfrac{\partial H}{\partial y}\delta\Big)\triangle^2 \end{vmatrix} = \triangle^2\cdot\triangle\cdot 8T = \triangle^3.8T.$$

отсюда слѣдуетъ, что

$$K = kg_3; \quad L = lg_2; \quad M = 0; \quad N = n, \tag{8}$$

гдѣ k, l, n численные коэффиціенты; въ самомъ дѣлѣ, инваріантовъ, для которыхъ было бы $m = 2$, нѣтъ, а инваріанты, для которыхъ $m = 4$ и 6, суть только g_2 и g_3 соотвѣтственно. Внося изъ (8) въ (4), будемъ имѣть:

$$T^2 = kg_3 f^3 + lg_2 f^2 H + nH^3. \tag{9}$$

Для опредѣленія коэффиціентовъ k, l, n можемъ взять частныя формы 4-ой степени, для которыхъ входящіе въ это равенство инваріанты и коваріанты легко вычисляются. Таковы формы:

$$\text{I)}\quad x^4 + y^4 \qquad \text{и} \qquad \text{II)}\quad 6x^2y^2; \tag{10}$$

для первой $a_0 = a_4 = 1$, прочіе всѣ коэффиціенты равны нулю; для второй $a_2 = 1$, прочіе равны нулю. Подставляя это въ формулы пред. §§, легко найдемъ для инваріантовъ и коваріантовъ этихъ формъ значенія, помѣщенныя въ слѣдующей таблицѣ:

$f(x,y)$	g_2	g_3	H	T
x^4+y^4	$+1$	0	$+x^2y^2$	$+xy(x^4-y^4)$
$6x^2y^2$	$+3$	-1	$-3x^2y^2$	0

(11)

Внося это въ (9) будемъ имѣть такія два уравненія (по перенесеніи всего направо въ первомъ изъ нихъ):

$$\left.\begin{aligned} 0 &= (l-1)x^2y^2(x^8+y^8) + [2(l+1)+n]x^6y^6 \\ 0 &= -k(6x^2y^2)^3 + l\cdot 3(6x^2y^2)^2(-3x^2y^2) + n(-3x^2y^2)^3; \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

первое изъ нихъ можетъ имѣть мѣсто лишь когда

$$l - 1 = 0 \qquad \text{и} \qquad 2(l+1) + n = 0, \tag{13}$$

откуда находимъ

$$l = 1; \qquad n = -4; \tag{14}$$

второе же по сокращеніи на $-(6x^2y^2)^3$ принимаетъ послѣ подстановки вмѣсто l и n только что найденныхъ значеній такой видъ:

$$k + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 0\,, \tag{15}$$

откуда находимъ

$$k = -1\,. \tag{16}$$

Внося изъ (14) и (16) въ (9), будемъ имѣть:

$$T^2 = -g_3 f^3 + g_2 f^2 H - 4H^3\,; \tag{17}$$

отсюда, дѣля на f^3, получимъ:

$$\frac{T^2}{f^3} = -4\left(\frac{H}{f}\right)^3 + g_2\left(\frac{H}{f}\right) - g_3\,. \tag{18}$$

67. Полагая теперь

$$s = -\frac{H}{f}\,, \tag{1}$$

мы этому равенству дадимъ такой видъ:

$$\frac{T^2}{f^3} = 4s^3 - g_2 s - g_3\,; \tag{2}$$

дифференцируя же (1), получимъ:

$$ds = \frac{Hdf - fdH}{f^2}\,; \tag{3}$$

но

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\,; \qquad dH = \frac{\partial H}{\partial x}dx + \frac{\partial H}{\partial y}dy\,, \tag{4}$$

и по теоремѣ Эйлера:

$$4f = \frac{\partial f}{\partial x}x + \frac{\partial f}{\partial y}y\,; \qquad 4H = \frac{\partial H}{\partial x}x + \frac{\partial H}{\partial y}y; \tag{5}$$

потому будетъ:

$$Hdf - fdH = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial H}{\partial x} & \dfrac{\partial H}{\partial y} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} dx & dy \\ x & y \end{vmatrix} = 2T(ydx - xdy)\,; \tag{6}$$

внося это въ (3) будемъ имѣть:

$$ds = \frac{2T}{f^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{ydx - xdy}{f^{\frac{1}{2}}}. \tag{7}$$

Но по (2) будетъ

$$\frac{T}{f^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{T^2}{f^3}} = \sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}; \tag{8}$$

дѣля (7) на (8), получимъ:

$$\frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}} = 2\,\frac{ydx - xdy}{f^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{f}{y^4}}}\,\frac{ydx - xdy}{y^2}, \tag{9}$$

или, полагая $\frac{x}{y} = z$:

$$\frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}} = 2\,\frac{dz}{\sqrt{a_0 z^4 + 4a_1 z^3 + 6a_2 z^2 + 4a_3 z + a_4}}. \tag{10}$$

Изъ (1) видно, что $s = \infty$, когда z равно корню $f(z, 1)$, и $s = 0$, когда $H(z, 1) = 0$. Значенія z, для которыхъ s имѣетъ данное значеніе, найдутся изъ уравненія

$$sf(z, 1) + H(z, 1) = 0, \tag{11}$$

четвертой степени относительно z; слѣдовательно если s однозначная функція z, [по уравненію (1)], то наоборотъ этого не будетъ, ибо z четырехъ-значная функція s. $\sqrt{S}$ тоже не однозначная, а двузначная функція z, какъ то видно изъ (8): по этой формулѣ она выражается раціонально чрезъ z и $\sqrt{f(z)}$. Если въ дифференціалѣ (10) сдѣлаемъ подстановку:

$$z = \frac{\alpha z' + \beta}{\gamma z' + \delta} = \frac{\alpha x' + \beta y'}{\gamma x' + \delta y'}, \tag{12}$$

то s преобразуется такъ:

$$s' = -\frac{H'}{f'} = -\triangle^2 \frac{H}{f} = \triangle^2 s, \tag{13}$$

слѣдовательно

$$ds' = \triangle^2 ds; \tag{14}$$

далѣе будетъ, какъ мы видѣли въ § 65:

$$g_2' = \triangle^4 g_2; \qquad g_3' = \triangle^6 g_3; \tag{15}$$

слѣдовательно

$$\sqrt{4s'^3 - g_2 s' - g_3} = \triangle^3 \sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}, \tag{16}$$

т. е. $\sqrt{S}$ есть коваріантъ формы $f(x, y)$. Дѣля (14) на (16), получимъ:

$$\frac{ds'}{\sqrt{4s^3 - g_2 s' - g_3}} = \triangle^{-1} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}}, \tag{17}$$

т. е. и эллиптическій дифференціалъ перваго рода есть коваріантъ. Тоже будетъ слѣдовать и изъ преобразованія второй части (10), ибо, какъ по (12) имѣемъ

$$dz = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma) dz'}{(\gamma z' + \delta)^2}, \tag{18}$$

то вторая часть (10) обратится въ слѣдующее:

$$\frac{(\alpha\delta - \beta\gamma) dz'}{\sqrt{a_0' z'^4 + 4a_1' z'^3 + 6a_2' z'^2 + 4a_3' z' + a_4'}}, \tag{19}$$

откуда по сравненіи съ первоначальнымъ видомъ будетъ слѣдовать

$$2\frac{dz'}{\sqrt{f(z', 1)}} = \triangle^{-1} . 2\frac{dz}{\sqrt{f(z, 1)}}, \tag{20}$$

согласно съ (17).

68. *Миттагъ-Леффлеръ* въ статьѣ своей о способѣ введенія въ анализъ эллиптическихъ функцій *) даетъ въ связи съ теоремой Эйлера подстановку, которая, преобразуя данный элиптическій дифференціалъ перваго рода въ найденную Эрмитомъ форму, въ тоже время позво-

*) „En metod att komma i analytisk besittning af de elliptiska Functionerna" (Af Gösta *Mittag-Leffler*. Helsingfors. J. C. Frenckell et son 1876).

ляетъ значенію $s = \infty$ отвѣчать любому значенію x, напередъ выбранному, напримѣръ x_0; при этомъ точно также и $\sqrt{S}$, подобно самому s, выражается раціонально чрезъ x и $\sqrt{R(x)}$, гдѣ

$$R(x) = a_0 x^4 + a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4. \tag{1}$$

Вотъ какимъ образомъ онъ приходитъ къ этой подстановкѣ. Пусть

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = du; \tag{2}$$

полагая

$$x = \frac{\alpha x' + \beta}{x' + \delta} = \alpha + \frac{\beta - \alpha\delta}{x' + \delta}; \tag{3}$$

будемъ имѣть

$$dx = \frac{\alpha\delta - \beta}{(x' + \delta)^2} dx'; \tag{4}$$

полагая еще

$$R_1(x') = \frac{(x' + \delta)^4}{(\alpha\delta - \beta)^2} R\left(\frac{\alpha x' + \beta}{x' + \delta}\right), \tag{5}$$

мы съ помощію (4) и (5) получимъ изъ (2):

$$\frac{dx'}{\sqrt{R_1(x')}} = du. \tag{6}$$

Разлагая $R(x)$ по строкѣ Тэйлора по степенямъ $\frac{\beta - \alpha\delta}{x' + \delta}$ [на основаніи (3)], мы найдемъ изъ (5):

$$\left.\begin{aligned} R_1(x') = \frac{R(\alpha)}{(\alpha\delta - \beta)^2}(x' + \delta)^4 + \frac{R'(\alpha)}{\beta - \alpha\delta}(x' + \delta)^3 + \frac{R''(\alpha)}{1.2}(x' + \delta)^2 + \\ + \frac{R'''(\alpha)}{1.2.3}(\beta - \alpha\delta)(x' + \delta) + \frac{R^{(IV)}(\alpha)}{1.2.3.4}(\beta - \alpha\delta)^2; \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

отсюда видно, (какъ и въ § 1), что $R_1(x')$ будетъ третьей степени относительно x', если примемъ за α корень полинома $R(x)$, ибо тогда тождественно будетъ

$$R(\alpha) = 0\,; \tag{8}$$

коэффиціентъ при третьей степени x' тогда будетъ $\dfrac{R'(\alpha)}{\beta - \alpha\delta}$ и слѣдовательно отличенъ отъ нуля, ибо $R'(\alpha)$ не $= 0$. Коэффиціентъ при x'^2 послѣ этого будетъ:

$$\frac{3R'(\alpha)}{\beta - \alpha\delta}\delta + \frac{R''(\alpha)}{1.2} \tag{9}$$

и обратится въ нуль, когда между β и δ установимъ связь, выражаемую такимъ линейнымъ относительно этихъ величинъ уравненіемъ:

$$3R'(\alpha)\delta + \frac{R''(\alpha)}{1.2}(\beta - \alpha\delta) = 0\,; \tag{10}$$

при этомъ одна изъ этихъ величинъ β и δ остается еще произвольною и можетъ быть опредѣлена согласно условію, чтобы коэффиціентъ при x'^3

$$\frac{R'(\alpha)}{\beta - \alpha\delta} = 4\,; \tag{11}$$

это будетъ тоже линейное уравненіе относительно величинъ β и δ. Опредѣливъ α, β и δ изъ условій (8), (10) и (11), мы легко найдемъ и остальные коэффиціенты полинома $R_1(x')$ (означимъ ихъ чрезъ $-g_2$, $-g_3$), который такимъ образомъ будетъ вида

$$R_1(x') = 4x'^3 - g_2x' - g_3. \tag{12}$$

Опредѣливъ далѣе знакъ $\sqrt{R(x')}$ такъ, чтобы было

$$\sqrt{R(x')} = -\sqrt{R(x)}, \tag{13}$$

мы изъ (2) и (6) будемъ имѣть:

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} + \frac{dx'}{\sqrt{R_1(x')}} = 0, \tag{14}$$

— дифференціальное уравненіе, котораго уравненіе (3), которому можно дать и такой видъ:

$$xx' - \alpha x' + \delta x - \beta = 0, \tag{15}$$

будетъ алгебраическій интегралъ, однако частный, ибо не содержитъ произвольной постоянной. Миттагъ-Леффлеръ задается теперь задачей: найти общій алгебраическій интегралъ уравненія (14), слѣдовательно съ произвольною постоянною, благодаря которой и можно будетъ сдѣлать такъ, чтобы разъ навсегда выбранному опредѣленному частному значенію x', напримѣръ $x' = \infty$, отвѣчало произвольно-назначаемое значеніе x, напримѣръ x_0.

69. Этотъ общій алгебраическій интегралъ онъ ищетъ, какъ и Эйлеръ, между алгебраическими уравненіями второй степени относительно каждой изъ перемѣнныхъ x и x', слѣдующаго вида:

$$Lx'^2 + Mx' + N = 0, \tag{1}$$

— когда расположимъ по степенямъ x', гдѣ слѣдовательно L, M, N будутъ полиномы второй степени относительно x, или

$$L'x^2 + M'x + N' = 0, \tag{2}$$

когда расположимъ по степенямъ x, гдѣ слѣдовательно L', M', N' полиномы второй степени относительно x'. Легко видѣть, что $L'x^2$ получится, когда въ (1) отберемъ первые члены каждой изъ трехъ группъ членовъ, Mx' — когда соберемъ вторые, и N' — когда соберемъ третьи, Неопредѣленныхъ коэффиціентовъ будетъ 9; ихъ надобно опредѣлить такъ, чтобы связанные этимъ алгебраическимъ уравненіемъ перемѣнныя x и x' удовлетворяли дифференціальному уравненію (14) пред. §.

Изъ (1) и (2) находимъ алгебраически:

$$2Lx' + M = \sqrt{M^2 - 4LN}, \tag{3}$$

$$2L'x + M' = \sqrt{M'^2 - 4L'N'}, \tag{4}$$

дифференцируя же, получимъ:

$$(2Lx' + M)dx' + (2L'x + M')dx = 0; \tag{5}$$

дѣля это на $\sqrt{M^2 - 4LN} . \sqrt{M'^2 - 4L'N'}$, по (3) и (4) получимъ:

$$\frac{dx}{\sqrt{M^2 - 4LN}} + \frac{dx'}{\sqrt{M'^2 - 4L'N'}} = 0. \tag{6}$$

Это уравненіе будетъ тождественно съ (14) пред. §, когда опредѣлимъ коэффиціенты полиномовъ L, M, N (а слѣдовательно и L', M', N') такъ, чтобы было

$$M^2 - 4LN = k^2 R(x)\,, \tag{7}$$

$$M'^2 - 4L'N' = k^2 R_1(x')\,; \tag{8}$$

здѣсь $R(x)$ данный полиномъ [(1) пред. §], а $R_1(x)$ долженъ имѣть видъ (12) того же §; коэффиціенты его g_2 и g_3, которые должны зависѣть только отъ коэффиціентовъ даннаго полинома $R(x)$, опредѣлятся наравнѣ съ коэффиціентами полиномовъ L, M, N и величиною k^2 изъ условій (7) и (8). Сравнивая коэффиціенты одинаковыхъ степеней перемѣнныхъ въ обѣихъ частяхъ этихъ равенствъ, мы получимъ по 5 изъ каждаго, всего слѣдовательно 10 уравненій между 12 неизвѣстными: 9 коэффиціентами полиномовъ L, M, N, постоянною k^2 и величинами g_2 и g_3; слѣдовательно если одному изъ коэффиціентовъ въ L, M, N дадимъ произвольно какое либо численное значеніе, то все-таки одинъ изъ нихъ останется произвольною постоянною величиною, и уравненіе (1) [или (2)] будетъ полнымъ интеграломъ дифференціальнаго уравненія (14) пред. §.

70. Пусть

$$L = \lambda x^2 + \mu x + \nu\,; \tag{1}$$

тогдя коэффиціентъ при x^4 въ (8) пред. § будетъ $\mu^2 - 4\lambda\nu$; эта величина должна быть равна нулю, ибо вторая часть только третьей степени; потому полагаемъ

$$\mu^2 - 4\lambda\nu = 0\,; \tag{2}$$

отсюда найдемъ:

$$\nu = \frac{\mu^2}{4\lambda}; \tag{3}$$

внося это въ (1), въ силу (2) будемъ имѣть:

$$L = \lambda\left(x + \frac{\mu}{2\lambda}\right)^2. \tag{4}$$

Согласно сдѣланному сейчасъ замѣчанію можно одному изъ коэффиціентовъ дать произвольное численное значеніе; положимъ же

$$\lambda = 1\,; \tag{5}$$

тогда, полагая еще

$$\frac{\mu}{2} = -x_0, \tag{6}$$

мы получимъ окончательно для L такое выраженіе:

$$L = (x - x_0)^2. \tag{7}$$

Искомыя полиномы M и N мы можемъ предположить, также какъ L, расположенными по степенямъ $x - x_0$ такимъ образомъ:

$$M = m_0 + m_1(x - x_0) + m_2(x - x_0)^2, \tag{8}$$

$$N = n_0 + n_1(x - x_0) + n_2(x - x_0)^2, \tag{9}$$

и искать коэффиціенты при степеняхъ $x - x_0$ изъ остальныхъ уравненій, которыя вытекаютъ изъ тождествъ (7) и (8) пред. §. Изъ (7) пред. § по (7) настоящаго мы имѣемъ:

$$N = \frac{M^2 - k^2 R(x)}{4(x - x_0)^2}; \tag{10}$$

отсюда видно, такъ какъ N цѣлая функція x, что коэффиціенты при нулевой и первой степеняхъ $x - x_0$ въ разложеніи числителя выраженія (10) должны обратиться въ нуль. Это замѣчаніе доставитъ намъ, полагая для краткости

$$R(x) = r_0 + r_1(x - x_0) + r_2(x - x_0)^2 + r_3(x - x_0)^3 + r_4(x - x_0)^4, \tag{11}$$

гдѣ слѣдовательно

$$r_0 = R(x_0),\ r_1 = R'(x_0),\ r_2 = \frac{R''(x_0)}{1.2};\ r_3 = \frac{R'''(x_0)}{1.2.3};\ r_4 = \frac{R''''(x_0)}{1.2.3.4}, \tag{12}$$

слѣдующія два уравненія:

$$m_0^2 - k^2 r_0 = 0; \tag{13}$$

$$2m_0 m_1 - k^2 r_1 = 0,$$

послѣ чего будетъ изъ (10):

$$N = \frac{1}{4}\left\{(m_1^2 + 2m_0 m_2 - k^2 r_2) + (2m_1 m_2 - k^2 r_3)(x - x_0) + (m_2^2 - k^2 r_4)(x - x_0)^2.\right\} \tag{15}$$

Въ уравненія (13) и (14) введемъ новыя неизвѣстныя величины h и g, положивъ

$$m_0 = -\frac{r_0}{g}; \tag{16}$$

$$m_2 = -\frac{h}{g}; \tag{17}$$

тогда изъ (13) получимъ:

$$k^2 = \frac{r_0}{g^2}; \tag{18}$$

а изъ (14):

$$m_1 = -\frac{r_1}{2g}; \tag{19}$$

послѣ этого будутъ:

$$M = -\frac{1}{g}\left\{r_0 + \frac{r_1}{2}(x - x_0) + h(x - x_0)^2\right\}; \tag{20}$$

$$N = \frac{1}{4g^2}\left\{\left(\frac{1}{4}r_1^2 + 2r_0h - r_0r_2\right) + (r_1h - r_0r_3)(x - x_0) + (h^2 - r_0r_4)(x - x_0)^2\right\}. \tag{21}$$

Осталось опредѣлить два коэффиціента g и h; для этого обратимся къ уравненію (8) пред. §: мы еще не воспользовались условіями, что коэффиціентъ при x'^3 долженъ быть $= 4$, а коэффиціентъ при x'^2 равенъ нулю. Чтобы удобнѣе это сдѣлать, расположимъ первую часть уравненія (1) § 69 по степенямъ $x - x_0$; тогда будетъ:

$$Lx'^2 + Mx' + N = L_1(x - x_0)^2 + M_1(x - x_0) + N_1; \tag{22}$$

вставляя сюда вмѣсто L, M и N ихъ выраженія изъ (7), (20) и (21), и сравнивая коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ $x - x_0$ въ обѣихъ частяхъ равенства, найдемъ:

$$L_1 = x'^2 - \frac{h}{g}x' + \frac{h^2 - r_0r_4}{4g^2} = \left(x' - \frac{h}{2g}\right)^2 - \frac{r_0r_4}{4g^2}; \tag{23}$$

$$M_1 = -\frac{r_1}{2g}x' + \frac{r_1h - r_0r_3}{4g^2} = -\frac{r_1}{2g}\left(x' - \frac{h}{2g}\right) - \frac{r_0r_3}{4g^2}; \tag{24}$$

$$N_1 = -\frac{r_0}{g}x' + \frac{\frac{1}{4}r_1^2 + 2r_0h - r_0r_2}{4g^2} = -\frac{r_0}{g}\left(x' - \frac{h}{2g}\right) - \frac{r_0r_2 - \frac{1}{4}r_1^2}{4g^2}. \quad (25)$$

Отсюда получимъ:

$$\left.\begin{aligned} M_1^2 - 4L_1N_1 = \frac{4r_0}{g}\left(x' - \frac{h}{2g}\right)^3 + \frac{r_0r_2}{g^2}\left(x' - \frac{h}{2g}\right)^2 + \\ + \frac{1}{g^3}\left[\frac{1}{4}r_0r_1r_3 - r_0^2r_4\right]\left(x' - \frac{h}{2g}\right) + \frac{1}{g^4}\left[\frac{1}{16}r_0^2r_3^2 - \frac{1}{4}r_0^2r_2r_4 + \frac{1}{16}r_0r_1^2r_4\right] = \\ = k^2R_1(x'), \end{aligned}\right\} (26)$$

ибо въ силу инваріантныхъ свойствъ дискриминанта формы второй степени будетъ:

$$M_1^2 - 4L_1N_1 = M'^2 - 4L'N', \quad (27)$$

а по (18) это $= k^2R_1(x)$. Внося въ (26) вмѣсто k^2 его выраженіе изъ (18) и сокращая обѣ части на $\frac{r_0}{g^2}$, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} 4g\left(x' - \frac{h}{2g}\right)^3 + r_2\left(x' - \frac{h}{2g}\right)^2 + \frac{1}{g}\left[\frac{1}{4}r_1r_3 - r_0r_4\right]\left(x' - \frac{h}{2g}\right) + \\ + \frac{1}{g^2}\left[\frac{1}{16}r_0r_3^2 - \frac{1}{4}r_0r_2r_4 + \frac{1}{16}r_1^2r_4\right] = R_1(x'). \end{aligned}\right\} (28)$$

Здѣсь коэффиціентъ при x'^3 есть $4g$; это должно равняться 4; слѣдовательно должно быть

$$g = 1; \quad (29)$$

далѣе коэффиціентъ при x'^2 долженъ быть $=0$; это доставитъ такое уравненіе:

$$-6h + r_2 = 0, \quad (30)$$

откуда

$$h = \frac{r_2}{6}. \quad (31)$$

Внося эти значенія g и h изъ (29) и (31) въ (28), и располагая по степенямъ x', по приведеніи сходственныхъ членовъ будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} R_1(x') = 4x'^3 - (r_0 r_4 - \frac{1}{4} r_1 r_3 + \frac{1}{12} r_2^2)x' - \\ - \left(\frac{1}{6} r_0 r_2 r_4 + \frac{1}{48} r_1 r_2 r_3 - \frac{1}{16} r_0 r_3^2 - \frac{1}{16} r_4 r_1^2 - \frac{1}{216} r_2^3\right), \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

и слѣдовательно

$$g_2 = r_0 r_4 - \frac{1}{4} r_1 r_3 + \frac{1}{12} r_2^2; \quad (33)$$

$$g_3 = \frac{1}{6} r_0 r_2 r_4 + \frac{1}{48} r_1 r_2 r_3 - \frac{1}{16} r_0 r_3^2 - \frac{1}{16} r_4 r_1^2 - \frac{1}{216} r_2^3. \quad (34)$$

Эти величины только формально зависятъ отъ x_0 (чрезъ посредство величинъ r_i); дѣйствительно:

$$\frac{dg_2}{dx_0} = \frac{dr_0}{dx_0} r_4 + r_0 \frac{dr_4}{dx_0} - \frac{1}{4} \frac{dr_1}{dx_0} r_3 - \frac{1}{4} r_1 \frac{dr_3}{dx_0} + \frac{1}{6} r_2 \frac{dr_2}{dx_0}; \quad (35)$$

но по (12):

$$\frac{dr_0}{dx_0} = r_1; \quad \frac{dr_1}{dx_0} = 2r_2; \quad \frac{dr_2}{dx_0} = 3r_3; \quad \frac{dr_3}{dx_0} = 4r_4; \quad \frac{dr_4}{dx_0} = 0; \quad (36)$$

посему (35) такъ перепишется:

$$\frac{dg_2}{dx_0} = r_1 r_4 - \frac{1}{2} r_2 r_3 - r_1 r_4 + \frac{1}{2} r_2 r_3 = 0; \quad (37)$$

т. е. g_2 независитъ отъ x_0. Далѣе:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dg_3}{dx_0} = \left(\frac{1}{6} r_2 r_4 - \frac{1}{16} r_3^2\right)\frac{dr_0}{dx_0} + \left(\frac{1}{48} r_2 r_3 - \frac{1}{8} r_4 r_1\right)\frac{dr_1}{dx_0} + \\ + \left(\frac{1}{6} r_0 r_4 + \frac{1}{48} r_1 r_3 - \frac{1}{72} r_2^2\right)\frac{dr_2}{dx_0} + \left(\frac{1}{48} r_1 r_2 - \frac{1}{8} r_0 r_3\right)\frac{dr_3}{dx_0} + \\ + \left(\frac{1}{6} r_0 r_2 - \frac{1}{16} r_1^2\right)\frac{dr_4}{dx_0}, \end{aligned}\right\} \quad (38)$$

или по (36):

$$\left.\begin{aligned}\frac{dg_3}{dx_0}=\frac{1}{6}r_1r_2r_4-\frac{1}{16}r_1r_3^2+\frac{1}{24}r_2^2r_3-\frac{1}{4}r_1r_2r_4+\\+\frac{1}{2}r_0r_3r_4+\frac{1}{16}r_1r_3^2-\frac{1}{24}r_2^2r_3+\frac{1}{12}r_1r_2r_4-\frac{1}{2}r_0r_3r_4=0,\end{aligned}\right\}\quad(39)$$

т. е. и g_3 независитъ отъ x_0. На этомъ основаніи можно положить $x_0=0$ въ выраженіяхъ g_2 и g_3; тогда будетъ

$$r_0=a_4;\ r_1=4a_3;\ r_2=\frac{1}{1.2}6.2.1a_2=6a_2;\ r_3=\frac{4.3.2a_1}{1.2.3}=4a_1;\ r_4=a_0,\quad(40)$$

и потому

$$g_2=a_0a_4-4a_1a_3+3a_2^2;\quad(41)$$

$$g_3=a_0a_2a_4+2a_1a_2a_3-a_4a_1^2-a_0a_3^2-a_2^3.\quad(42)$$

71. Внося изъ (29) и (31) пред. § значенія g и h въ (20) и (21), а затѣмъ подставляя полученные результаты, а также и изъ (7) того же § въ (1) § 69, получимъ искомый алгебраическій интегралъ дифференціальнаго уравненія (14) § 68 въ такомъ видѣ:

$$\left.\begin{aligned}(x-x_0)^2x'^2-\left(r_0+\frac{1}{2}r_1(x-x_0)+\frac{r_2}{6}(x-x_0)^2\right)x'+\\+\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{4}r_1^2+\frac{1}{3}r_0r_2-r_0r_2\right)+\left(\frac{1}{6}r_1r_2-r_0r_3\right)(x-x_0)+\left(\frac{1}{36}r_2^2-r_0r_4\right)(x-x_0)^2\right\}=0.\end{aligned}\right\}(1)$$

Рѣшая это уравненіе по x', послѣ нѣкоторыхъ упрощеній найдемъ:

$$x'=\frac{r_0+\frac{1}{2}r_1(x-x_0)+\frac{1}{6}r_2(x-x_0)^2\pm\sqrt{r_0[r_0+r_1(x-x_0)+r_2(x-x_0)^2+r_3(x-x_0)^3+r_4(x-x_0)]^4}}{2(x-x_0)^2},\ (2)$$

или, по (11) и (12) пред. §:

$$x'=\frac{R(x_0)+\frac{1}{2}R'(x_0)(x-x_0)\pm\sqrt{R(x_0)}.\sqrt{R(x)}}{2(x-x_0)^2}+\frac{1}{24}R''(x_0).\quad(3)$$

Такъ какъ

$$R(x)=R(x_0)+R'(x_0)(x-x_0)+\frac{R''(x_0)}{1.2}(x-x_0)^2+\frac{R'''(x_0)}{1.2.3}(x-x_0)^3+\frac{R''''(x_0)}{1.2.3.4}(x-x_0)^4, \quad (4)$$

то

$$\left.\begin{aligned}&2R(x_0)+R'(x_0)(x-x_0)=R(x_0)+R(x_0)+R'(x_0)(x-x_0)=\\&=R(x_0)+R(x)-\frac{R''(x_0)}{1.2}(x-x_0)^2-\frac{R'''(x_0)}{1.2.3}(x-x_0)^3-\frac{R''''(x_0)}{1.2.3.4}(x-x_0)^4,\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

и потому (3) можно такъ представить:

$$x'=\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{R(x)}\pm\sqrt{R(x_0)}}{x-a_0}\right)^2-\frac{1}{12}R''(x_0)-\frac{1}{24}R'''(x_0)(x-x_0)-\frac{R''''(x_0)}{24.4}(x-x_0)^2; \quad (6)$$

но

$$R''(x_0)=4.3a_0x_0^2+4.3.2a_1x_0+6.2.1a_2=12(a_0x_0^2+2a_1x_0+a_2); \quad (7)$$

$$R'''(x_0)=4.3.2a_0x_0+4.3.2a_1=24(a_0x_0+a_1); \quad (8)$$

$$R''''(x_0)=4.3.2.1a_0=24a_0; \quad (9)$$

потому будетъ:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{12}R''(x_0)+\frac{1}{24}R'''(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{24.4}R''''(x_0)(x-x_0)^2=\\&=a_0x_0^2+2a_1x_0+a_2+(a_0x_0+a_1)(x-x_0)+\frac{1}{4}a_0(x-x_0)^2=\\&=\frac{1}{4}a_0(x+x_0)^2+a_1(x+x_0)+a_2;\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

внося это въ (6), получимъ:

$$x'=\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{R(x)}\pm\sqrt{R(x_0)}}{x-x_0}\right)^2-\frac{1}{4}a_0(x+x_0)^2-a_1(x+x_0)-a_2. \quad (11)$$

Мы желаемъ, чтобы начальное значеніе x' было одно и тоже, каково бы ни было значеніе коэффиціентовъ полинома $R(x)$ и начальное значеніе x_0 перемѣнной x; изъ (11) видно, что такимъ значе-

ніемъ x' можетъ быть только ∞, когда возьмемъ верхній знакъ въ этой формулѣ, и ему будетъ отвѣчать значеніе x_0 перемѣнной x. Обозначимъ такъ опредѣленную перемѣнную x' по Вейерштрассу чрезъ s, такъ что слѣдовательно будетъ:

$$s=\frac{1}{4}\left\{\frac{\sqrt{R(x)}+\sqrt{R(x_0)}}{x-x_0}\right\}^2-\frac{1}{4}a_0(x+x_0)^2-a_1(x+x_0)-a_2. \qquad (12)$$

Мы видимъ, что новая перемѣнная выражается раціонально чрезъ x, $\sqrt{R(x)}$, а также x_0, $\sqrt{R(x_0)}$; и притомъ симметрично относительно этихъ паръ. Полагая еще

$$S=4s^3-g_2s-g_3, \qquad (13)$$

уравненіе (14) § 68 мы перепишемъ такъ:

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}=-\frac{ds}{\sqrt{S}}, \qquad (14)$$

и интегрируя по x отъ x_0 и по s, слѣдовательно, отъ безконечности, будемъ имѣть:

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}=\int_{s}^{\infty}\frac{ds}{\sqrt{S}}=u. \qquad (15)$$

Дифференцируя (3), взявъ тамъ верхній знакъ и потому написавъ s вмѣсто x', получимъ:

$$ds=\left(-\frac{R(x_0)}{(x-x_0)^3}-\frac{R'(x_0)}{4(x-x_0)^2}-\frac{\sqrt{R(x_0)}\sqrt{R(x)}}{(x-x_0)^3}+\frac{\sqrt{R(x_0)}\,R'(x)}{4(x-x_0)^2\sqrt{R(x)}}\right)dx, \qquad (16)$$

или

$$\frac{ds}{dx}=-\left(\frac{\sqrt{R(x)}}{(x-x_0)^3}-\frac{R'(x)}{4(x-x_0)^2}\frac{1}{\sqrt{R(x)}}\right)\sqrt{R(x_0)}-\left(\frac{R(x_0)}{(x-x_0)^3}+\frac{R'(x_0)}{4(x-x_0)^2}\right); \qquad (17)$$

но изъ (14) имѣемъ:

$$\frac{ds}{dx}=-\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{R(x)}}; \qquad (18)$$

*

сравнивая оба выраженія, получимъ по умноженіи на $\sqrt{R(x)}$:

$$\sqrt{S}=\left(\frac{R(x)}{(x-x_0)^2}-\frac{R'(x)}{4(x-x_0)^3}\right)\sqrt{R(x_0)}+\left(\frac{R(x_0)}{(x-x_0)^3}+\frac{R'(x_0)}{4(x-x_0)^2}\right)\sqrt{R(x)}\,; \quad (19)$$

слѣдовательно и $\sqrt{S}$ выражается раціонально чрезъ x и $\sqrt{R(x)}$, [а также и чрезъ x_0 и $\sqrt{R(x_0)}$]. Изъ (3) и (4) § 69 слѣдуетъ, что и наоборотъ x и $\sqrt{R(x)}$ можно выразить раціонально чрезъ s и $\sqrt{S}$: по (7) и (8) того же § изъ (4) x выразится раціонально чрезъ x' и $\sqrt{R_1(x')}$; но затѣмъ изъ (3) $\sqrt{R(x)}$ выразится раціонально чрезъ x' и x, а какъ послѣдній выражается раціонально чрезъ x' и $\sqrt{R_1(x')}$, то тоже будетъ имѣть мѣсто и относительно $\sqrt{R(x)}$; а $\sqrt{R_1(x')}=\sqrt{S}$ послѣ перемѣны x' на s по (13).

72. Чтобы получить отсюда Эйлерову теорему, стоитъ только уравненіе

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}=\frac{dx'}{\sqrt{R(x')}} \quad (1)$$

разбить на два:

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}=du=-\frac{ds}{\sqrt{S}}, \quad (2)$$

$$\frac{dx'}{\sqrt{R(x')}}=du=-\frac{ds}{\sqrt{S}}; \quad (3)$$

мы только-что видѣли, что выбравъ произвольно начальныя значенія x_0 и x'_0 перемѣнныхъ x и x', для которыхъ будетъ $s=\infty$, мы можемъ выразить x' и $\sqrt{R(x')}$ раціонально чрезъ s и $\sqrt{S}$, а также и эти послѣднія чрезъ x и $\sqrt{R(x)}$; слѣдовательно и x' и $\sqrt{R(x')}$ выразятся раціонально чрезъ x и $\sqrt{R(x)}$ вмѣстѣ съ начальными значеніями обѣихъ паръ, а въ этомъ и заключается Эйлерова теорема. Въ самомъ дѣлѣ, мы видѣли §§ 57 и 58, что при $x_3=$ постоянному эта теорема выражается совокупностью уравненій (1) и (2) § 58; но при этомъ, какъ мы видѣли будетъ имѣть мѣсто и уравненіе (14) § 57, съ помощію котораго $\sqrt{R(x_2)}$ выразится чрезъ $\sqrt{R(x_1)}$, x_1 и x_2; а этотъ послѣдній выражается раціонально чрезъ x_1 и $\sqrt{R(x_1)}$. Дѣйствительно равенству (14) § 57 легко дать такой видъ:

$$\frac{\sqrt{R(x_1)}-\sqrt{R(x_2)}}{x_1-x_2}=\frac{\sqrt{R(x_1)}-\sqrt{R(x_3)}}{x_1-x_3}; \quad (4)$$

внося это въ (1) § 58, получимъ:

$$x_1+x_2+x_3=\frac{1}{A}\left(\frac{\sqrt{R(x_1)}-\sqrt{R(x_3)}}{x_1-x_3}\right)^2-\frac{B}{A}, \qquad (5)$$

что первой степени относительно x_2, откуда и слѣдуетъ сказанное.

[Мимоходомъ замѣтимъ по поводу (4) формы соотношенія (14) § 57, заключающіяся въ слѣдующей пропорціи:

$$\frac{\sqrt{R(x_2)}-\sqrt{R(x_3)}}{x_2-x_3}=\frac{\sqrt{R(x_3)}-\sqrt{R(x_1)}}{x_3-x_1}=\frac{\sqrt{R(x_1)}-\sqrt{R(x_2)}}{x_1-x_2}, \qquad (6)$$

что можетъ пригодиться при нѣкоторыхъ преобразованіяхъ].

Изъ предыдущаго достаточно ясно до какой степени натуральна каноническая форма подрадикальнаго полинома въ эллиптическихъ интегралахъ, найденная Эрмитомъ и принятая Вейерштрассомъ: мы показали три пути, приводящіе къ ней само собою. Поэтому въ дальнѣйшемъ мы будемъ держаться этой канонической формы подрадикальнаго полинома. Съ прежней формой канонической Лежандра-Якоби, читатель будетъ имѣть случай познакомиться въ одной изъ слѣдующихъ главъ, когда къ ней приведетъ естественный ходъ изслѣдованій.

ГЛАВА VI.

Обращеніе эллиптическихъ интеграловъ. Функція $\wp(u)$.

73. До сихъ поръ, мы слѣдуя Лежандру, разсматривали интегралы какъ функціи ихъ верхняго предѣла; но наиболѣе плодотворною идеей въ развитіи занимающей насъ теоріи была идея Абеля и Якоби —разсматривать не интегралъ перваго рода какъ функцію его верхняго предѣла, но наоборотъ верхній предѣлъ этого интеграла какъ функцію его значенія, подобно тому какъ въ теоріи тригонометрическихъ функцій не интегралъ

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$$

разсматривается какъ функція его предѣла, но наоборотъ предѣлъ его x какъ функція его значенія:

$$x = \sin u.$$

Остановившись на Эрмитъ-Вейерштрассовской канонической формѣ подрадикальнаго полинома:

$$S = 4s^3 - g_2 s - g_3, \tag{1}$$

мы положимъ вмѣстѣ съ Вейерштрассомъ:

$$u = \int_s^\infty \frac{ds}{\sqrt{S}}. \tag{2}$$

Различнымъ значеніямъ s будутъ отвѣчать различныя значенія u, и какъ видно изъ (5) § 36 [и (4) § 32] одному опредѣленному s бу-

детъ отвѣчать безчисленное множество значеній u, заключающихся въ формулѣ

$$\int_{s}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{S}} = u + 2m\omega + 2n\omega', \tag{3}$$

гдѣ уже u обозначаетъ значеніе, отвѣчающее какому либо опредѣленному пути интегрированія, а ω и ω' опредѣляются по формуламъ (19) § 61 при m и n какихъ-либо цѣлыхъ числахъ, положительныхъ или отрицательныхъ; но наоборотъ, каждому значенію u будетъ отвѣчать одно опредѣленное значеніе s, ибо иначе имѣли бы

$$0 = \int_{s}^{s'} \frac{ds}{\sqrt{S}}, \tag{4}$$

что невозможно иначе, какъ при $s' = s$ и такомъ пути интегрированія, который можетъ быть стянутъ въ одну точку, не переходя чрезъ точки e_1, e_2, e_3, $O'(\infty)$—развѣтвленія функціи $\sqrt{S}$. Въ самомъ дѣлѣ, мы можемъ любую точку пути отъ s къ s' соединить съ точкою O' Римановой сферы, чтобы интегрировать отъ s до этой точки и отъ нея до точки O'; другой разъ отъ s' до нея и далѣе по тому же пути до O'; послѣдняя часть общая; по (4) слѣдовательно интегралы отъ s и s' до произвольной точки ихъ соединяющей линіи должны были бы быть равны, какъ бы эта точка ни была выбрана, что очевидно нелѣпо, ибо когда отъ одного интеграла часть передадимъ къ другому, равенство между ними не можетъ сохраниться. Слѣдовательно можемъ сказать, что s есть *функція отъ u* и притомъ *однозначная*, принимающая одно и тоже значеніе s для безчисленнаго множества значеній аргумента, выражаемыхъ формулою:

$$u + 2m\omega + 2n\omega', \tag{5}$$

гдѣ u одно какое либо опредѣленное значеніе аргумента, ω и ω' опредѣляются выше-упомянутыми формулами, а m и n какія либо цѣлыя числа, положительныя или отрицательныя.

Въ безконечность эта функція обращается только при $u = 0$, либо на основаніи (5) при

$$u = 2\tilde{\omega} = 2m\omega + 2n\omega', \tag{6}$$

(какъ то слѣдуетъ изъ вышесдѣланнаго замѣчанія); для другихъ же значеній u конечна. Эту функцію s отъ u, мы обозначимъ по Вейерштрассу чрезъ $\wp(u)$, такъ что, слѣдовательно, будетъ:

$$s = \wp(u). \tag{7}$$

На основаніи сейчасъ сказаннаго будемъ имѣть:

$$s = \wp(u) = \wp(u + 2\tilde{\omega}), \tag{8}$$

$$s = \wp(0) = \wp(2\tilde{\omega}) = \infty. \tag{9}$$

Изъ формулъ (19) § 61 будетъ слѣдовать:

$$e_1 = \wp(\omega), \qquad e_2 = \wp(\omega''), \qquad e_3 = \wp(\omega'). \tag{10}$$

Если въ интегралѣ (2) мы замѣнимъ путь интегрированія отъ s до ∞ соотвѣтственнымъ путемъ, взятымъ въ другомъ листѣ Римановой сферы, то въ каждомъ элементѣ интеграла $\sqrt{S}$ перемѣнитъ свой знакъ на противный и слѣдовательно весь интегралъ обратится въ $-u$:

$$-u = \int_s^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{S}}, \tag{11}$$

гдѣ только знакъ $\sqrt{S}$ уже противный предыдущему, а s тоже самое, какъ и во (2); отсюда слѣдуетъ:

$$s = \wp(-u); \tag{12}$$

сравнивая съ (8), находимъ:

$$s = \wp(-u) = \wp(u), \tag{13}$$

т. е. функція $\wp(u)$ есть четная функція отъ u.

Послѣднее равенство можно еще такъ написать:

$$s = \wp(\pm u), \tag{14}$$

и тогда по (8) будемъ имѣть:

$$s = \wp(\pm u + 2\tilde{\omega}), \tag{15}$$

гдѣ такимъ образомъ

$$\pm u + 2\tilde{\omega} \tag{16}$$

представитъ всю совокупность тѣхъ значеній u, для которыхъ $\wp(u)$ принимаетъ данное значеніе s. Давая въ (8) m и n значенія: $(1,0)$ и $(0,1)$, мы получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \wp(u+2\omega) &= \wp(u); \\ \wp(u+2\omega') &= \wp(u); \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

эти уравненія показываютъ, что $\wp(u)$ есть двоякопеによる періодическая функція отъ u съ періодами 2ω и $2\omega'$. Болѣе общее уравненіе (8) получается отсюда какъ слѣдствіе. Перемѣняя въ первомъ изъ (17) u на $u+2\omega$, и повторяя это $m-1$ разъ, будемъ имѣть, подставляя изъ каждого имѣющаго получиться равенства въ слѣдующее, такое равенство:

$$\wp(u+2m\omega) = \wp(u); \tag{18}$$

точно также изъ второго (17) получимъ:

$$\wp(u+2n\omega') = \wp(u); \tag{19}$$

перемѣная здѣсь u на $u+2m\omega$, по (18) будемъ имѣть:

$$\wp(u+2m\omega+2n\omega') = \wp(u), \tag{20}$$

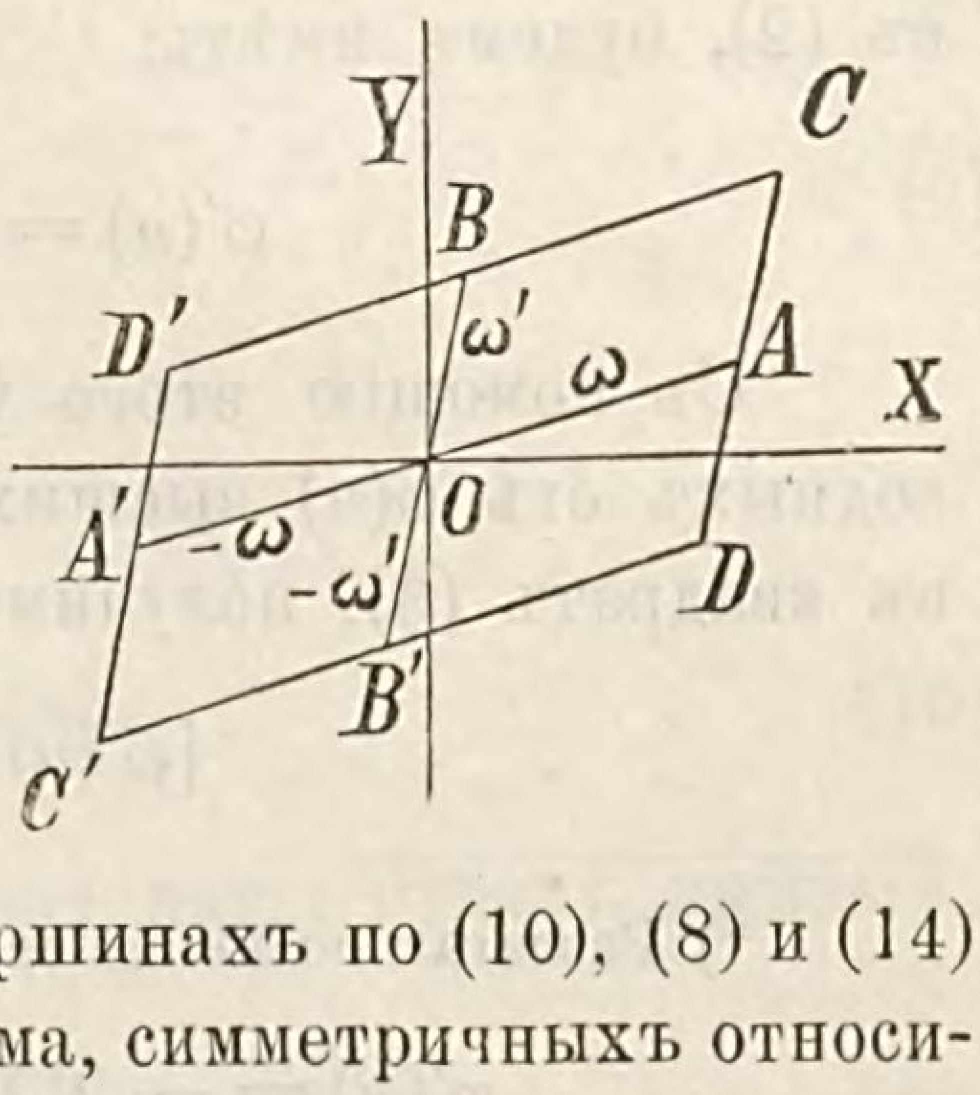
или по (6):

$$\wp(u+2\bar{\omega}) = \wp(u), \tag{21}$$

что тождественно (8). Періоды неравны,—ибо иначе изъ (1) слѣдовало бы въ виду однозначности функціи $\wp(u)$, что

$$e_1 = e_3,$$

и такимъ образомъ полиномъ S имѣлъ бы равные корни, вопреки предположенію,—и вообще оба комплексныя величины. Построивъ точки, отвѣчающія $\pm\omega$ и $\pm\omega'$, проведемъ черезъ первыя точки прямыя параллельныя прямой соединяющей вторыя, и чрезъ вторыя, прямыя, параллельныя прямой соединяющей первыя: эти двѣ пары параллельныхъ прямыхъ образуютъ *параллелограммъ* періодовъ функціи $\wp(u)$. Въ центрѣ этого параллелограмма будетъ $\wp(u)$ обращаться по (9) въ безконечность, въ серединахъ сторонъ по (10) и (14) принимать значенія e_1 и e_3, въ вершинахъ по (10), (8) и (14) значеніе e_2. Въ двухъ точкахъ параллелограмма, симметричныхъ относительно его центра, какъ $+u$ и $-u$, по (14) $\wp(u)$ будетъ имѣть оди-



накія значенія; слѣдовательно внутри параллелограмма функція $\wp(u)$ каждое значеніе будетъ принимать въ двухъ точкахъ; въ безконечность обращаться, какъ уже упомянуто, въ центрѣ параллелограмма, но за то, какъ увидимъ, второго порядка: въ ∞^2; слѣдовательно въ центрѣ параллелограмма совпадаютъ двѣ безконечности этой функціи. Прежде чѣмъ это показать, кончимъ о параллелограммахъ періодовъ: если на продолженныхъ въ обѣ стороны двухъ исходящихъ изъ общей вершины сторонахъ отложимъ неопредѣленное число разъ длины самихъ сторонъ, и чрезъ точки дѣленія каждой проведемъ неограниченныя прямыя соотвѣтственно параллельныя другой, то эти послѣднія раздѣлятъ всю неограниченную плоскость на ряды параллелограммовъ, конгруентныхъ первому, имѣющихъ свои центры въ точкахъ (6); въ соотвѣтственныхъ точкахъ всѣхъ этихъ параллелограммовъ функція $\wp(u)$ будетъ принимать во всѣхъ одно и тоже значеніе; въ частности въ центрахъ параллелограммовъ по (9) обращаться въ ∞^2. Такимъ образомъ по (8) каждый параллелограммъ представитъ повтореніе перваго относительно системы значеній функціи $\wp(u)$. Сперва построенный нами параллелограммъ, центръ котораго въ точкѣ $u=0$, мы будемъ называть *первымъ* параллелограммомъ періодовъ.

74. Дифференцируя (2) пред. §, по (7) его же будемъ имѣть:

$$\frac{ds}{du}=\wp'(u)=-\sqrt{S}, \tag{1}$$

или вводя вмѣсто S его выраженіе:

$$\frac{ds}{du}=-\sqrt{4s^3-g_2s-g_3}\,; \tag{2}$$

это дифференціальное уравненіе вмѣстѣ съ условіемъ обращаться s въ ∞ при $u=0$, вполнѣ опредѣляетъ эту функцію. Вводя $\wp(u)$ вмѣсто s въ (2), будемъ имѣть:

$$\wp'(u)=-\sqrt{4\wp^3(u)-g_2\wp(u)-g_3}\,.\ ^{*)} \tag{3}$$

Съ помощію этого уравненія легко получить выраженія производныхъ отъ $\wp(u)$ высшихъ порядковъ чрезъ $\wp(u)$ и $\wp'(u)$. Возвышая въ квадратъ (3), получимъ:

$$[\wp'(u)]^2=4\wp^3(u)-g_2\wp(u)-g_3\,; \tag{4}$$

*) Разлагая полиномъ на множители, будемъ имѣть также:

$$\wp'(u)=-2\cdot\sqrt{\wp(u)-e_1}\cdot\sqrt{\wp(u)-e_2}\cdot\sqrt{\wp(u)-e_3}\,. \tag{α}$$

дифференцируя и дѣля на $2\wp'(u)$, получимъ:

$$\wp''(u) = 6\wp^2(u) - \frac{1}{2} g_2, \tag{5}$$

такъ что производная второго порядка выражается раціонально чрезъ $\wp(u)$, и именно полиномомъ второй степени относительно $\wp(u)$. Дифференцируя еще разъ, получимъ:

$$\wp'''(u) = 12\wp(u)\wp'(u); \tag{6}$$

слѣдовательно эта производная выражается раціонально чрезъ $\wp(u)$ и $\wp'(u)$, именно равна произведенію функціи первой степени относительно $\wp(u)$ на производную отъ $\wp(u)$ перваго порядка, т. е. на $\wp'(u)$. Дифференцируя (7), и внося вмѣсто $[\wp'(u)]^2$ и $\wp''(u)$ ихъ значенія изъ (5) и (6), послѣ приведенія подобныхъ членовъ будемъ имѣть:

$$\wp^{\text{IV}}(u) = 120\wp^3(u) - 18g_2\wp(u) - 12g_3, \tag{7}$$

т. е. производная 4-го порядка есть раціональная функція третьей степени относительно $\wp(u)$. Отсюда видно, что всѣ производныя четнаго порядка выразятся раціонально чрезъ $\wp(u)$, именно цѣлыми функціями отъ $\wp(u)$, а производныя нечетнаго порядка будутъ имѣть видъ произведенія цѣлой раціональной функціи отъ $\wp(u)$ на $\wp'(u)$. Допустивъ справедливость этого закона до порядковъ $2k-1$ и $2k$ производныхъ, докажемъ, что онъ будетъ справедливъ и для слѣдующихъ порядковъ $2k+1$ и $2k+2$.

Итакъ пусть:

$$\wp^{(2k-1)}(u) = f[\wp(u)]\wp'(u); \tag{8}$$

$$\wp^{(2k)}(u) = F[\wp(u)], \tag{9}$$

гдѣ f и F цѣлыя раціональныя функціи отъ $\wp(u)$.

Дифференцируя послѣднее, получимъ:

$$\wp^{(2k+1)}(u) = F'[\wp(u)]\wp'(u), \tag{10}$$

— слѣдовательно вида (8); дифференцируя еще разъ, будемъ имѣть:

$$\wp^{(2k+2)}(u) = F''[\wp(u)][\wp'(u)]^2 + F'[\wp(u)]\wp''(u); \tag{11}$$

подставляя сюда вмѣсто $[\wp'(u)]^2$ и $\wp''(u)$ ихъ выраженія черезъ $\wp(u)$ изъ (5) и (6), получимъ:

$$\wp^{(2k+2)}(u) = \Phi[\wp(u)], \tag{12}$$

гдѣ Φ цѣлая раціональная функція отъ $\wp(u)$ степени на единицу выше, чѣмъ F въ (9). Дифференцируя еще разъ, получимъ:

$$\wp^{(2k+3)}(u) = \Phi'[\wp(u)]\wp'(u), \tag{13}$$

гдѣ $\Phi'[\wp(u)]$ будетъ раціональная функція степени на единицу выше чѣмъ $F'[\wp(u)]$. Такимъ образомъ не только предложеніе доказано, но можно изъ предыдущаго вывести и формулу для показателя степени этихъ функцій относительно $\wp(u)$. Въ самомъ дѣлѣ, мы видѣли, что $\wp''(u)$ выражается чрезъ $\wp(u)$ полиномомъ 2-ой степени; такъ какъ степени этихъ полиномовъ повышаются на единицу съ увеличеніемъ порядка производной на 2 единицы, то замѣчаемъ, что $\wp^{(IV)}(u)$ выразится полиномомъ третьей степени, $\wp^{(VI)}(u)$ полиномомъ 4-ой, и т. д., вообще $\wp^{(p)}(u)$ при p четномъ, полиномомъ степени $\frac{p}{2}+1$. Далѣе $\wp'''(u)$ выражается произведеніемъ полинома первой степени относительно $\wp(u)$ на $\wp'(u)$; $\wp^{(V)}(u)$ произведеніемъ на $\wp'(u)$ полинома второй степени относительно $\wp(u)$, и вообще $\wp^{(q)}(u)$ при q нечетномъ произведеніемъ на $\wp'(u)$ полинома степени $\frac{q-1}{2}$ относительно $\wp(u)$.

75. Вычисляя значенія послѣдовательныхъ производныхъ отъ $\wp(u)$ для какой либо точки u_0 при помощи формулъ предыдущаго §, мы можемъ получить разложеніе интеграла уравненія (3) пред. § въ рядъ по степенямъ $u-u_0$, которое будетъ сходящимся внутри нѣкотораго круга съ центромъ въ u_0. Взявъ внутри его какую либо эксцентричечкую точку u_1, мы съ помощію полученнаго разложенія по степенямъ $u-u_0$ можемъ вычислить значеніе $\wp(u_1)$ и всѣхъ ея производныхъ въ точкѣ u_1, и потому составить разложеніе $\wp(u)$ по степенямъ $u-u_1$, которое будетъ сходящимся внутри нѣкотораго другого круга съ центромъ въ u_1, часть котораго будетъ общая для обоихъ круговъ сходимости, но остальная будетъ заключать въ себѣ новую область. Такъ мы можемъ продолжать вычисленія какъ угодно далеко отъ u_0, пока мы не приблизимся къ какой либо изъ критическихъ точекъ: $u=\omega$, $u=\omega''$, $u=\omega'$, и $u=0$ функціи $\wp'(u)$. Но и вблизи этихъ точекъ функція $\wp(u)$ сохранитъ свою однозначность. Въ самомъ дѣлѣ:

$$S = 4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3); \tag{1}$$

полагая

$$s - e_1 = t^2 , \tag{2}$$

слѣдовательно

$$s = e_1 + t^2 \tag{3}$$

$$ds = 2tdt , \tag{4}$$

мы получимъ изъ (1) § 74:

$$\frac{ds}{du} = 2t . \frac{dt}{du} = - \sqrt{4t^2(e_1 - e_2 + t^2)(e_1 - e_3 + t^2)} , \tag{5}$$

и сокращая на $2t$

$$\frac{dt}{du} = - \sqrt{(e_1 - e_2 + t^2)(e_1 - e_3 + t^2)} ; \tag{5'}$$

отсюда для t получится рядъ, расположенный по цѣлымъ положительнымъ степенямъ u, ибо $t = 0$ не критическая точка радикала. Слѣдовательно t вблизи 0 однозначная функція отъ u; а слѣдовательно по (2) и s однозначная функція отъ u. Также докажется, что функція s остается однозначною и вблизи прочихъ корней полинома (1). Что же касается точки $u = 0$, въ которой $s = \wp(u)$ обращается въ ∞, то полагая

$$s = \frac{1}{t^2} \tag{6}$$

и внося это въ выраженіе S [(1) § 73], мы получимъ:

$$S = \frac{1}{t^6}(4 - g_2 t^4 - g_3 t^6) ; \tag{7}$$

изъ (6) выводимъ:

$$ds = -2\frac{dt}{t^3} ; \tag{8}$$

внося во (2) пред. §, по раздѣленіи на $-\frac{2}{t^3}$ обѣихъ частей, получимъ:

$$\frac{dt}{du} = \sqrt{1 - \frac{1}{4} g_2 t^4 - \frac{1}{4} g_3 t^6} ; \tag{9}$$

для этого выраженія $t=0$ не есть критическая точка, а потому уравненіе имѣетъ вблизи его интегралъ, способный быть разложеннымъ по степенямъ u, и слѣдовательно представляющій однозначную функцію этой перемѣнной; а слѣдовательно, по (6) и s вблизи $u=0$, хотя и обращается въ ∞, и притомъ *второго порядка*, для $u=0$, $(t=0)$, но вблизи его будетъ однозначная функція u.

Способъ, которымъ мы сейчасъ доказали однозначность функціи $\wp(u)$ на всей неограниченной плоскости (u) принадлежитъ Бріо и Букэ. Вейерштрассъ указалъ на одинъ недостатокъ этого доказательства: при продолженіи функціи при помощи рядовъ, круги сходимости которыхъ имѣютъ своимъ центромъ какую-либо точку круга сходимости прежняго ряда, можетъ случиться, что радіусы послѣдовательныхъ круговъ сходимости, начиная съ нѣкотораго, постепенно убываютъ до нуля: въ этомъ случаѣ мы приближаемся къ границѣ функціи, за которую она не можетъ быть продолжена; надобно показать, что въ случаѣ нашего уравненія такого безпрерывнаго уменьшенія радіусовъ послѣдовательныхъ круговъ сходимости нѣтъ. *Пикаръ* *) (E. Picard) устранилъ этотъ недостатокъ доказательства Бріо и Бука, показавъ, что продолженіе функціи можно вести кругами одинаковаго радіуса неравнаго нулю; для этого нужно было показать, что существуетъ наименьшій радіусъ, отличный отъ нуля. Онъ выдѣляетъ съ этою цѣлью изъ Римановой сферы всѣ точки e_1, e_2, e_3, O', описавъ около нихъ круги конечныхъ радіусовъ, достаточно-малыхъ для того чтобы эти круги не встрѣчались: для всей остальной области продолженіе возможно и такой наименьшій, отличный отъ нуля, радіусъ существуетъ и можетъ быть найденъ; равнымъ образомъ тоже можно сдѣлать и для исключенныхъ областей при помощи нашихъ подстановокъ: можно найти для каждой функціи t такой наименьшій радіусъ, съ помощію котораго можно продолжать эту функцію t отъ u внутри соотвѣтственнаго круга; изъ всѣхъ этихъ пяти радіусовъ мы выберемъ наименьшій: съ помощію его можно будетъ продолжать функцію рядами, сходящимися въ послѣдовательныхъ кругахъ этого самаго радіуса.

Итакъ $\wp(u)$ дѣйствительно однозначная функція отъ u на всей неограниченной плоскости u.

76. При помощи (9) предыдущаго § можно опредѣлить способъ обращенія функціи $\wp(u)$ въ безконечность при $u=0$. Изъ него имѣемъ:

*) Въ Bulletin des sciences mathetiques. Darboux. T. XIV (Mai) 1890 г.

$$du = (1 - \frac{1}{4} g_2 t^4 - \frac{1}{4} g_3 t^6)^{-\frac{1}{2}} dt, \tag{1}$$

или, разлагая въ рядъ:

$$du = [1 - \frac{1}{4} t^4 (g_2 + g_3 t^2)]^{-\frac{1}{2}} dt = [1 + \frac{1}{8} t^4 (g_2 + g_3 t^2) + \ldots] dt,$$

или, короче:

$$du = [1 + t^4 \mathfrak{P}(t^2)] dt; \tag{2}$$

отсюда, интегрируя отъ $u = 0$, слѣдовательно и $t = 0$, получимъ:

$$u = t + t^5 \mathfrak{P}_1(t^2); \tag{3}$$

обращая рядъ, находимъ:

$$t = u - u^5 \mathfrak{P}_2(u^2); \tag{4}$$

слѣдовательно

$$s = \frac{1}{t^2} = [u - u^5 \mathfrak{P}_2(u^2)]^{-2}, \tag{5}$$

или по (7) § 73:

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} [1 - u^4 \mathfrak{P}_2(u^2)]^{-2} =$$

$$= \frac{1}{u^2} [1 + 2u^4 \mathfrak{P}_2(u^2) + \ldots] =$$

$$= \frac{1}{u^2} + u^2 \mathfrak{P}_3(u^2);$$

итакъ вблизи $u = 0$, имѣемъ:

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + u^2 \mathfrak{P}(u^2). \tag{6}$$

Отсюда находимъ:

$$\text{пред.} \left\{ u^2 \wp(u^2) \right\}_{u=0} = +1; \tag{7}$$

$$\text{пред.} \left\{ \wp(u) - \frac{1}{u^2} \right\}_{u=0} = 0. \tag{8}$$

Нетрудно вывести отсюда соотвѣтственныя формулы для прочихъ параллелограммовъ.

Мы имѣемъ:

$$\wp(u+2\tilde{\omega})=\wp(u)=\frac{1}{u^2}+u^2\mathfrak{P}(u^2); \tag{9}$$

при u достаточно-маломъ; полагая

$$u+2\tilde{\omega}=u', \tag{10}$$

и вводя въ предыдущее равенство u', мы будемъ имѣть:

$$\wp(u')=\frac{1}{(u'-2\tilde{\omega})^2}+(u'-2\tilde{\omega})^2\mathfrak{P}[(u'-2\tilde{\omega})^2]; \tag{11}$$

отсюда получимъ:

$$\text{пред.}\left\{(u'-2\tilde{\omega})^2\wp(u')\right\}_{u'=2\tilde{\omega}}=+1; \tag{12}$$

$$\text{пред.}\left\{\wp(u')-\frac{1}{(u'-2\tilde{\omega})^2}\right\}_{u'=2\tilde{\omega}}=0; \tag{13}$$

Такимъ образомъ мы доказали сказанное въ § 73, что въ центрахъ параллелограммовъ періодовъ функція $\wp(u)$ обращается въ ∞^2, ибо она обращается въ ∞ какъ:

$$\frac{1}{(u'-2\tilde{\omega})^2} \tag{14}$$

при $u'=2\tilde{\omega}$. Дифференцируя (11) по u', получимъ:

$$\wp'(u')=-\frac{2}{(u'-2\tilde{\omega})^3}+(u'-2\tilde{\omega})\mathfrak{P}_0[(u'-2\tilde{\omega})^2]; \tag{15}$$

отсюда находимъ:

$$\text{пред.}\left\{(u'-2\tilde{\omega})^3\wp'(u')\right\}_{u'=2\tilde{\omega}}=-2; \tag{16}$$

$$\text{пред.}\left\{\wp'(u')+\frac{2}{(u'-2\tilde{\omega})^3}\right\}_{u'=2\tilde{\omega}}=0. \tag{17}$$

Для $m=0$, $n=0$ это обращается въ такія:

$$\text{пред.}\left\{u^3\wp'(u)\right\}_{u=0} = -2\,; \tag{18}$$

$$\text{пред.}\left\{\wp'(u)+\frac{2}{u^3}\right\}_{u=0} = 0\,. \tag{19}$$

77. При такомъ опредѣленіи функціи $\wp(u)$, т. е. при помощи дифференціальнаго уравненія (3) § 74 и условія обращаться въ ∞ при $u=0$, ея двоякая періодичность получится при помощи подстановки § 9, примѣненной къ полиному S. Теперь мы имѣемъ:

$$S = 4s^3 - g_2 s - g_3 s = 4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)\,, \tag{1}$$

—откуда между прочимъ чрезъ сравненіе коэффиціентовъ обѣихъ частей при одинаковыхъ степеняхъ s получаются такія соотношенія между корнями и величинами g_2 и g_3:

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0\,; \tag{2}$$

$$e_2 e_3 + e_3 e_1 + e_1 e_2 = -\frac{1}{4} g_2\,, \tag{3}$$

$$e_1 e_1 e_3 = \frac{1}{4} g_3\,; \tag{4}$$

—слѣдовательно подстановка § 9 принимаетъ такой видъ:

$$s - e_i = \frac{(e_i - e_j)(e_i - e_k)}{s' - e_i}\,, \tag{5}$$

гдѣ s' новая перемѣнная. Чрезъ это получится:

$$-du = \frac{ds}{\sqrt{S}} = -\frac{ds'}{\sqrt{S'}}, \tag{6}$$

гдѣ

$$S' = 4s'^3 - g_2 s' - g_3\,; \tag{7}$$

при этомъ значеніямъ перемѣнной s:

$$e_i,\quad e_j,\quad e_k,\quad \infty, \tag{8}$$

отвѣчаютъ такія значенія s':

$$\infty,\quad e_k,\quad e_j,\quad e_i\,. \tag{9}$$

Отсюда, какъ въ § (32), найдемъ:

$$\int_{e_i}^{e_j} \frac{ds}{\sqrt{S}} = \int_{e_k}^{\infty} \frac{ds'}{\sqrt{S'}} = \omega_k. \tag{10}$$

Если примемъ здѣсь одинъ разъ $i=2$, $j=3$, слѣдовательно $k=1$, другой разъ $i=2$, $j=1$, слѣдовательно $k=3$, то получимъ:

$$\int_{e_2}^{e_3} \frac{ds}{\sqrt{S}} = \int_{e_1}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{S}} = \omega, \tag{11}$$

$$\int_{e_2}^{e_1} \frac{ds}{\sqrt{S}} = \int_{e_3}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{S}} = \omega'. \tag{12}$$

Если принять $i=1$, $j=3$, то $k=2$, и мы будемъ имѣть:

$$\int_{e_1}^{e_3} \frac{ds}{\sqrt{S}} = \int_{e_2}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{S}} = \omega'', \tag{13}$$

гдѣ интегрированіе въ лѣвой части пойдетъ въ нижнемъ листѣ, когда въ правой оно идетъ въ верхнемъ, ибо по (5) s и s' одновременно перемѣщаются въ разныя стороны; но

$$\int_{e_1}^{e_3} \frac{ds}{\sqrt{S}} = \int_{e_1}^{e_2} \frac{ds}{\sqrt{S}} + \int_{e_2}^{e_3} \frac{ds}{\sqrt{S}}; \tag{14}$$

на участкѣ перваго интеграла второй части $\sqrt{S}$ имѣетъ знакъ противный, на участкѣ второго одинакій съ его знакомъ въ верхнемъ листѣ; если въ (14) желаемъ подъ $\sqrt{S}$ разумѣть его значеніе въ верхнемъ листѣ, то передъ первымъ интеграломъ должны поставить (—), и тогда равенство (14) такъ перепишется:

$$\int_{e_1}^{e_3} \frac{ds}{\sqrt{S}} = -\int_{e_1}^{e_2} \frac{ds}{\sqrt{S}} + \int_{e_2}^{e_3} \frac{ds}{\sqrt{S}} = \int_{e_2}^{e_1} \frac{ds}{\sqrt{S}} + \int_{e_2}^{e_3} \frac{ds}{\sqrt{S}}, \tag{15}$$

или по (11) и (12):

$$\int_{e_1}^{e_3} \frac{ds}{\sqrt{S}} = \omega + \omega'; \tag{16}$$

сличая это съ (13), найдемъ:

$$\omega'' = \omega + \omega' \tag{17}$$

Положимъ теперь

$$\int_s^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{S}} = u \tag{18}$$

и $s = \wp(u)$; тогда будетъ по (11), (12) и (13):

$$e_1 = \wp(\omega); \quad e_2 = \wp(\omega''); \quad e_3 = \wp(\omega'). \tag{19}$$

Вернемся теперь къ (6), чтобы вывести другое слѣдствіе изъ него. Интегрируя его по s отъ s до ∞, слѣдовательно по s' отъ s' до e_i, мы получимъ:

$$u = \int_s^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{S}} = -\int_{s'}^{e_i} \frac{ds'}{\sqrt{S'}} = \int_{e_i}^{s'} \frac{ds'}{\sqrt{S'}} = \int_{e_i}^{\infty} \frac{ds'}{\sqrt{S'}} - \int_{s'}^{\infty} \frac{ds'}{\sqrt{S'}}; \tag{20}$$

если положить теперь:

$$v = \int_{s'}^{\infty} \frac{ds'}{\sqrt{S'}}, \tag{21}$$

то имѣя въ виду, что

$$\int_{e_i}^{\infty} \frac{ds'}{\sqrt{S'}} = \omega_i, \tag{22}$$

гдѣ смотря по значенію i:

$$\omega_i = \omega, \ \omega'', \ \omega', \tag{23}$$

равенство (20) мы можемъ такъ переписать:

$$u = \omega_i - v; \tag{24}$$

но, какъ

$$s = \wp(u), \tag{25}$$

такъ точно

$$s' = \wp(v); \tag{26}$$

внося это въ (5), получимъ:

$$\wp(u)-e_i=\frac{(e_i-e_j)(e_i-e_k)}{\wp(v)-e_i}\,; \tag{27}$$

внося сюда вмѣсто v его значеніе изъ (24) и имѣя въ виду четность функціи $\wp(u)$, (которая выведется какъ и въ § 73), мы будемъ имѣть:

$$\wp(u)-e_i=\frac{(e_i-e_j)(e_i-e_k)}{\wp(u-\omega_i)-e_i}\,; \tag{28}$$

перемѣняя здѣсь u на $u+\omega_i$, получимъ:

$$\wp(u+\omega_i)-e_i=\frac{(e_i-e_j)(e_i-e_k)}{\wp(u)-e_i}\,; \tag{29}$$

внося сюда вмѣсто $\wp(u)-e_i$ его значеніе изъ (28), получимъ:

$$\wp(u+\omega_i)-e_i=\wp(u-\omega_i)-e_i\,,$$

т. е.

$$\wp(u+\omega_i)=\wp(u-\omega_i)\,, \tag{30}$$

или, перемѣняя u на $u+\omega$:

$$\wp(u+2\omega_i)=\wp(u)\,, \tag{31}$$

что и выражаетъ періодичность функціи $\wp(u)$, которая будетъ двойная. Если $i=1$ и $i=3$, то отсюда будемъ имѣть:

$$\wp(u+2\omega)=\wp(u)\,; \tag{32}$$

$$\wp(u+2\omega')=\wp(u)\,; \tag{33}$$

третій же періодъ есть сложный изъ этихъ; оттого наша функція $\wp(u)$ есть двояко-періодическая. Періоды ω и ω' необходимо различны; дѣйствительно, допустивъ равенство

$$\omega=\omega'\,,$$

мы должны были бы по (19) принять

$$e_1=e_3\,,$$

а случай равенства двухъ корней полинома S, какъ приводящій къ логариѳмическимъ и круговымъ функціямъ, мы устранили изъ разсматриванія съ самаго начала.

78. Введемъ теперь перемѣнную u и ея функцію $\wp(u)$ въ нѣкоторыя формулы предыдущей главы. Полагая

$$\int_{s_i}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{S}} = u_i, \tag{1}$$

равенства (2′) и (3) § 61 преобразуются въ такія:

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0\,, \tag{2}$$

$$\wp(u_1) + \wp(u_2) + \wp(u_3) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(u_1) - \wp'(u_2)}{\wp(u_1) - \wp(u_2)}\right)^2. \tag{3}$$

Изъ (2) имѣемъ:

$$u_3 = -(u_1 + u_2)\,; \tag{4}$$

внося это въ (3), въ виду четности функціи $\wp(u)$ мы легко получимъ такое равенство:

$$\wp(u_1 + u_2) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(u_1) - \wp'(u_2)}{\wp(u_1) - \wp(u_2)}\right)^2 - \wp(u_1) - \wp(u_2). \tag{5}$$

Это равенство выражаетъ *теорему сложенія функціи* $\wp(u)$: значеніе этой функціи для аргумента, состоящаго изъ суммы двухъ слагаемыхъ, выражается раціонально чрезъ значенія функціи $\wp(u)$ и ея производной $\wp'(u)$ для каждаго изъ слагаемыхъ.—Перемѣняя здѣсь u_2 на $-u_2$, и имѣя въ виду четность $\wp(u)$ и слѣдовательно нечетность ея производной $\wp'(u)$, мы получимъ изъ (5) такое равенство:

$$\wp(u_1 - u_2) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(u_1) + \wp'(u_2)}{\wp(u_1) - \wp(u_2)}\right)^2 - \wp(u_1) - \wp(u_2). \tag{6}$$

79. Соотношеніе (13) § 57 легко приведется къ виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & S_1 & \sqrt{S_1} \\ 1 & S_2 & \sqrt{S_2} \\ 1 & S_3 & \sqrt{S_3} \end{vmatrix} = 0\,; \tag{1}$$

дѣйствительно для этого стоитъ только первый и послѣдній столбцы его умножить соотвѣтственно на A и $2A$; затѣмъ придать къ элементамъ перваго столбца полученнаго такимъ образомъ опредѣлителя произведеніе на $\frac{1}{3}B$ элементовъ второго столбца: тогда мы будемъ, по (4) и (5) § 61, имѣть лѣвую часть (1) настоящаго §, если только еще потомъ переставимъ столбцы первый и второй между собою. Вводя функцію $\wp(u)$ въ (1), мы получимъ по (1) § 74 слѣдующее:

$$\begin{vmatrix} 1 & \wp(u_1) & \wp'(u_1) \\ 1 & \wp(u_2) & \wp'(u_2) \\ 1 & \wp(u_3) & \wp'(u_3) \end{vmatrix} = 0\,, \tag{2}$$

или, раскрывая по элементамъ послѣдняго столбца:

$$\wp'(u_1)[\wp(u_2)-\wp(u_3)]+\wp'(u_2)[\wp(u_3)-\wp(u_1)]+\wp'(u_3)[\wp(u_1)-\wp(u_2)]=0\,; \tag{3}$$

раскрывая же по элементамъ послѣдней строки, получимъ:

$$[\wp(u_1)\wp'(u_2)-\wp(u_2)\wp'(u_1)]+[\wp'(u_1)-\wp'(u_2)]\wp(u_3)+[\wp(u_2)-\wp(u_1)]\wp'(u_3)=0; \tag{4}$$

отсюда находимъ:

$$\wp'(u_3)=\frac{\wp(u_1)\wp'(u_2)-\wp(u_2)\wp'(u_1)}{\wp(u_1)-\wp(u_2)}+\frac{\wp'(u_1)-\wp'(u_2)}{\wp(u_1)-\wp(u_2)}\wp(u_3)\,; \tag{5}$$

вставляя сюда вмѣсто $\wp(u_3)$ его выраженіе изъ (3) пред. §, вмѣсто u_3 его значеніе изъ (2) того же §, и умножая все на -1, въ виду нечетности функціи $\wp'(u)$ получимъ:

$$\wp'(u_1+u_2)=-\frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(u_1)-\wp'(u_2)}{\wp(u_1)-\wp(u_2)}\right)^3+\frac{\wp'(u_1)[\wp(u_1)+2\wp(u_2)]-\wp'(u_2)[2\wp(u_1)+\wp(u_2)]}{\wp(u_1)-\wp(u_2)}\,; \tag{6}$$

это равенство выражаетъ теорему сложенія функціи $\wp'(u)$.

80. Лѣвая часть уравненія (2) пред. § представляетъ, будучи отдѣльно разсматриваема, функцію трехъ независимыхъ перемѣнныхъ u_1, u_2, u_3, которую мы такъ означимъ:

$$\varphi(u_1, u_2, u_3) = \begin{vmatrix} 1 & \wp(u_1) & \wp'(u_1) \\ 1 & \wp(u_2) & \wp'(u_2) \\ 1 & \wp(u_3) & \wp'(u_3) \end{vmatrix}. \tag{1}$$

Если разсматривать только одну изъ этихъ перемѣнныхъ за таковую, напримѣръ u_3, а прочія за постоянныя, то это будетъ двоякопеаріодическая функція этой перемѣнной съ періодами 2ω и $2\omega'$; она будетъ обращаться въ ∞^3, какъ $\wp'(u_3)$ при $u_3 \equiv 0$, [т. е. въ точкахъ (u), отличныхъ на $2m\omega + 2n\omega'$ отъ 0], и въ 0^1 въ точкахъ $u_3 \equiv u_1$, $u_3 \equiv u_2$, $u_3 \equiv -(u_1 + u_2)$ *). Первое ясно, ибо опредѣлитель будетъ имѣть тогда двѣ строки тождественныя; послѣднее будетъ слѣдовать изъ (2) пред. §. Этотъ результатъ можно обобщить, построивъ функцію:

$$\varphi(u_1, u_2, \ldots u_\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & \wp(u_1) & \wp'(u_1) & \ldots \wp^{(\lambda-2)}(u_1) \\ 1 & \wp(u_2) & \wp'(u_2) & \ldots \wp^{(\lambda-2)}(u_2) \\ 1 & \wp(u_3) & \wp'(u_3) & \ldots \wp^{(\lambda-2)}(u_3) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \wp(u_{\lambda-1}) & \wp'(u_{\lambda-1}) & \ldots \wp^{(\lambda-2)}(u_{\lambda-1}) \\ 1 & \wp(u_\lambda) & \wp'(u_\lambda) & \ldots \wp^{(\lambda-2)}(u_\lambda) \end{vmatrix}; \tag{2}$$

эта функція одинаковаго характера по отношенію къ перемѣннымъ $u_1, u_2, \ldots u_\lambda$. Если разсматривать только одну изъ нихъ, напримѣръ послѣднюю за перемѣнную, а прочія за постоянныя, то это будетъ функція отъ u_λ двоякопеpіодическая съ періодами 2ω и $2\omega'$, обращающаяся въ ∞^λ, какъ $\wp^{(\lambda-2)}(u_\lambda)$, въ точкахъ $u_1 \equiv 0$, и въ 0^1 въ точкахъ:

$$u_\lambda \equiv u_1, \quad u_2, \ldots u_{\lambda-1} \tag{3}$$

и

$$u \equiv -(u_1 + u_2 + \ldots + u_{\lambda-1}). \tag{4}$$

*) Знакъ $\equiv$, поставленный между двумя величинами, отселѣ и впредь будетъ всегда указывать на то, что эти величины могутъ разниться только на линейную съ цѣлыми коэффиціентами функцію періодовъ.

Относительно точекъ (3) это ясно, ибо по двѣ строки въ опредѣлителѣ (2) будутъ тождественныя; относительно (4) это слѣдуетъ изъ теоремы Абеля и общихъ выраженій производныхъ отъ $\wp(u)$ высшихъ порядковъ чрезъ саму функцію и ея производную перваго порядка. Возьмемъ цѣлую, однозначную на Римановой поверхности для $\sqrt{S}$ функцію

$$y = \varphi(s) + \psi(s)\sqrt{S} \tag{5}$$

степени λ; въ этомъ случаѣ степени $\varphi(s)$ и $\psi(s)$, которыя означимъ чрезъ m и n, будутъ соотвѣтственно, или $m = \frac{\lambda}{2}$ и $n = \frac{\lambda}{2} - 2$; или $m = \frac{\lambda - 1}{2}$, $n = \frac{\lambda - 3}{2}$, смотря потому, будетъ-ли λ четное или нечетное. Тогда мы будемъ имѣть:

$$\sum_{i=1}^{i=\lambda} \int_{s_i}^{\infty} \frac{ds_i}{\sqrt{S_i}} = 0, \tag{6}$$

или

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_\lambda = 0, \tag{7}$$

полагая

$$u_i = \int_{s_i}^{\infty} \frac{ds_i}{\sqrt{S_i}}. \tag{8}$$

Здѣсь $u_1, u_2, \ldots u_{\lambda-1}$ задаются произвольно; слѣдовательно можно сказать тоже и про величины:

$$s_1 = \wp(u_1), \quad s_2 = \wp(u_2), \ldots s_{\lambda-1} = \wp(u_{\lambda-1}). \tag{9}$$

По этимъ даннымъ опредѣлятся коэффиціенты полиномовъ $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ изъ уравненій:

$$0 = \varphi(s_i) + \psi(s_i)\sqrt{S_i}, \quad (i = 1, 2, 3, \ldots \lambda - 1). \tag{10}$$

Тогда извѣстнымъ образомъ найдется и s_λ, а затѣмъ и $\sqrt{S_\lambda}$ изъ уравненія:

$$0 = \varphi(s_\lambda) + \psi(s_\lambda)\sqrt{S_\lambda}, \tag{11}$$

когда вмѣсто коэффиціентовъ полиномовъ $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ подставимъ ихъ значенія изъ уравненій (10); но какъ (10) и (11) линейны относительно этихъ коэффиціентовъ, то уравненіе для опредѣленія корня $\sqrt{S_\lambda}$ полу-

чится чрезъ исключеніе этихъ коэффиціентовъ изъ уравненій (10) и (11) въ формѣ опредѣлителя, i-ая строка котораго будетъ состоять изъ элементовъ вида:

$$\text{I) } s_i^p \quad \text{и} \quad \text{II) } s_i^q\sqrt{S_i} = -s_i^q\frac{ds_i}{du};$$

гдѣ p и q цѣлыя положительныя числа отъ 0 до m и n соотвѣтственно. Но члены этого вида входятъ по § 74 [послѣ формулы (13)] въ выраженія производныхъ отъ $\wp(u)$ до порядковъ $2(m-1)$ и $2n+1$; смотря потому, четное-ли λ или нечетное, первое или второе изъ этихъ чиселъ будетъ наибольшее и $=\lambda-2$; при этомъ въ эти выраженія они входятъ линейно; а потому, наоборотъ, и эти элементы нашего опредѣлителя, вида I) и II), выразятся линейно чрезъ $\wp(u)$ и ея производныя до порядка $\lambda-2$ включительно, понятно, формулами одинакими для всякого i; а потому этотъ опредѣлитель на основаніи извѣстныхъ свойствъ его приведется къ опредѣлителю (2) и будетъ тождественно равенъ нулю, когда вмѣсто s_λ подставимъ $\wp(u_\lambda)$, гдѣ u_λ опредѣляется изъ (4).

81. Разсмотримъ теперь нѣкоторыя преобразованія основныхъ формулъ § 79 и производныя отъ нихъ формулы, которыя будутъ намъ нужны впослѣдствіи, между прочимъ и въ слѣдующей главѣ. Формулы (5) и (6) § 78 можно написать вмѣстѣ при помощи двойнаго знака такимъ образомъ:

$$\wp(u_1 \pm u_2) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(u_1) \mp \wp'(u_2)}{\wp(u_1)-\wp(u_2)}\right)^2 - \wp(u_1) - \wp(u_2); \tag{1}$$

раскрывая скобки въ числителѣ перваго члена, приводя къ одному знаменателю и подставляя вмѣсто $[\wp'(u)]^2$ его выраженіе чрезъ $\wp(u)$, мы получимъ послѣ приведенія подобныхъ членовъ и сокращеній результатъ такого вида:

$$\wp(u_1 \pm u_2) = \frac{2[\wp(u_1)\wp(u_2) - \frac{1}{4}g_2][\wp(u_1)+\wp(u_2)] - g_3 \mp \wp'(u_1)\wp'(u_2)}{2[\wp(u_1)-\wp(u_2)]^2}; \tag{2}$$

беря сумму и разность, соединенныхъ здѣсь равенствъ, получимъ слѣдующія два:

$$\wp(u_1+u_2)+\wp(u_1-u_2) = \frac{2[\wp(u_1)\wp(u_2) - \frac{1}{4}g_2][\wp(u_1)+\wp(u_2)] - g_3}{[\wp(u_1)-\wp(u_2)]^2}; \tag{3}$$

$$\wp(u_1+u_2)-\wp(u_1-u_2)=-\frac{\wp'(u_1)\wp'(u_2)}{[\wp(u_1)-\wp(u_2)]^2}=-\frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2}\log[\wp(u_1)-\wp(u_2)], \quad (4)$$

[послѣднее можно получить и прямо вычитая (6) § 78 изъ (5) того же §; складывая же ихъ для полученія (3) настоящаго §, все же намъ пришлось бы сдѣлать исключеніе $[\wp'(u)]^2$, какъ то пришлось намъ сдѣлать для полученія (2)]. Новыя формулы мы получимъ, комбинируя (5) § 78 съ (5) § 79. Дифференцируя (5) по u_1, мы получимъ:

$$\wp'(u_1+u_2)=\frac{1}{2}\left(\frac{\wp'(u_1)-\wp'(u_2)}{\wp(u_1)-\wp(u_2)}\right)\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{\wp'(u_1)-\wp'(u_2)}{\wp(u_1)-\wp(u_2)}\right)-\wp'(u_1); \quad (5)$$

сравнивая это съ (5) § 79, гдѣ вмѣсто u_3 мы подставимъ $-(u_1+u_2)$, слѣдовательно съ равенствомъ:

$$\wp'(u_1+u_2)=-\frac{\wp(u_1)\wp'(u_2)-\wp(u_2)\wp'(u_1)}{\wp(u_1)-\wp(u_2)}-\frac{\wp'(u_1)-\wp'(u_2)}{\wp(u_1)-\wp(u_2)}\wp(u_1+u_2), \quad (6)$$

мы получимъ чрезъ вычитаніе этого изъ предыдущаго, послѣ приведенія къ одному знаменателю нѣкоторыхъ членовъ и сокращеніи на $\dfrac{\wp'(u_1)-\wp'(u_2)}{\wp(u_1)-\wp(u_2)}$ такое равенство:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{\wp'(u_1)-\wp'(u_2)}{\wp(u_1)-\wp(u_2)}\right)+\wp(u_1+u_2)-\wp(u_1)=0, \quad (7)$$

откуда будемъ имѣть:

$$\wp(u_1+u_2)=\wp(u_1)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{\wp'(u_1)-\wp'(u_2)}{\wp(u_1)-\wp(u_2)}\right). \quad (8)$$

Точно также, или прямо на основаніи симметріи формулъ (5) § 78 и (5) § 79 относительно u_1 и u_2, мы получимъ:

$$\wp(u_1+u_2)=\wp(u_2)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{\wp'(u_1)-\wp'(u_2)}{\wp(u_1)-\wp(u_2)}\right). \quad (9)$$

Мѣняя u_2 на $-u_2$, получимъ отсюда еще слѣдующія формулы:

$$\wp(u_1 - u_2) = \wp(u_1) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{\wp'(u_1) + \wp'(u_2)}{\wp(u_1) - \wp(u_2)}\right); \tag{10}$$

$$\wp(u_1 - u_2) = \wp(u_2) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{\wp'(u_1) + \wp'(u_2)}{\wp(u_1) - \wp(u_2)}\right). \tag{11}$$

Складывая (8) и (10); (9) и (11), мы получимъ еще слѣдующія два равенства [по перенесеніи перваго члена второй части налѣво]:

$$\left.\begin{aligned} \wp(u_1 + u_2) + \wp(u_1 - u_2) - 2\wp(u_1) &= -\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{\wp'(u_1)}{\wp(u_1) - \wp(u_2)}\right) = \\ &= -\frac{\partial^2}{\partial u_1^2}\log[\wp(u_1) - \wp(u_2)]; \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned} \wp(u_1 + u_1) + \wp(u_1 - u_2) - 2\wp(u_2) &= -\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{-\wp'(u_2)}{\wp(u_1) - \wp(u_2)}\right) = \\ &= -\frac{\partial^2}{\partial u_2^2}\log[\wp(u_1) - \wp(u_2)]; \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

[послѣднее впрочемъ прямо получается изъ перваго чрезъ перемѣну u_1 на u_2 и наоборотъ].

Вычитая тѣже равенства, мы получимъ опять (4) настоящаго §.

ГЛАВА VII.

Функціи $\zeta(u)$, $\Upsilon(u)$ и $\Theta(u)$.

82. При помощи формулъ полученныхъ въ концѣ предыдущей главы нетрудно ввести перемѣнную u въ интегралы второго и третьяго рода, и величину v вмѣсто параметра, выбравъ ее такъ, чтобы было

$$\alpha = \wp(v)\,; \tag{1}$$

тогда, внеся въ выраженіе нормальнаго интеграла второго рода [(16) § 61] $\left(\text{отбросивъ множитель } \frac{1}{\sqrt{S_\alpha}}\right)$ вмѣсто s, $\sqrt{S}$; α и $\sqrt{S_\alpha}$ ихъ выраженія чрезъ u и v соотвѣтственно, и имѣя въ виду (1) § 74, мы будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} &\int_{s_0}^{s}\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{S}+\sqrt{S_\alpha}}{s-\alpha}\right)^2 - s - \alpha - c'\right\}\frac{ds}{\sqrt{S}} = \\ &= -\int_{u_0}^{u}\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(u)+\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\right)^2 - \wp(u) - \wp(v) - c'\right\} du\,; \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

но по (6) § 78 имѣемъ:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(u)+\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\right)^2 - \wp(u) - \wp(v) = \wp(u-v)\,; \tag{3}$$

внеся это въ предыдущее, будемъ имѣть такое выраженіе для нормальнаго интеграла второго рода чрезъ u:

$$\int_{s_0}^{s}\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{S}+\sqrt{S_\alpha}}{s-\alpha}\right)^2 - s - \alpha - c'\right\}\frac{ds}{\sqrt{S}} = \int_{u_0}^{u}[c' - \wp(u-v)]\,du. \tag{4}$$

Здѣсь можно v назвать *параметровъ* этого интеграла, ибо при $u \equiv v$ онъ обращается въ ∞^1. Хотя это и слѣдуетъ изъ того, что мы знаемъ объ этихъ интегралахъ изъ главы II, тѣмъ не менѣе не безполезно убѣдиться въ этомъ и непосредственно. Полагая $u - v = u'$, будемъ имѣть:

$$\int_{u_0}^{u} [c' - \wp(u-v)]\, du = \int_{u_0-v}^{u'} [c' - \wp(u')]\, du'; \tag{5}$$

обозначая чрезъ u_1 точку изъ области сходимости ряда:

$$\wp(u') = \frac{1}{u'^2} + u'^2 \mathfrak{P}(u'^2), \tag{6}$$

мы будемъ имѣть:

$$\int_{u_0-v}^{u'} [c' - \wp(u')]\, du' = \int_{u_0-v}^{u_1} [c' - \wp(u')]\, du' + \int_{u_1}^{u'} [c' - \wp(u')]\, du'; \tag{7}$$

во второмъ членѣ второй части путь интегрированія лежитъ въ области сходимости ряда (6), а потому можно вмѣсто $\wp(u')$ вставить его разложеніе (6) въ рядъ по степенямъ u'; тогда будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} \int_{u_1}^{u'} [c' - \wp(u')]\, du' &= \int_{u_1}^{u'} [c' - \frac{1}{u^2} - u'^2 \wp(u'^2)] du' = \\ &= c'u' + \frac{1}{u'} + u'^3 \wp_1(u'^2) + C_1; \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

гдѣ $C_1 = -[c'u_1 + \frac{1}{u_1} + u_1^3 \mathfrak{P}_1(u_1^2)]$; внося это въ (7) и полагая

$$\int_{u_0-v}^{u_1} [c' - \wp(u')] du' + C_1 = C_2, \tag{9}$$

будемъ имѣть, имѣя въ виду (5) и внося $u - v$ вмѣсто u':

$$\int_{u_0}^{u} [c' - \wp(u-v)] du = c'(u-v) + \frac{1}{u-v} + (u-v)^3 \mathfrak{P}_1[(u-v)^2] + C_2, \tag{10}$$

откуда и видно, что нашъ интегралъ (5) обращается въ ∞^1 какъ $\frac{1}{u-v}$ при $u = v$. Мы введемъ для этого интеграла, который есть *одно-*

значная функція отъ u, *обращающаяся въ* ∞^1 *только при* $u=v$, особое обозначеніе, полагая

$$Z(u\,|\,v)=\int_{u_0}^{u}[c'-\wp(u-v)]du+C; \tag{11}$$

для частнаго случая $v=0$, будемъ обозначать проще такимъ образомъ:

$$Z(u)=\int_{u_0}^{u}[c'-\wp(u)]du+C. \tag{12}$$

Однозначность этой функціи слѣдуетъ изъ того, что разложеніе (6) однозначной функціи $\wp(u)$ не содержитъ члена $\frac{1}{u}$ (см. введеніе).

83. Изъ сказаннаго въ главѣ III видно, что измѣненіе u на $u+2\tilde{\omega}$ увеличитъ значеніе функціи $Z(u\,|\,v)$, какъ преобразованія къ новой перемѣной нормальнаго интеграла второго рода, на $2\tilde{\eta}$, такъ что будетъ:

$$Z(u+2\tilde{\omega}\,|\,v)=Z(u\,|\,v)+2\tilde{\eta}; \tag{1}$$

но этотъ результатъ легко можетъ быть полученъ и прямо изъ опредѣленія функціи $Z(u\,|\,v)$ равенствомъ (11) пред. §. Изъ періодичности функцій $\wp(u)$ слѣдуетъ, что

$$c'-\wp(u+\tilde{\omega}-v)=c'-\wp(u-\tilde{\omega}-v); \tag{2}$$

помножая это на du и интегрируя отъ u_0 до u будемъ имѣть:

$$\int_{u_0}^{u}[c'-\wp(u+\tilde{\omega}-v)]du=\int_{u_0}^{u}[c'-\wp(u-\tilde{\omega}-v)]du, \tag{3}$$

или, вводя новую перемѣнную подъ знакъ интеграла:

$$\int_{u_0+\tilde{\omega}}^{u+\tilde{\omega}}[c'-\wp(w-v)]dw=\int_{u_0-\tilde{\omega}}^{u-\tilde{\omega}}[c'-\wp(w-v)]dw; \tag{4}$$

это же по (11) пред. § можно такъ представить:

$$Z(u+\tilde{\omega}\,|\,v)-Z(u_0+\tilde{\omega}\,|\,v)=Z(u-\tilde{\omega}\,|\,v)-Z(u_0-\tilde{\omega}\,|\,v), \tag{5}$$

или

$$Z(u+\tilde{\omega}\,|\,v)-Z(u-\tilde{\omega}\,|\,v)=Z(u_0+\tilde{\omega}\,|\,v)-Z(u_0-\tilde{\omega}\,|\,v)\,; \qquad (6)$$

здѣсь вторая часть независитъ отъ u, есть постоянная; означимъ ее чрезъ $2\tilde{\eta}_v$ (ибо она можетъ быть зависитъ отъ v), такъ что слѣдовательно

$$2\tilde{\eta}_v=Z(u_0+\tilde{\omega}\,|\,v)-Z(u_0-\tilde{\omega}\,|\,v)\,; \qquad (7)$$

тогда (6) принимаетъ такой видъ:

$$Z(u+\tilde{\omega}\,|\,v)-Z(u-\tilde{\omega}\,|\,v)=2\tilde{\eta}_v\,. \qquad (8)$$

Эту постоянную $2\tilde{\eta}_v$ можно выразить интеграломъ, вводя въ (7) вмѣсто $Z(u\,|\,v)$ его выраженіе въ формѣ интеграла изъ (11) пред. §; тогда будемъ имѣть:

$$2\tilde{\eta}_v=\int_{u_0-\tilde{\omega}}^{u_0+\tilde{\omega}}[c'-\wp(u-v)]du\,. \qquad (9)$$

Здѣсь предѣлы интеграла независятъ отъ v; а потому производная по v отъ этой величины выразится такъ:

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{d\tilde{\eta}_v}{dv}&=\int_{u_0-\tilde{\omega}}^{u_0+\tilde{\omega}}\wp'(u-v)\,du= \\ &=\wp(u_0+\tilde{\omega}-v)-\wp(u_0-\tilde{\omega}-v)=0\,, \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

— на основаніи періодичности функціи $\wp(u)$; слѣдовательно $\tilde{\eta}_v$ отъ v независитъ а потому значекъ v должно отбросить, и тогда (8) и (9) такъ напишутся:

$$Z(u+\tilde{\omega}\,|\,v)-Z(u-\tilde{\omega}\,|\,v)=2\tilde{\eta}\,, \qquad (11)$$

$$\tilde{\eta}=\frac{1}{2}\int_{u_0-\tilde{\omega}}^{u_0+\tilde{\omega}}[c'-\wp(u)]du\,, \qquad (12)$$

гдѣ мы могли положить $v=0$, ибо $\tilde{\eta}$ отъ него независитъ. Можно положить и $u_0=0$ въ послѣдней формулѣ, лишь бы только путь интегрированія не проходилъ чрезъ $u\equiv 0$, — иначе интегралъ терялъ бы

смыслъ —, ибо и отъ u_0 величина $\tilde{\eta}$ независитъ. Дѣйствительно, такъ какъ u_0 не входитъ въ подъинтегральную функцію, то будетъ

$$\frac{d\tilde{\eta}}{du_0}=\frac{1}{2}[c'-\wp(u_0+\tilde{\omega})-(c'-\wp(u_0-\tilde{\omega}))]=0 \tag{13}$$

вслѣдствіе періодичности функціи $\wp(u)$.

Итакъ, полагая въ (12) $u_0=0$, мы будемъ имѣть:

$$\tilde{\eta}=\frac{1}{2}\int_{-\tilde{\omega}}^{+\tilde{\omega}}[c'-\wp(u)]du. \tag{14}$$

Для частнаго вида разсматриваемой функціи опредѣляемаго равенствомъ (12) § 82, будетъ тоже имѣть мѣсто равенство (1), именно:

$$Z(u+\tilde{\omega})-Z(u-\tilde{\omega})=2\tilde{\eta}, \tag{15}$$

причемъ $\tilde{\eta}$ будетъ тоже самое (14), ибо оно отъ v независитъ.—Перемѣняя въ (11) u на $u+\tilde{\omega}$, мы получимъ:

$$Z(u+2\tilde{\omega}\,|\,v)=Z(u\,|\,v)+2\tilde{\eta}, \tag{16}$$

и также изъ (15):

$$Z(u+2\tilde{\omega})=Z(u)+2\tilde{\eta}. \tag{17}$$

Мы разсматривали самый общій період $2\tilde{\omega}=2m\omega+2n\omega'$; полагая $m=1$, $n=0$; или $m=1$, $n=1$; или $m=0$, $n=1$, мы будемъ имѣть отсюда:

$$\left.\begin{aligned} Z(u+2\omega\,|\,v)&=Z(u\,|\,v)+2\eta;\\ Z(u+2\omega''|\,v)&=Z(u\,|\,v)+2\eta'';\\ Z(u+2\omega'\,|\,v)&=Z(u\,|\,v)+2\eta'; \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

гдѣ по (14) будетъ:

$$\left.\begin{aligned} \eta=\frac{1}{2}\int_{-\omega}^{+\omega}[c'-\wp(u)]du;\quad \eta''=\frac{1}{2}\int_{-\omega''}^{+\omega''}[c'-\wp(u)]du;\\ \eta'=\int_{-\omega'}^{+\omega'}[c'-\wp(u)]du. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Изъ (18) легко вывести, что

$$\eta'' = \eta + \eta' ; \tag{20}$$

дѣйствительно, въ послѣднемъ изъ (18) перемѣняя u на $u + 2\omega$, по первому изъ (18) получимъ:

$$Z(u + 2\omega + 2\omega' \mid v) = Z(u \mid v) + 2\eta + 2\eta' \tag{21}$$

или, такъ какъ $\omega + \omega' = \omega''$,

$$Z(u + 2\omega'' \mid v) = Z(u \mid v) + 2\eta + 2\eta' ; \tag{22}$$

сличая это со вторымъ изъ (18) въ виду однозначности функціи $Z(u \mid v)$ и приходимъ къ равенству (20).

84. Функція $Z(u \mid v)$ легко можетъ быть выражена чрезъ $Z(u)$. Дѣйствительно, вводя новую перемѣнную подъ знакомъ интеграла въ (11) § 82, получаемъ:

$$\left.\begin{aligned} Z(u \mid v) &= \int_{u_0 - v}^{u - v} [c' - \wp(w)]dw + C = \\ &= Z(u - v) - Z(u_0 - v) + C, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

ибо

$$\int_{u_0 - v}^{u - v} [c' - \wp(w)]dw = \int_{u_0}^{u - v} [c' - \wp(w)]dw - \int_{u_0}^{u_0 - v} [c' - \wp(w)]dw ; \tag{2}$$

вслѣдствіе этого мы дальше будемъ ограничиваться разсмотрѣніемъ функціи $Z(u)$. Между функціями $Z(u)$, опредѣляемыми равенствомъ (12) § 82, т. е.

$$Z(u) = \int_{u_0}^{u} [c' - \wp(u)]du + C, \tag{3}$$

есть одна нечетная, отъ которой общая будетъ различаться на постоянную. Въ самомъ дѣлѣ, каково бы ни было u_0, всегда можно въ (3) C выбрать такъ, чтобы было

$$Z(-u) = -Z(u). \tag{4}$$

Дѣйствительно, вводя сюда выраженіе функціи въ формѣ интеграла изъ (3), мы будемъ имѣть:

$$\int_{u_0}^{-u} [c' - \wp(u)]du + C = -\left(\int_{u_0}^{u} [c' - \wp(u)]du + C\right); \tag{5}$$

отсюда найдемъ:

$$C = \frac{1}{2}\left(-\int_{u_0}^{-u} [c' - \wp(u)]du - \int_{u_0}^{u} [c' - \wp(u)]du\right); \tag{6}$$

вводя въ первомъ интегралѣ новую перемѣнную $u' = -u$, а во второмъ мѣняя порядокъ предѣловъ, мы будемъ имѣть:

$$C = \frac{1}{2}\left(\int_{-u_0}^{u} [c' - \wp(u)]du + \int_{u}^{u_0} [c' - \wp(u)]du\right), \tag{7}$$

или, соединяя оба интеграла, какъ имѣющіе одинъ общій предѣлъ, въ одинъ:

$$C = \frac{1}{2}\int_{-u_0}^{+u_0} [c' - \wp(u)]du. \tag{8}$$

Внося это значеніе C въ (3), мы получимъ нечетную функцію $Z(u)$, для которой введемъ обозначеніе чрезъ $\zeta(u)$, такъ что будетъ

$$\zeta(u) = \int_{u_0}^{u} [c' - \wp(u)]du + \frac{1}{2}\int_{-u_0}^{+u_0} [c' - \wp(u)]du, \tag{9}$$

или, раздѣляя первый интегралъ на двѣ равныя части и соединяя вторую со вторымъ членомъ:

$$\zeta(u) = \frac{1}{2}\int_{u_0}^{u} [c' - \wp(u)]du + \frac{1}{2}\int_{-u_0}^{u} [c' - \wp(u)]du; \tag{10}$$

перемѣняя во второмъ интегралѣ u на $-u$ подъ знакомъ интеграла, мы получимъ:

$$\zeta(u) = \frac{1}{2}\int_{u_0}^{u} [c' - \wp(u)]du - \frac{1}{2}\int_{u_0}^{-u} [c' - \wp(u)]du, \tag{11}$$

и слѣдовательно

$$\zeta(u) = \frac{1}{2}\int_{-u}^{+u}[c' - \wp(u)]du. \tag{12}$$

Такъ выражается окончательно нечетная функція $\zeta(u)$; изъ этого ея выраженія прямо слѣдуетъ ея нечетность, ибо перемѣняя u на $-u$ въ предѣлахъ, мы ихъ переставимъ одинъ съ другимъ, а отъ перестановки предѣловъ интеграла онъ мѣняетъ свой знакъ на противный. Путь интегрированія подчиняется одному только условію—не проходитъ чрезъ точки $u \equiv 0$, въ которыхъ подъинтегральная функція обращается въ ∞^2; но какъ она обращается въ ∞ какъ $-\frac{1}{u^2}$, то интегральный вычетъ функціи $c' - \wp(u)$ равенъ нулю, и потому $\zeta(u)$ есть однозначная функція отъ u, конечная и непрерывная за исключеніемъ полюсовъ $u \equiv 0$, гдѣ она обращается въ ∞^1, какъ $\frac{1}{u}$ при $u = 0$. Всякая другая $Z(u)$ отъ $\zeta(u)$ отличается на постоянную:

$$Z(u) = \zeta(u) + C. \tag{13}$$

Вслѣдствіе этого будетъ

$$Z(u) - Z(u_0) = \zeta(u) - \zeta(u_0) \tag{14}$$

или по (3) настоящаго §:

$$\int_{u_0}^{u}[c' - \wp(u)]du = \zeta(u) - \zeta(u_0). \tag{15}$$

На основаніи (1) и (14) будетъ также

$$Z(u\,|\,v) = \zeta(u - v) - \zeta(u_0 - v) + C. \tag{16}$$

Сличая это съ (11) § 82, находимъ:

$$\int_{u_0}^{u}[c' - \wp(u - v)]du = \zeta(u - v) - \zeta(u_0 - v). \tag{17}$$

На основаніи этого въ дальнѣйшемъ мы будемъ ограничиваться разсмотрѣніемъ нечетной функціи $\zeta(u)$. Такъ какъ она есть частный

*

случай $Z(u)$, отличаясь по (14) отъ нея на постоянную, то по (17) § 83 будетъ:

$$\zeta(u+2\tilde{\omega})=\zeta(u)+2\tilde{\eta} \tag{18}$$

гдѣ

$$2\tilde{\omega}=2m\omega+2n\omega' \quad \text{и} \quad 2\tilde{\eta}=2m\eta+2n\eta'. \tag{19}$$

Что же касается η, η'', η', то по (19) пред. § и (12) настоящаго мы будемъ имѣть:

$$\eta=\zeta(\omega)\,; \quad \eta''=\zeta(\omega'')\,; \quad \eta'=\zeta(\omega')\,, \tag{20}$$

и вообще по (14) того же § и (12) настоящаго:

$$\tilde{\eta}=\zeta(\tilde{\omega}). \tag{21}$$

85. Помножая равенство (4) § 82 на

$$\frac{d\alpha}{\sqrt{S_\alpha}}=-dv \tag{1}$$

и интегрируя по α отъ α_0 и слѣдовательно по v отъ v_0, при чемъ:

$$\alpha_0=\wp(v_0)\,, \tag{2}$$

мы будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}\int_{\alpha_0}^{\alpha}\int_{s_0}^{s}\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{S}+\sqrt{S_\alpha}}{s-\alpha}\right)^2-s-\alpha-c'\right\}\frac{ds}{\sqrt{S}}\cdot\frac{d\alpha}{\sqrt{S_\alpha}}=\\ =-\int_{v_0}^{v}\int_{u_0}^{u}[c'-\wp(u-v)]du\,dv.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Лѣвая часть здѣсь есть нормальный интегралъ третьяго рода [см. (17) § 61]; слѣдовательно эта формула даетъ его выраженіе чрезъ новую перемѣнную u и новый параметръ v: въ этой формулѣ v будетъ его параметромъ. На основаніи (17) пред. § его можно двоякимъ образомъ представить въ формѣ простаго интеграла:

$$-\int_{v_0}^{v}\int_{u_0}^{u}[c'-\wp(u-v)]du dv = -\int_{v_0}^{v}[\zeta(u-v)-\zeta(u_0-v)]dv = \quad (4)$$

$$= \int_{u_0}^{u}[\zeta(u-v)-\zeta(u-v_0)]du. \quad (5)$$

Вводя перемѣнную u и v вмѣсто параметра въ лѣвую часть (17) § 61, мы получимъ еще такое выраженіе для нормальнаго интеграла третьяго рода чрезъ u и v:

$$\left.\begin{aligned} &\int_{u_0}^{u}\frac{1}{2}\left\{\frac{\wp'(u)+\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}-\frac{\wp'(u)+\wp'(v_0)}{\wp(u)-\wp(v_0)}\right\}du-\int_{v_0}^{v}[c'-\wp(v)]dv.(u-u_0)= \\ &\qquad = -\int_{v_0}^{v}\int_{u_0}^{u}[c'-\wp(u-v)]du dv. \end{aligned}\right\}(6)$$

Перенося второй членъ направо, и вводя по (17) пред. § и (4) и (5) настоящаго, функцію $\zeta(u)$, мы будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} &\int_{u_0}^{u}\frac{1}{2}\left\{\frac{\wp'(u)+\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}-\frac{\wp'(u)+\wp'(v_0)}{\wp(u)-\wp(v_0)}\right\}du= \\ &= [\zeta(v)-\zeta(v_0)](u-u_0)+\int_{u_0}^{u}[\zeta(u-v)-\zeta(u-v_0)]du. \end{aligned}\right\}(7)$$

Перенося здѣсь второй членъ лѣвой части направо, мы будемъ имѣть налѣво Вейерштрассовскій интегралъ третьяго рода:

$$\left.\begin{aligned} &\int_{u_0}^{u}\frac{1}{2}\left(\frac{\wp'(u)+\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\right)du=\zeta(v)(u-u_0)+\int_{u_0}^{u}[\zeta(u-v)-\zeta(u-v_0)]du+ \\ &\qquad +\int_{u_0}^{u}\left\{\frac{1}{2}\frac{\wp'(u)+\wp'(v_0)}{\wp(u)-\wp(v_0)}-\zeta(v_0)\right\}du. \end{aligned}\right\}(8)$$

Если положимъ здѣсь $v_0=0$, то послѣдній членъ обратился въ нуль. Дѣйствительно, для v_0 близкаго къ нулю будетъ по (8) § 82, гдѣ должно принять $C_1=0$ по нечетности функціи $\zeta(u)$:

$$\frac{1}{2}\frac{\wp'(u)+\wp'(v_0)}{\wp(u)-\wp(v_0)}-\zeta(v_0)=\frac{1}{2}\frac{\wp'(u)-\dfrac{2}{v_0^3}+v_0\mathfrak{P}_1(v_0^2)}{\wp(u)-\dfrac{1}{v_0^2}-v_0^2\mathfrak{P}(v_0^2)}-$$

$$-\left(\frac{1}{v_0}+c'v_0+v_0^3\mathfrak{P}_2(v_0^2)\right)=$$

$$=\frac{1}{v_0}\frac{-1+\frac{1}{2}v_0^3[\wp'(u)+v_0\mathfrak{P}_1(v_0^2)]}{-1+v_0^2[\wp(u)-v_0^2\mathfrak{P}(v_0^2)]}-\left(\frac{1}{v_0}+c'v_0+v_0^3\mathfrak{P}_2(v_0^2)\right)=$$

$$=\frac{1}{v_0}[1+v_0^2\mathfrak{P}_3(v_0)]-\left(\frac{1}{v_0}+c'v_0+v_0^3\mathfrak{P}_2(v_0^2)\right)=$$

$$=v_0\mathfrak{P}_4(v_0);$$

слѣдовательно $=0$ при $v_0=0$. Потому полагая въ (8) $v_0=0$, получимъ окончательно такое выраженіе для Вейерштрассовскаго интеграла третьяго рода чрезъ функцію $\zeta(u)$:

$$\int_{u_0}^{u}\frac{1}{2}\left(\frac{\wp'(u)+\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\right)du=\zeta(v)(u-u_0)+\int_{u_0}^{u}\zeta(u-v)du-\int_{u_0}^{u}\zeta(u)du. \quad (9)$$

Интегралъ третьяго рода Якоби получится изъ (7), если примемъ тамъ $v_0=-v$; имѣя въ виду нечетность функціи $\zeta(u)$, мы получимъ тогда такое равенство:

$$\int_{u_0}^{u}\frac{\wp'(v)du}{\wp(u)-\wp(v)}=2\zeta(v)(u-u_0)+\int_{u_0}^{u}\zeta(u-v)du-\int_{u_0}^{u}\zeta(u+v)du. \quad (10)$$

Здѣсь можно принять $u_0=0$, ибо интегралы будутъ конечны, лишь бы путь интегрированія не проходилъ бы чрезъ $u=v$; тогда вмѣсто (10) будемъ имѣть окончательно:

$$\int_{0}^{u}\frac{\wp'(v)du}{\wp(u)-\wp(v)}=2\zeta(v)u+\int_{0}^{u}\zeta(u-v)du-\int_{0}^{u}\zeta(u+v)du. \quad (11)$$

86. Теорема сложенія для интеграловъ второго и третьяго родовъ въ новой ихъ формѣ можетъ быть, конечно, получена чрезъ преобразованіе къ новымъ перемѣннымъ формулъ IV и V главъ; но проще

она можетъ быть получена, и притомъ различнымъ образомъ, изъ формулъ § 81. Перемѣнивъ въ формулахъ (8) и (9) этого § u_1 и u_2 соотвѣтственно на u и v, мы будемъ имѣть:

$$\wp(u+v)=\wp(u)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\right); \tag{1}$$

$$\wp(u+v)=\wp(v)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\right); \tag{2}$$

этимъ равенствомъ легко дать такой видъ:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\right)=c'-\wp(u+v)-[c'-\wp(u)]; \tag{3}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\right)=c'-\wp(u+v)-[c'-\wp(v)]; \tag{4}$$

интегрируя первое изъ этихъ равенство по u отъ u_0, получимъ:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\right)=\int_{u_0}^{u}[c'-\wp(u+v)]\,du-\int_{u_0}^{u}[c'-\wp(u)]du+V_0; \tag{5}$$

гдѣ V_0 функцiя одного v; а это по (15) и (17) § 84 можно такъ представить:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\right)=\zeta(u+v)-\zeta(u_0+v)-\zeta(u)+\zeta(u_0)+V_0 \tag{6}$$

или, полагая $-\zeta(u_0+v)+\zeta(u_0)+V_0=V$:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\right)=\zeta(u+v)-\zeta(u)+V; \tag{7}$$

остается опредѣлить V. Дифференцируя это равенство по v, будемъ имѣть:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\right)=c'-\wp(u+v)+\frac{dV}{dv}; \tag{8}$$

сличая это съ (4), находимъ:

$$\frac{dV}{dv}=-[c'-\wp(v)]; \tag{9}$$

интегрируя, получимъ отсюда

$$V = -\int_{v_0}^{v} [c' - \wp(v)]dv + C_0 = -\zeta(v) + C, \tag{10}$$

если $C = C_0 + \zeta(v_0)$ [по (15) § 84]; внося это въ (7), получимъ:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}\right) = \zeta(u+v) - \zeta(u) - \zeta(v) + C; \tag{11}$$

это C однако $=0$. Дѣйствительно, перемѣняя здѣсь v на $-v$, мы получимъ:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\wp'(u) + \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}\right) = \zeta(u-v) - \zeta(u) + \zeta(v) + C; \tag{12}$$

но здѣсь лѣвая часть и совокупность первыхъ трехъ членовъ второй части перемѣняютъ свои знаки на противные отъ перестановки u и v между собою; слѣдовательно для сохраненія этого равенства (12) должно быть

$$C = 0; \tag{13}$$

но тогда (11) и (12) принимаютъ такой видъ:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}\right) = \zeta(u+v) - \zeta(u) - \zeta(v); \tag{14}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\wp'(u) + \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}\right) = \zeta(u-v) - \zeta(u) + \zeta(v); \tag{15}$$

эти равенства и выражаютъ теорему сложенія и вычитанія функціи $\zeta(u)$, ибо изъ нихъ мы находимъ:

$$\zeta(u+v) = \zeta(u) + \zeta(v) + \frac{1}{2}\left(\frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}\right); \tag{16}$$

$$\zeta(u-v) = \zeta(u) - \zeta(v) + \frac{1}{2}\left(\frac{\wp'(u) + \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}\right); \tag{17}$$

(вторая получается изъ первой чрезъ перемѣну v на $-v$). — Складывая и вычитая равенства (14) и (15), получаемъ такія два:

$$\frac{\wp'(u)}{\wp(u)-\wp(v)} = \frac{\partial \log[\wp(u)-\wp(v)]}{\partial u} = \zeta(u+v)+\zeta(u-v)-2\zeta(u)\,; \quad (18)$$

$$\frac{-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)} = \frac{\partial \log[\wp(u)-\wp(v)]}{\partial v} = \zeta(u+v)-\zeta(u-v)-2\zeta(v)\,; \quad (19)$$

(послѣднее получается изъ перваго чрезъ перестановку u и v). Эти равенства можно было бы получить и прямо изъ (12) § 81. Перемѣняя тамъ u_1 и u_2 соотвѣтственно на u и v, и вычитая это равенство (12) § 81 послѣ сказанной перемѣны въ немъ изъ тождества:

$$c'+c'-2c'=0\,, \quad (20)$$

мы получимъ:

$$c'-\wp(u-v)+c'-\wp(u-v)-2[c'-\wp(u)] = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\wp'(u)}{\wp(u)-\wp(v)}\right); \quad (21)$$

помножая это равенство на du и интегрируя отъ u_0, получимъ:

$$\left.\begin{aligned}\int_{u_0}^{u}[c'-\wp(u+v)]du+\int_{u_0}^{u}[c'-\wp(u-v)]du-2\int_{u_0}^{u}[c'-\wp(u)]du= \\ =\frac{\wp'(u)}{\wp(u)-\wp(v)}-\frac{\wp'(u_0)}{\wp(u_0)-\wp(v)}\,;\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

а это по (15) и (17) § 84 такъ представится:

$$\zeta(u+v)+\zeta(u-v)-2\zeta(u) = \frac{\wp'(u)}{\wp(u)-\wp(v)}+V, \quad (23)$$

гдѣ V можетъ зависѣть только отъ v; но, дифференцируя это равенство по v, будемъ имѣть:

$$c'-\wp(u+v)-[c'-\wp(u-v)] = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\wp'(u)}{\wp(u)-\wp(v)}\right)+\frac{dV}{dv}, \quad (24)$$

или

$$-\wp(u+v)+\wp(u-v) = \frac{\wp'(u)\wp'(v)}{[\wp(u)-\wp(v)]^2}+\frac{dV}{dv}, \quad (25)$$

а это по (4) § 81 приводится къ такому:

$$0=\frac{dV}{dv}, \quad (26)$$

откуда

$$V = C, \tag{27}$$

т. е. независитъ u отъ v. Итакъ, внося изъ (27) въ (23) будемъ имѣть:

$$\zeta(u+v)+\zeta(u-v)-2\zeta(u)=\frac{\wp'(u)}{\wp(u)-\wp(v)}+C; \tag{28}$$

это будемъ имѣть мѣсто для всякаго v; полагая $v=0$, мы получимъ отсюда, [такъ какъ $\wp(0)=\infty$):

$$0 = C, \tag{29}$$

послѣ чего (28) обратится въ такое:

$$\zeta(u+v)+\zeta(u-v)-2\zeta(u)=\frac{\wp'(u)}{\wp(u)-\wp(v)}, \tag{30}$$

согласно съ (18) настоящаго §. Перестанавливая u съ v, получимъ отсюда:

$$\zeta(u+v)-\zeta(u-v)-2\zeta(v)=\frac{-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}, \tag{31}$$

согласно съ (19).

87. Интегрируя равенства (18) и (19) предыдущаго § по u отъ u_0 до u, приходимъ къ слѣдующимъ весьма большаго значенія формуламъ:

$$\log\left(\frac{\wp(u)-\wp(v)}{\wp(u_0)-\wp(v)}\right)=\int_{u_0}^{u}\zeta(u+v)du+\int_{u_0}^{u}\zeta(u-v)du-2\int_{u_0}^{u}\zeta(u)du; \tag{1}$$

$$\int_{u_0}^{u}\frac{-\wp'(v)du}{\wp(u)-\wp(v)}=\int_{u_0}^{u}\zeta(u+v)du-\int_{u_0}^{u}\zeta(u-v)du-2\zeta(v)(u-u_0); \tag{2}$$

изъ нихъ первая выражаетъ log линейной функціи отъ $\wp(u)$ чрезъ интегралы отъ функціи $\zeta(u)$, а вторая согласна съ (10) § 85. Если теперь положить:

$$Y(u)=\int_{u_0}^{u}\zeta(u)du+C, \tag{3}$$

какъ опредѣленіе новой функціи отъ u, которой производная

$$\frac{dY(u)}{du} = \zeta(u), \tag{4}$$

то можно равенствамъ (1) и (2) дать другой видъ. Тогда будетъ:

$$\int_{u_0}^{u} \zeta(u+v)du = \int_{u_0+v}^{u+v} \zeta(w)dw = Y(u+v) - Y(u_0+v); \tag{5}$$

$$\int_{u_0}^{u} \zeta(u-v)du = \int_{u_0-v}^{u-v} \zeta(w)dw = Y(u-v) - Y(u_0-v); \tag{6}$$

внося это въ (1) и обозначая чрезъ V совокупность всего несодержащаго u, мы будемъ имѣть:

$$\log[\wp(u) - \wp(v)] = Y(u+v) - Y(u-v) - 2Y(u) + V. \tag{7}$$

Дифференцируя это равенство по v, будемъ имѣть:

$$\frac{-\wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)} = \zeta(u+v) - \zeta(u-v) + \frac{dV}{dv}; \tag{8}$$

сличая это съ (19) пред. §, находимъ:

$$\frac{dV}{dv} = -2\zeta(v), \tag{9}$$

откуда получаемъ:

$$V = -2\int_{v_0}^{v} \zeta(v)dv + C = -2Y(v) + C'. \tag{10}$$

Внося это въ (7), будемъ имѣть:

$$\log[\wp(u) - \wp(v)] = Y(u+v) + Y(u-v) - 2Y(u) - 2Y(v) + C', \tag{11}$$

гдѣ C' постоянная, пока еще неопредѣленная.

Возьмемъ теперь обѣ части этого равенства показателями степени числа e (основаніе Неперовыхъ логариѳмовъ); тогда будемъ имѣть, полагая $e^{C'} = C$, слѣдующее:

$$\wp(u) - \wp(v) = C\frac{e^{Y(u+v)} \cdot e^{Y(u-v)}}{e^{2Y(u)} \cdot e^{2Y(v)}}. \tag{12}$$

Вторая часть этого равенства составлена изъ значеній функціи $e^{Y(u)}$ для различныхъ значеній аргумента; весьма удобно будетъ ввести для нея особое обозначеніе; мы положимъ:

$$e^{Y(u)} = \Theta(u); \tag{13}$$

тогда вторая часть (12) приметъ такой видъ:

$$\wp(u) - \wp(v) = C\,\frac{\Theta(u+v)\,\Theta(u-v)}{\Theta^2(u)\,\Theta^2(v)}. \tag{14}$$

Въ слѣдующей главѣ изъ самаго опредѣленія функціи $\Theta(u)$ равенствомъ (13) мы выведемъ слѣдующія ея свойства:

$$a) \qquad \Theta(-u) = -\,\Theta(u); \qquad b) \qquad \Theta(0) = 0; \tag{15}$$

на основаніи этихъ свойствъ легко опредѣлить C въ (14). Помножая обѣ части на u^2 и полагая $u = 0$, въ виду того, что предыдущее $u^2[\wp(u) - \wp(v)] = 1$, мы получимъ:

$$1 = C\,\frac{\Theta(v)\,\Theta(-v)}{\Theta^2(v)}\,\text{пред.}\left(\frac{u}{\Theta(u)}\right)^2_{u=0} \tag{16}$$

но по (15) (a):

$$\frac{\Theta(v)\,\Theta(-v)}{\Theta^2(v)} = -\,1; \tag{17}$$

по (15) (b):

$$\text{пред.}\,\frac{u}{\Theta(u)}\bigg|_{u=0} = \frac{1}{\Theta'(0)}; \tag{18}$$

внося изъ (17) и (18) вмѣсто лѣвыхъ частей правыя въ (16), получимъ:

$$1 = -\,C.\left(\frac{1}{\Theta'(0)}\right)^2, \tag{19}$$

откуда

$$C = -\,[\,\Theta'(0)]^2; \tag{20}$$

внося это въ (14) окончательно получаемъ:

$$\wp(u) - \wp(v) = -\,\frac{[\Theta'(0)]^2\Theta(u+v)\Theta(u-v)}{\Theta^2(u)\Theta^2(v)}. \tag{21}$$

88. Изъ этой формулы, которую по (15) a) пред. § можно и такъ написать:

$$\wp(u) - \wp(v) = \frac{[\Theta'(0)]^2 \Theta(u+v)\Theta(v-u)}{\Theta^2(u)\Theta^2(v)}, \tag{1}$$

извлекая квадратный корень, получимъ:

$$\sqrt{\wp(u) - \wp(v)} = \pm \frac{\Theta'(0)\sqrt{\Theta(v+u)\Theta(v-u)}}{\Theta(u)\Theta(v)}; \tag{2}$$

если подъ $\sqrt{\wp(u) - \wp(v)}$ будемъ разумѣть то его значеніе, для котораго

$$\text{пред.}\,[u\sqrt{\wp(u) - \wp(v)}]_{u=0} = +1; \tag{3}$$

а подъ $\sqrt{\Theta(v+u)\Theta(v-u)}$ то значеніе его, которое для $u=0$ приводится къ $\Theta(v)$, т. е. для котораго

$$\text{пред.}\sqrt{\Theta(v+u)\Theta(v-u)}\Big|_{u=0} = \Theta(v), \tag{4}$$

то въ (2) надобно удержать верхній знакъ, и мы будемъ имѣть такое равенство:

$$\sqrt{\wp(u) - \wp(v)} = \frac{\Theta'(0)\sqrt{\Theta(v+u)\Theta(v-u)}}{\Theta(u)\Theta(v)}. \tag{5}$$

Полагая здѣсь $v = \omega_i$, гдѣ ω_i обозначаетъ одинъ изъ полуперіодовъ, и имѣя въ виду, что

$$\wp(\omega_i) = e_i, \tag{6}$$

мы получимъ:

$$\sqrt{\wp(u) - e_i} = \frac{\Theta'(0)\sqrt{\Theta(\omega_i+u)\Theta(\omega_i-u)}}{\Theta(u)\Theta(\omega_i)}. \tag{7}$$

Функція:

$$\frac{\Theta'(0)\sqrt{\Theta(\omega_i+u)\Theta(\omega_i-u)}}{\Theta(\omega_i)} \tag{8}$$

обладаетъ, какъ увидимъ въ слѣдующей главѣ, свойствами, аналогичными свойствамъ Θ-функціи, а потому введемъ для нея обозначеніе,

которое напоминало бы заразъ и эту аналогію свойствъ и зависимость отъ полуперіода ω_i, положивъ

$$\frac{\Theta'(0)\sqrt{\Theta(\omega_i+u)\,\Theta(\omega_i-u)}}{\Theta(\omega_i)}=\Theta_i(u); \tag{9}$$

изъ этого опредѣленія прямо слѣдуетъ четность функціи $\Theta_i(u)$:

$$\Theta_i(-u)=\Theta_i(+u), \tag{10}$$

а также, на основаніи (4), что

$$\Theta_i(0)=\Theta'(0). \tag{11}$$

На основаніи (9) равенство (7) принимаетъ такой видъ:

$$\sqrt{\wp(u)-e_i}=\frac{\Theta_i(u)}{\Theta(u)}. \tag{12}$$

Функціи $\Theta_i(u)$, которыхъ всего три, мы будемъ называть *союзными* Θ-функціями по отношенію къ *основной* Θ-функціи, опредѣляемой равенствомъ (13) пред. §. Какъ эта послѣдняя, и союзныя зависятъ отъ параметровъ c' и C, отъ которыхъ зависятъ функціи $\zeta(u)$ и $Y(u)$. Мы увидимъ ниже, что соотношеніе (9) между основною и союзной Θ-функціями можетъ быть замѣнено другимъ, болѣе простымъ.

89. Формула (2) § 87 по введеніи въ нее функціи $Y(u)$ легко приметъ такой видъ:

$$\left.\begin{aligned}\int_{u_0}^{u}\frac{-\wp'(v)du}{\wp(u)-\wp(v)}&=Y(u+v)-Y(u-v)-2\zeta(v)\cdot u-\\&-[Y(u_0+v)-Y(u_0-v)-2\zeta(v)\cdot u_0].\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Но изъ (13) пред. § имѣемъ:

$$Y(u)=\log\Theta(u); \tag{2}$$

на основаніи этого равенства предыдущее такъ представится:

$$\left.\begin{aligned}\int_{u_0}^{u}\frac{-\wp'(v)du}{\wp(u)-\wp(v)}&=\log\frac{\Theta(u+v)}{\Theta(u-v)}-2\zeta(v)\cdot u-\\&-[\log\frac{\Theta(u_0+v)}{\Theta(u_0-v)}-2\zeta(v)\cdot u_0].\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Въ Якобіевскомъ интегралѣ можно положить $u_0 = 0$; тогда выраженіе въ [] обратится въ $\log(-1)$, по нечетности функціи $\Theta(u)$; а потому (3) обратится въ такое по умноженіи еще на -1:

$$\int_0^u \frac{\wp'(v)du}{\wp(u) - \wp(v)} = \log \frac{\Theta(v-u)}{\Theta(v+u)} + 2\zeta(v)u. \tag{4}$$

Нормальный интегралъ третьяго рода въ § 85 приведенъ нами къ такому виду:

$$-\int_{v_0}^{v}\int_{u_0}^{u}[c' - \wp(u-v)]dudv = \int_{u_0}^{u}\zeta(u-v)du - \int_{u_0}^{u}\zeta(u-v_0)du; \tag{5}$$

но

$$\int_{u_0}^{u}\zeta(u-v)du = \int_{u_0-v}^{u-v}\zeta(w)dw = Y(u-v) - Y(u_0-v); \tag{6}$$

также преобразуется и другой интегралъ въ (5), и мы будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} &-\int_{v_0}^{v}\int_{u_0}^{u}[c' - \wp(u-v)]dudv = \\ &= Y(u-v) - Y(u_0-v) - Y(u-v_0) + Y(u_0-v_0); \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

вводя сюда Θ функцію съ помощію (2), получимъ:

$$-\int_{v_0}^{v}\int_{u_0}^{u}[c' - \wp(u-v)]dudv = \log\left\{\frac{\Theta(u-v)\,\Theta(u_0-v_0)}{\Theta(u_0-v)\,\Theta(u-v_0)}\right\}. \tag{8}$$

Изъ формы второй части также явствуетъ свойство нормальнаго интеграла третьяго рода неизмѣнять своей величины отъ перестановки предѣловъ съ параметрами, ибо вслѣдствіе этого правый множитель знаменателя перейдетъ въ лѣвый и наоборотъ, а въ числителѣ каждый множитель въ себя, но съ противнымъ знакомъ и тѣ и другіе (по причинѣ нечетности Θ-функціи); но какъ ихъ четное число въ { }, то это выраженіе не измѣнитъ и знака своего, откуда и слѣдуетъ сказанное. Изъ (8) легко вывести (4); полагая $v_0 = -v$, и $u_0 = 0$, мы получимъ изъ (8):

$$-\int_{-v}^{+v}\int_{0}^{u}[c' - \wp(u-v)]dudv = \log\frac{\Theta(v-u)}{\Theta(v+u)}; \tag{9}$$

но дѣлая тѣже положенія въ (6) § 85, будемъ имѣть:

$$\int_0^u \frac{\wp'(v)du}{\wp(u)-\wp(v)} - 2\zeta(v)u = -\int_{-v}^{+v}\int_0^u [c' - \wp(u-v)]dudv; \qquad (10)$$

внося сюда вмѣсто правой части ея выраженіе чрезъ Θ-функціи изъ (9) и перенося второй членъ первой части на право, и получимъ равенство (4). Что же касается до Вейерштрассовскаго интеграла третьяго рода, то его выраженіе чрезъ Θ-функціи проще всего получится изъ (9) § 85; вводя туда функцію $Y(u)$, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}\int_{u_0}^u \frac{1}{2}\left(\frac{\wp'(u)+\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\right)du = \zeta(v)(u-u_0) + Y(u-v) - Y(u_0-v) - \\ - Y(u) + Y(u_0);\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

а это по (2) настоящаго § такъ перепишется:

$$\int_{u_0}^u \frac{1}{2}\left(\frac{\wp'(u)+\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\right)du = \zeta(v)(u-u_0) + \log\left\{\frac{\Theta(u-v)\,\Theta(u_0)}{\Theta(u_0-v)\,\Theta(u)}\right\}; \qquad (12)$$

но мы остановимся не на этой формулѣ. Ей легко дать такой видъ:

$$\int_{u_0}^u \frac{1}{2}\left(\frac{\wp'(u)+\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\right)du = \zeta(v)u + \log\left(\frac{\Theta'(0)\,\Theta(v-u)}{\Theta(u)\,\Theta(v)}\right) - C, \qquad (13)$$

гдѣ

$$C = \zeta(v)u_0 + \log\left(\frac{\Theta'(0)\,\Theta(v-u_0)}{\Theta(u_0)\,\Theta(v)}\right). \qquad (14)$$

Перенося C на лѣво, будемъ имѣть выраженіе того Вейерштрассовскаго интеграла чрезъ Θ-функціи, который онъ разсматриваетъ въ своихъ лекціяхъ (см. таблицы Шварца), именно:

$$\int_{u_0}^u \frac{1}{2}\left(\frac{\wp'(u)+\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\right)du + C = \zeta(v)u + \log\left(\frac{\Theta'(0)\Theta(v-u)}{\Theta(u)\Theta(v)}\right). \qquad (15)$$

Этотъ интегралъ тѣмъ характеризуется Вейерштрассомъ, что вблизи точки $u=0$ разлагается въ рядъ такого вида:

$$-\log u + u\mathfrak{P}(u). \qquad (16)$$

Дифференцируя (2) и имѣя въ виду (4) § 87, будемъ имѣть:

$$\zeta(u) = \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}\,; \tag{17}$$

на основанiи этого формулы (4) и (15) такъ перепишутся:

$$\int_0^u \frac{\wp'(v)du}{\wp(u)-\wp(v)} = 2\,\frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)} + \log\frac{\Theta(v-u)}{\Theta(v+u)}\,; \tag{18}$$

$$\int_{u_0}^u \frac{1}{2}\left(\frac{\wp'(u)+\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\right)du + C = \frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)}\,u + \log\frac{\Theta'(0)\Theta(v-u)}{\Theta(u)\Theta(v)}. \tag{19}$$

Представивъ въ такомъ видѣ (15), нетрудно показать, что въ области точки $u=0$ этотъ интегралъ будетъ разлагаться въ рядъ вида (16).

Дѣйствительно:

$$\left.\begin{aligned} &\text{пред.}\left\{\frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)}\,u + \log\frac{\Theta'(0)\Theta(v-u)}{\Theta(u)\Theta(v)} + \log u\right\}_{u=0} = \\ &= \text{пред.}\left\{\frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)}\,u + \log\frac{\Theta'(0)u}{\Theta(u)} + \log\frac{\Theta(v-u)}{\Theta(v)}\right\}_{u=0} = 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

ибо

$$\text{пред.}\left.\frac{u\Theta'(0)}{\Theta(u)}\right|_{u=0} = 1\,, \qquad \left.\frac{\Theta(v-u)}{\Theta(v)}\right|_{u=0} = 1\,, \tag{21}$$

log же единицы $=0$; мы увидимъ въ слѣдующей главѣ, что $\Theta(u)$ есть функцiя однозначная, конечная и непрерывная, обращающаяся въ нуль при $u=0$; а потому и выраженiе, въ (20) стоящее, будетъ функцiя однозначная, конечная и непрерывная, и даже вблизи $u=0$, (если подъ логариѳмомъ будемъ разумѣть его главное значенiе), ибо при $u=0$ по (20) обращается въ нуль; вслѣдствiе этого она будетъ разлагаться въ рядъ вида $u\Phi(u)$, а отсюда и слѣдуетъ для интеграла (19) разложенiе вида (16). Это выраженiе (19) Вейерштрассъ принимаетъ за нормальную форму интеграла третьяго рода, который онъ какъ функцiю $s=\wp(u)$ и параметра $s_0=\wp(v)$ обозначаетъ такъ:

$$J(s, \sqrt{S}\,;\, s_0, \sqrt{S_0}),$$

такъ что слѣдовательно

$$J(s, \sqrt{S}; s_0, \sqrt{S_0}) = \int \frac{1}{2} \frac{\sqrt{S} + \sqrt{S_0}}{s - s_0} ds, \tag{22}$$

гдѣ подъ знакомъ неопредѣленнаго интеграла разумѣется такой, который по выраженіи чрезъ u и v разлагается въ рядъ вида (16); слѣдовательно по (19) будетъ:

$$J(s, \sqrt{S}; s_0, \sqrt{S_0}) = \frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)} u + \log \frac{\Theta'(0)\Theta(v-u)}{\Theta(u)\Theta(v)}. \tag{23}$$

90. Замѣтимъ еще въ заключеніе этой главы, что изъ (17), дифференцируя, получимъ:

$$c' - \wp(u) = \frac{\Theta(u)\Theta''(u) - [\Theta'(u)]^2}{[\Theta(u)]^2}, \tag{1}$$

откуда найдемъ

$$\wp(u) = c' + \frac{\Theta(u)\Theta''(u) - [\Theta'(u)]^2}{[\Theta(u)]^2}. \tag{2}$$

Такимъ образомъ функція $\wp(u)$ чрезъ $\Theta(u)$ выражается лишь при помощи производныхъ отъ $\Theta(u)$ перваго и второго порядковъ, тогда какъ $\zeta(u)$ при помощи производной только перваго порядка [по (17)]. Другое выраженіе $\wp(u)$ чрезъ $\Theta(u)$ и ея союзныя получимъ изъ (12) § 88, именно:

$$\wp(u) = e_\iota + \frac{\Theta_\iota^2(u)}{\Theta^2(u)}. \tag{3}$$

ГЛАВА VIII.

Свойства Θ-функцій.

91. Въ § 87 мы опредѣлили Θ-функцію равенствомъ

$$\Theta(u) = e^{Y(u)}, \tag{1}$$

гдѣ по (3) § 87

$$Y(u) = \int_{u_0}^{u} \zeta(u) du + C, \tag{2}$$

и гдѣ въ свою очередь по формулѣ (12) § 84:

$$\zeta(u) = \frac{1}{2}\int_{-u}^{+u} [c' - \wp(u)] du. \tag{3}$$

Послѣдняя функція, какъ то мы видѣли въ § 84, однозначна, конечна и непрерывна на всей плоскости (u) за исключеніемъ точекъ $u = 2\varpi$, въ которыхъ она обращается въ безконечность какъ $\frac{1}{u - 2\varpi}$ при $u = 2\varpi$. Отсюда слѣдуетъ, что функція $Y(u)$ будетъ въ этихъ точкахъ обращаться въ ∞ какъ $\log(u - 2\varpi)$ при $u = 2\varpi$. Такъ какъ интегральный вычетъ функціи $\zeta(u)$ есть единица: 1, то функція $Y(u)$ будетъ въ каждой точкѣ имѣть безчисленное множество значеній, разнящихся между собою на $2k\pi i$, гдѣ k какое-либо цѣлое число, положительное или отрицательное; но какъ

$$e^{2k\pi i} = 1, \tag{4}$$

то изъ (1) будетъ слѣдовать для $\Theta(u)$ одно значеніе въ каждой точкѣ u, какое бы мы ни взяли изъ этихъ значеній $Y(u)$. Итакъ функція

*

$\Theta(u)$ есть *однозначная*. Она *конечная*, ибо обращается въ нуль тамъ, гдѣ $Y(u)$ обращается въ ∞, ибо

$$e^{\log(u-2\tilde{\omega})} = u - 2\tilde{\omega}$$

будетъ $=0$ при $u=2\tilde{\omega}$, другой же множитель будетъ конечный, ибо

$$Y(u) - \log(u - 2\tilde{\omega}) \tag{5}$$

есть конечная величина при $u=\tilde{\omega}$. Непрерывность функціи слѣдуетъ изъ непрерывности $Y(u)$, пока u не $=2\tilde{\omega}$; для этихъ точекъ надобно показать, что функція (5) непрерывна, и имѣетъ производную. Но по (1)

$$Y(u) - \log(u-2\tilde{\omega}) = \int_{u_0}^{u} \left(\zeta(u) - \frac{1}{u-2\tilde{\omega}}\right) du + C_1\,; \tag{6}$$

дифференцируя, получимъ

$$[\,Y(u) - \log(u-2\tilde{\omega})]' = \zeta(u) - \frac{1}{u-2\tilde{\omega}}\,, \tag{7}$$

а это по (10) § 82 для $u=2\tilde{\omega}+\varepsilon$ равно

$$= c'(u-2\tilde{\omega}) + (u-2\tilde{\omega})^3 \mathfrak{P}_1 (u-2\tilde{\omega})^3 + C_2\,, \tag{7'}$$

и слѣдовательно есть конечная величина C_2 при $u=2\tilde{\omega}$; итакъ $Y(u) - \log(u-2\tilde{\omega})$ имѣетъ конечную производную для $u=2\tilde{\omega}$; отсюда слѣдуетъ ея непрерывность, а слѣдовательно и функціи

$$e^{Y(u)-\log(u-2\tilde{\omega})}\,, \tag{8}$$

а потому и функціи

$$\Theta(u) = (u-2\tilde{\omega})e^{Y(u)-\log(u-2\tilde{\omega})}. \tag{9}$$

Итакъ опредѣляемая равенствомъ (1) Θ-функція есть функція *однозначная, конечная и непрерывная на всей плоскости* (u), *обращающаяся въ нуль въ центрахъ параллелограмма періодовъ функціи* $\wp(u)$, т. е. въ точкахъ $u=2\tilde{\omega}$, слѣдовательно *характера цѣлой функціи*; $u=\infty$ есть ея существенно особенная точка, какъ и для функцій $\wp(u)$, $\zeta(u)$ и $Y(u)$. Дѣйствительно $\wp(u)$ можетъ принимать всякое значеніе для $u=\infty$, а потому и $\zeta(u)$ и $Y(u)$.

92. Функція $\Theta(u)$ есть нечетная функція u, т. е. удовлетворяетъ равенству

$$\Theta(-u) = -\Theta(+u); \tag{1}$$

это вытекаетъ изъ свойствъ функціи $Y(u)$.

Построимъ въ плоскости (u) эллипсъ, котораго точки $-u$ и $+u$ были бы вершинами, слѣдовательно точка $u=0$ центромъ, столь узкій, чтобы внутри его не лежала ни которая изъ точекъ $u=2\bar{\omega}$, кромѣ $u=0$. Внутри этого эллипса функція $\zeta(u)$ будетъ вездѣ однозначна, конечна и непрерывна за исключеніемъ точки $u=0$, въ которой она будетъ обращаться въ безконечность какъ $\frac{1}{u}$ при $u=0$; потому интегралъ онъ нея, взятый въ положительномъ направленіи по этому эллипсу, будетъ $=2\pi i$:

$$\int_{(E)} \zeta(u)du = 2\pi i. \tag{2}$$

Но съ другой стороны

$$\int_{(E)} \zeta(u)du = \int_{-u}^{+u} {}^{(n)}\zeta(u)du + \int_{+u}^{-u} {}^{(л)}\zeta(u)du, \tag{3}$$

— разбивая путь интегрированія на двѣ половины: отъ $-u$ до $+u$ по правой сторонѣ и отъ $+u$ до $-u$ по лѣвой; эти же оба интеграла равны, ибо значенія $\zeta(u)du$ въ діаметрально-противоположныхъ точкахъ эллипса равны, такъ какъ

$$\zeta(-u)d(-u) = -\zeta(u)\cdot -du = \zeta(u)du; \tag{4}$$

слѣдовательно

$$\int_{(E)} \zeta(u)du = 2\int_{-u}^{+u} {}^{(n)}\zeta(u)du, \tag{5}$$

и потому по (2) будетъ

$$\int_{-u}^{+u} {}^{(n)}\zeta(u)du = \pi i, \tag{6}$$

и слѣдовательно

$$\int_{-u}^{+u} {}^{(л)}\zeta(u)du = -\pi i. \tag{7}$$

Можно оба равенства соединить въ одно

$$\int_{-u}^{+u} \zeta(u)du = \pm \pi i, \tag{8}$$

гдѣ верхній знакъ относится къ положительному направленію интегрированія, т. е. когда центръ, или $u=0$, лежитъ влѣво отъ пути интегрированія, а нижній, когда интегрированіе идетъ въ отрицательномъ направленіи, т. е. центръ лежитъ справа отъ этого пути.

Возьмемъ теперь на эллипсѣ какую либо точку u_1; потомъ проведемъ изъ u_0 въ u_1 какую-либо линію, непроходящую чрезъ точки $u=2\varpi$, и примемъ эту линію за путь интегрированія функціи $\zeta(u)$, а потомъ пойдемъ изъ u_1 по дугѣ элипса одинъ разъ въ $-u$, другой въ $+u$, тогда получимъ по одному изъ значеній функціи $Y(-u)$ и $Y(+u)$:

$$Y(-u) = \int_{u_0}^{-u} \zeta(u)du + C; \tag{9}$$

$$Y(+u) = \int_{u_0}^{+u} \zeta(u)du + C. \tag{10}$$

Разниться эти интегралы будутъ только въ частяхъ пути интегрированія, лежащихъ на элипсѣ, а потому ихъ разность будетъ:

$$\left.\begin{aligned} Y(-u) - Y(+u) &= \int_{u_1}^{-u} \zeta(u)du - \int_{u_1}^{+u} \zeta(u)du = \\ &= -\int_{-u}^{+u} \zeta(u)du = \mp \pi i, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

— по (8); отсюда получимъ:

$$Y(-u) = Y(+u) \mp \pi i, \tag{12}$$

гдѣ верхній знакъ относится къ случаю, когда u_1 лежитъ на правой половинѣ элипса, а нижній — когда она лежитъ на лѣвой сторонѣ, (если идти отъ $-u$ къ $+u$ по оси элипса). Если возьмемъ теперь какія-либо другія значенія $Y(-u)$ и $Y(+u)$, то они отъ входящихъ въ (12) будутъ отличаться на $2k_1\pi i$ и $2k_2\pi i$, гдѣ k_1 и k_2 какія-либо цѣлыя числа; а потому, полагая $k_2 - k_1 = k$, мы будемъ имѣть вообще:

$$Y(-u) = Y(+u) + (2k \mp 1)\pi i. \tag{13}$$

Беря теперь обѣ части этого равенства показателями степени числа e, будемъ имѣть:

$$e^{Y(-u)} = e^{Y(+u)} \cdot e^{(2k \mp 1)\pi i} = -e^{Y(-u)}; \tag{14}$$

т. е.

$$\Theta(-u) = -\Theta(u), \tag{15}$$

93. Изслѣдуемъ теперь измѣненіе $\Theta(u)$ при измѣненіи u на періоды функціи $\wp(u)$, или что тоже при переходѣ изъ одного параллелограмма періодовъ этой функціи $\wp(u)$ въ соотвѣтственную точку другого. Мы имѣли въ § 83 такое равенство [(15)]:

$$Z(u+\tilde{\omega}) - Z(u-\tilde{\omega}) = 2\tilde{\eta}, \tag{1}$$

гдѣ по (13) § 84

$$Z(u) = \zeta(u) + C; \tag{2}$$

потому будетъ также

$$\zeta(u+\tilde{\omega}) - \zeta(u-\tilde{\omega}) = 2\tilde{\eta}. \tag{3}$$

Здѣсь, какъ и въ (1),

$$\tilde{\omega} = m\omega + n\omega', \tag{4}$$

$$\tilde{\eta} = m\omega + n\omega'; \tag{5}$$

въ частности для $m=1$, $n=0$, и $m=0$, $n=1$, изъ (3) получимъ:

$$\zeta(u+\omega) - \zeta(u-\omega) = 2\eta; \tag{6}$$

$$\zeta(u+\omega') - \zeta(u-\omega') = 2\eta'. \tag{7}$$

Помножимъ (6) на du и проинтегрируемъ по u отъ $u=0$; будемъ имѣть:

$$\int_0^u \zeta(u+\omega)du - \int_0^u \zeta(u-\omega)du = 2\eta u, \tag{8}$$

или

$$\int_{+\omega}^{u+\omega} \zeta(u)du - \int_{-\omega}^{u-\omega} \zeta(u)du = 2\eta u, \tag{9}$$

или по (2) 91:

$$Y(u+\omega)-Y(+\omega)-Y(u-\omega)+Y(-\omega)=2\eta u\,; \qquad (10)$$

но по (1) пред. § для $u=\omega$:

$$Y(+\omega)-Y(-\omega)=\pm\pi i\,; \qquad (11)$$

складывая съ предыдущимъ, получимъ:

$$Y(u+\omega)-Y(u-\omega)=2\eta u\pm\pi i\,; \qquad (12)$$

отсюда, перемѣняя u на $u+\omega$, легко получимъ:

$$Y(u+2\omega)=Y(u)+2\eta(u+\omega)\pm\pi i. \qquad (13)$$

Точно также изъ (7) выведемъ равенство:

$$Y(u+2\omega')=Y(u)+2\eta'(u+\omega')\pm\pi i. \qquad (14)$$

Эти равенства показываютъ, какъ измѣняется значеніе $Y(u)$ при переходѣ u въ соотвѣтственную точку того или другого изъ сосѣднихъ параллелограммовъ; при этомъ имѣется въ виду опредѣленное значеніе $Y(u)$, впрочемъ все равно какое, и переходъ предполагается по кратчайшей линіи; если же мы не желаемъ такъ ограничивать путь перехода, то надо прибавить $2k\pi$ къ правой части этихъ равенствъ, и мы будемъ имѣть тогда такія:

$$Y(u+2\omega)\;=Y(u)+2\eta\,(u+\omega)\;+(2k+1)\pi i \qquad (15)$$

$$Y(u+2\omega')=Y(u)+2\eta'(u+\omega')+(2k'+1)\pi i. \qquad (16)$$

Если эти равенства взять показателями числа e, то по (1) § 91 получимъ:

$$\Theta(u+2\omega)=-\,e^{2\eta(u+\omega)}\,\Theta(u)\,; \qquad (17)$$

$$\Theta(u+2\omega')=-\,e^{2\eta'(u+\omega')}\,\Theta(u)\,; \qquad (18)$$

эти равенства показываютъ, что при переходѣ въ одинъ изъ сосѣднихъ параллелограммовъ періодовъ функціи $\wp(u)$ функція $\Theta(u)$ пріобрѣтаетъ экспоненціальнаго множителя, зависящаго какъ отъ u, такъ и отъ періода, на который измѣняется величина u.

94. Нетрудно получить и формулу, которая показывала бы измѣненіе функціи $\Theta(u)$ при измѣненіи u на $u+2\varpi$, гдѣ ϖ опредѣляется

равенствомъ (4) пред. §. Съ этою цѣлью въ равенствѣ (15) пред. § будемъ u мѣнять на $u+2\omega$ $m-1$ разъ; складывая имѣющійся получиться рядъ равенствъ, по сокращеніи получимъ:

$$Y(u+2m\omega)=Y(u)+2\eta[mu+(1+3+5+\ldots+(2m-1))\omega]+$$
$$+[2(k_1+k_2+\ldots+k_m)+m]\pi i,$$

или, такъ какъ $1+3+5+\ldots+(2m-1)=m^2$, слѣдующее:

$$Y(u+2m\omega)=Y(u)+2m\eta(u+m\omega)+(2k+m)\pi i. \qquad (1)$$

Точно также мѣняя $n-1$ разъ u на $u+2\omega'$ въ (16) пред. §, получимъ равенство:

$$Y(u+2n\omega')=Y(u)+2n\eta'(u+n\omega')+(2l+n)\pi i. \qquad (2)$$

Перемѣняя въ (2) u на $u+2m\omega$ и складывая результатъ съ (1), по сокращеніи получимъ:

$$\left.\begin{aligned}Y(u+2m\omega+2n\omega')=Y(u)+2m\eta(u+m\omega)+\\+2n\eta'(u+2m\omega+n\omega')+[m+n+2(k+l)]\pi i\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

или нѣсколько преобразуя:

$$\left.\begin{aligned}Y(u+2m\omega+2n\omega')=Y(u)+2(m\eta+n\eta')(u+m\omega+n\omega')+\\+2mn(\eta'\omega-\eta\omega')+[m+n+2(k+l)]\pi i.\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Если бы въ (1) перемѣнили u на $u+2n\omega'$ и сложили результатъ съ (2), то вмѣсто $2mn(\eta'\omega-\eta\omega')$ получили бы $2mn(\eta'\omega-\eta'\omega)$; такъ какъ различныя значенія $Y(u)$ разнятся на кратное $2\pi i$, то отсюда слѣдуетъ, что должно быть

$$4(\eta\omega'-\eta'\omega)=2q\pi i; \qquad (a)$$

дѣйствительно, въ слѣдующемъ § мы увидимъ, что $q=\pm 1$; впрочемъ формула (5) § 35 даетъ этотъ результатъ, и если мы еще предложимъ другой выводъ этого соотношенія между періодами интеграловъ перваго и втораго рода, такъ это болѣе для того, чтобы показать, когда нужно брать $+$, когда $-$, отчасти же и ради простоты этого вывода. Имѣя это въ виду, равенство (4) можемъ замѣнить такимъ:

$$Y(u+2\tilde\omega)=Y(u)+2\tilde\eta(u+\tilde\omega)+(m+n+mn+2p)\pi i, \qquad (5)$$

гдѣ p цѣлое число, положительное или отрицательное, а $\bar{\omega}$ и $\bar{\eta}$ имѣютъ прежнія значенія [(4) и (5) пред. §]. Возьмемъ обѣ части равенства (5) показателями числа e, получимъ:

$$\Theta(u + 2\bar{\omega}) = (-1)^{m+n+mn} e^{2\bar{\eta}(u+\bar{\omega})} \Theta(u), \tag{6}$$

равенство показывающее, что при измѣненіи u на какой либо періодъ, функція $\Theta(u)$ пріобрѣтаетъ множителя, зависящаго отъ этого періода какъ и въ § 93, [формулы (17) и (18)]. Равенство (6) можетъ быть и прямо получено съ помощію того же метода изъ упомянутыхъ сейчасъ формулъ, что предоставляемъ читателю выполнить самому. Отмѣтимъ частный случай $m = 1$, $n = 1$, когда будетъ $\bar{\omega} = \omega''$; тогда изъ (6) будемъ имѣть:

$$\Theta(u + 2\omega'') = -e^{2\bar{\eta}''(u+\omega'')} \Theta(u), \tag{7}$$

— одинаковаго вида съ (17) и (18) пред. §. Замѣтимъ еще, что изъ (6) для $u = 0$ слѣдуетъ:

$$\Theta(2\bar{\omega}) = (-1)^{m+n+mn} e^{2\bar{\eta}\bar{\omega}} \Theta(0) = 0, \tag{8}$$

ибо $\Theta(u)$ какъ однозначная, конечная и непрерывная функція, притомъ нечетная, должна обращаться въ нуль вмѣстѣ съ u. Этотъ выводъ уже извѣстнаго изъ предыдущаго результата [(9) § 91] имѣетъ цѣну, когда пожелаемъ опредѣлить функцію $\Theta(u)$ сейчасъ перечисленными свойствами и еще способностью удовлетворять равенствамъ (17) и (18) пред. §, что на самомъ дѣлѣ возможно, какъ увидимъ ниже. Можно предложеніе, заключающееся въ равенствѣ (8) выразить такими словами: функція $\Theta(u)$ однозначная, конечная и непрерывная на всей плоскости (u), въ центрахъ параллелограмма періодовъ функціи $\wp(u)$ обращается въ нуль—притомъ перваго порядка, какъ то видно изъ (9) § 91, (гдѣ второй множитель отличенъ отъ нуля, какъ то можно усмотрѣть и изъ (7′) того же §).

95. Переходимъ къ выводу формулы (a) пред. § и доказательству, что $q = \pm 1$. Съ этою цѣлью проинтегрируемъ функцію $\zeta(u)$ по контуру перваго параллелограмма функціи $\wp(u)$ [см. чертежъ на стр. 121] въ направленіи $C'DCD'C'$. Такъ какъ по (10) § 82, полагая $v = 0$, мы получаемъ для функціи $\zeta(u)$ такое разложеніе въ области точки $z = 0$:

$$\zeta(u) = \frac{1}{u} + u[c' + u^2 \mathfrak{P}_1(u^2)], \tag{1}$$

[гдѣ положено $C_2 = 0$, ибо $\zeta(u)$ нечетная функція) то интегралъ по безконечно-малому кругу, описанному изъ $u = 0$ какъ центра безконечно-малымъ радіусомъ, приведется къ $\pm 2\pi i$:

$$\int_{(0)} \zeta(u)du = \pm 2\pi i\,, \tag{2}$$

смотря по тому, будетъ ли интегрированіе идти въ положительномъ направленіи (+), или отрицательномъ (—); такъ какъ внутри перваго параллелограмма функціи $\wp(u)$ функція $\zeta(u)$, однозначная и непрерывная внутри его, нигдѣ кромѣ центра $(u = 0)$ не обращается въ ∞, то интегралъ по всему периметру параллелограмма будетъ равняться интегралу (2) вокругъ его центра; отсюда такое равенство:

$$\int_{-\omega-\omega'}^{+\omega-\omega'} \zeta(u)du + \int_{+\omega-\omega'}^{+\omega+\omega'} \zeta(u)du + \int_{+\omega+\omega'}^{-\omega+\omega'} \zeta(u)du + \int_{-\omega+\omega'}^{-\omega-\omega'} \zeta(u)du = \pm 2\pi i \tag{3}$$

гдѣ + должно взять, когда обходъ периметра отъ вершины $-\omega-\omega'$, чрезъ вершины $+\omega-\omega'$, $+\omega+\omega'$, $-\omega+\omega'$ опять къ $-\omega-\omega'$ въ этой послѣдовательности будетъ отвѣчать положительному направленію (случай нашего чертежа), (—) когда онъ будетъ отвѣчать отрицательному направленію. Первое будетъ имѣть мѣсто, когда дѣйствительная часть отношенія $\dfrac{\omega'}{\omega i}$ будетъ положительная:

$$\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right) > 0\,, \tag{4}$$

второе, когда она отрицательная:

$$\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right) < 0\,; \tag{5}$$

въ самомъ дѣлѣ, если:

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \varrho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ \omega' &= \varrho'(\cos\varphi' + i\sin\varphi') \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

то отношеніе

$$\left.\begin{aligned} \frac{\omega'}{\omega i} &= \frac{\varrho'}{\varrho i}[\cos(\varphi'-\varphi) + i\sin(\varphi'-\varphi)] = \\ &= \frac{\varrho'}{\varrho}\sin(\varphi'-\varphi) - i\frac{\varrho'}{\varrho}\cos(\varphi'-\varphi)\,, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

и слѣдовательно вещественная часть его

$$\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right)=\frac{\varrho'}{\varrho}\sin(\varphi'-\varphi) \tag{8}$$

и будетъ >0, когда $\varphi'>\varphi$ (какъ на нашемъ чертежѣ); но въ такомъ случаѣ, обходя периметръ въ указанномъ порядкѣ, будемъ имѣть площадь его слѣва; противное будетъ въ случаѣ (5). Возвращаясь къ равенству (3) мы его можемъ такъ представить:

$$\int_{-\omega}^{+\omega}[\zeta(u-\omega')-\zeta(u+\omega')]du+\int_{-\omega'}^{+\omega'}[\zeta(u+\omega)-\zeta(u-\omega)]du=\pm 2\pi i; \tag{9}$$

но по (6) и (7) § 93 мы имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned}\zeta(u+\omega)-\zeta(u-\omega)&=2\eta;\\ \zeta(u+\omega')-\zeta(u-\omega')&=2\eta';\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

на основанiи этого (9) приметъ такой видъ:

$$-2\eta'\int_{-\omega}^{+\omega}du+2\eta\int_{-\omega'}^{+\omega'}du=\pm 2\pi i \tag{11}$$

или

$$2\eta.2\omega'-2\eta'.2\omega=\pm 2\pi i. \tag{12}$$

Отсюда, дѣля на 4, получаемъ:

$$\eta\omega'-\eta'\omega=\pm\frac{\pi}{2}i, \tag{13}$$

гдѣ $+$ берется въ случаѣ (4) и — въ случаѣ (5). Это соотношенiе между полуперiодами эллиптическихъ интеграловъ перваго и втораго рода было найдено *Лежандромъ*, а потому и извѣстно подъ именемъ Лежандровскаго, или теоремы Лежандра. Мы его нашли въ § 35 другимъ способомъ.

Примѣчанiе. На основанiи (13) слѣдовало бы въ (5) § 94 написать $\mp mn$ вмѣсто $+mn$; но въ случаѣ $-mn$, можно принять $p=k+l-mn$, и тогда можно взять $+mn$, какъ оно тамъ и сдѣлано.

Такъ какъ

$$\begin{aligned}\eta\omega''-\eta''\omega&=\eta(\omega+\omega')-(\eta+\eta')\omega=\\ &=\eta\omega'-\eta'\omega,\end{aligned}$$

то по (13) будемъ имѣть:

$$\eta\omega'' - \eta''\omega = \pm\frac{\pi}{2}i; \tag{14}$$

точно также

$$\eta'\omega'' - \eta''\omega' = \eta'(\omega + \omega') - (\eta + \eta')\omega' =$$

$$= \eta'\omega - \eta\omega';$$

слѣдовательно по (13):

$$\eta'\omega'' - \eta''\omega' = \mp\frac{\pi}{2}i. \tag{15}$$

Это замѣчаніе пригодится впослѣдствіи.

96. Уравненіе (17) и (18) § 93 характерны для функціи $\Theta(u)$: всякая однозначная, конечная и непрерывная нечетная функція, обращающаяся въ нуль въ точкахъ $u = 2\varpi$, которая имъ удовлетворяетъ, лишь постояннымъ множителемъ отличается отъ функціи $\Theta(u)$, опредѣляемой равенствомъ (1) § 91. Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ, если $\Phi(u)$ есть такая функція, то отношеніе

$$\frac{\Phi(u)}{\Theta(u)} \tag{1}$$

будетъ функція на всей плоскости однозначная, конечная, непрерывная и отличная отъ нуля, имѣющая лишь точку $u = \infty$ своей существенно-особенной точкой; слѣдовательно она будетъ вида

$$e^{f(u)}, \tag{2}$$

гдѣ $f(u)$ цѣлая функція, т. е. обращающаяся въ ∞ лишь въ точкѣ $u = \infty$, а во всѣхъ прочихъ точкахъ плоскости однозначная, конечная и непрерывная. Въ самомъ дѣлѣ: производная логариѳма однозначной, конечной и непрерывной функціи можетъ обращаться въ безконечность ∞^1 только въ тѣхъ точкахъ, гдѣ сама функція обращается въ нуль или безконечность, а таковыхъ функція (1) въ конечномъ не имѣетъ; слѣдовательно логариѳмическая производная, а слѣдовательно и самъ логариѳмъ суть цѣлыя функціи. Но изъ равенства

$$\frac{\Phi(u)}{\Theta(u)} = e^{f(u)} \tag{3}$$

перемѣняя u на $u + 2\omega$, получаемъ по (17) § 93:

$$\frac{\Phi(u + 2\omega)}{\Theta(u + 2\omega)} = \frac{\Phi(u)}{\Theta(u)} = e^{f(u + 2\omega)}; \tag{4}$$

слѣдовательно по сравненіи съ (3) должно быть

$$f(u + 2\omega) = f(u); \tag{5}$$

точно также найдемъ, что должно быть:

$$f(u + 2\omega') = f(u); \text{*)} \tag{6}$$

слѣдовательно $f(u)$ есть цѣлая двоякоперіодическая функція; но таковая невозможна, ибо какъ цѣлая, она должна быть конечна для конечныхъ значеній u, слѣдовательно и внутри перваго параллелограмма періодовъ; но какъ всѣ другіе параллелограммы періодовъ представляютъ лишь повтореніе перваго, то эта однозначная и непрерывная на всей плоскости функція нигдѣ бы не обращалась въ безконечность; слѣдовательно она есть не что иное какъ постоянное; итакъ

$$f(u) = C, \tag{7}$$

а слѣдовательно и

$$e^{f(u)} = e^{C} = C_1, \tag{8}$$

и потому изъ (3) будетъ слѣдовать

$$\Phi(u) = C_1\, \Theta(u), \tag{9}$$

*) Повидимому слѣдовало бы принять:

$$\left.\begin{aligned} f(u + 2\omega) &= f(u) + 2q\pi i; \\ f(u + 2\omega') &= f(u) + 2q'\pi i; \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

но перемѣняя здѣсь u на $-u$, въ виду четности $f(u)$ [см. (3)] будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} f(u - 2\omega) &= f(u) + 2q\pi i; \\ f(u - 2\omega') &= f(u) + 2q'\pi i; \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

перемѣняя же въ (a) u на $u - 2\omega$, легко получимъ оттуда:

$$\left.\begin{aligned} f(u - 2\omega) &= f(u) - 2q\pi i; \\ f(u - 2\omega') &= f(u) - 2q'\pi i; \end{aligned}\right\} \tag{c}$$

сравнивая съ (b), найдемъ:

$$q = -q, \qquad q' = -q'; \tag{d}$$

слѣдовательно

$$q = 0, \qquad q' = 0. \tag{e}$$

что и требовалось доказать. Но постоянная C_1 заключается уже въ самомъ опредѣленіи функціи $\Theta(u)$ равенствомъ (1) § 91, ибо

$$Y(u)=\int_{u_0}^{u}\zeta(u)du+C; \tag{10}$$

а потому это C_1 въ (9) не увеличиваетъ общности разсматриваемой функціи и можетъ быть принято $=1$, такъ что будетъ:

$$\Phi(u)=\Theta(u). \tag{11}$$

Функція $\Theta(u)$ зависитъ еще также отъ постоянной c', входящей въ $\zeta(u)$; слѣдовательно мы имѣемъ въ $\Theta(u)$, опредѣляемой (1) § 91, всего ∞^2 индивидуальныхъ Θ-функцій. Періоды η и η' зависятъ отъ c'. Изъ безчисленнаго множества этихъ функцій особеннаго вниманія заслуживаютъ функціи Якоби, обозначавшіяся имъ чрезъ $\theta(x)$, и функціи Вейерштрасса, обозначаемыя имъ чрезъ $\sigma(u)$. Послѣднія получимъ, принявъ $c'=0$; Якобіевскія же получимъ, опредѣливъ c' такъ, чтобы было или $\eta'=0$, или $\eta=0$. Мы къ этимъ функціямъ придемъ впослѣдствіи само собою, а потому теперь ограничимся лишь этимъ замѣчаніемъ.

97. Можно поставить задачу шире и искать однозначную, конечную и непрерывную нечетную функцію $\Phi(u)$, которая удовлетворяла бы обоимъ болѣе общимъ уравненіямъ:

$$\Phi(u+2\omega)=e^{au+b}\Phi(u); \tag{1}$$

$$\Phi(u+2\omega')=e^{a'u+b'}\Phi(u); \tag{2}$$

но мы придемъ опять къ функціи $\Theta(u)$, опредѣляемой равенствомъ (1) § 91. Во первыхъ изъ непрерывности и нечетности функціи $\Phi(u)$ слѣдуетъ, что

$$\Phi(0)=0, \tag{3}$$

а слѣдовательно по (1) и (2), что вообще

$$\Phi(2\bar{\omega})=0; \tag{4}$$

во вторыхъ изъ нечетности ея будутъ слѣдовать соотношенія между b и a, и между b' и a'. Перемѣняя въ (1) u на $u-\omega$, будемъ имѣть:

$$\Phi(u+\omega)=e^{a(u-\omega)+b}\Phi(u-\omega); \tag{5}$$

полагая здѣсь $u=0$, получимъ:

$$\Phi(+\omega)=e^{-a\omega+b}\Phi(u-\omega)\,, \tag{6}$$

но какъ $\Phi(\pm\omega)$ не $=0$, ибо эта величина не заключается въ формулѣ $2\tilde{\omega}$, по нечетности же должно быть:

$$\Phi(-\omega)=-\Phi(+\omega); \tag{7}$$

то необходимо

$$e^{-a\omega+b}=-1\,, \tag{8}$$

и потому

$$-a\omega+b=(2l+1)\pi i\,, \tag{9}$$

гдѣ l цѣлое число, откуда

$$b=a\omega+(2l+1)\pi i. \tag{10}$$

Точно также найдемъ:

$$b'=a'\omega'+(2l'+1)\pi i. \tag{11}$$

Вносяиз изъ (10) и (11) соотвѣтственно въ (1) и (2), будемъ имѣть:

$$\Phi(u+2\omega)=-e^{a(u+\omega)}\Phi(u)\,; \tag{12}$$

$$\Phi(u+2\omega')=-e^{a'(u+\omega')}\Phi(u). \tag{13}$$

Дѣля это соотвѣтственно на (17) и (18) § 93, получимъ:

$$\frac{\Phi(u+2\omega)}{\Theta(u+2\omega)}=e^{(a-2\eta)(u+\omega)}\frac{\Phi(u)}{\Theta(u)}\,; \tag{14}$$

$$\frac{\Phi(u+2\omega')}{\Theta(u+2\omega')}=e^{(a-2\eta')(u+\omega)}\frac{\Phi(u)}{\Theta(u)}. \tag{15}$$

Функція $\Phi(u):\Theta(u)$ есть однозначная, конечная и непрерывная и отличная отъ нуля на всей плоскости (u) за исключеніемъ существенно-особенной точки $u=\infty$; слѣдовательно должно быть

$$\frac{\Phi(u)}{\Theta(u)}=e^{\varphi(u)}\,, \tag{16}$$

гдѣ $\varphi(u)$ цѣлая функція, т. е. однозначная, конечная и непрерывная для всѣхъ конечныхъ значеній u. Изъ (14) и (15) слѣдуетъ, что

$$\varphi(u+2\omega)=(a-2\eta)(u+\omega)+\varphi(u); \tag{17}$$

$$\varphi(u+2\omega')=(a'-2\eta')(u+\omega')+\varphi(u); \tag{18}$$

слѣдовательно $\varphi(u)$ должна быть, такъ какъ (16) четная функція, вида

$$\varphi(u)=gu^2+\psi(u), \tag{19}$$

гдѣ $\psi(u)$ двояко-періодическая четная цѣлая функція:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(u+2\omega)&=g(u+2\omega)^2+\psi(u+2\omega)=\\&=gu^2+4g\omega(u+\omega)+\psi(u+2\omega)=\\&=(a-2\eta)(u+\omega)+gu^2+\psi(u);\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

и тоже для другого періода:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(u+2\omega')&=g(u+2\omega')^2+\psi(u+2\omega')=\\&=gu^2+4g\omega'(u+\omega')+\psi(u+2\omega')=\\&=(a'-2\eta')(u+\omega')+gu^2+\psi(u);\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

слѣдовательно

$$4g\omega=a-2\eta; \tag{22}$$

$$\psi(u+2\omega)=\psi(u); \tag{23}$$

$$4g\omega'=a'-2\eta'; \tag{24}$$

$$\psi(u+2\omega')=\psi(u). \tag{25}$$

Изъ (23) и (25) и слѣдуетъ двоякая періодичность функціи $\psi(u)$; но какъ она цѣлая, то слѣдовательно есть постоянная:

$$\psi(u)=h; \tag{26}$$

изъ (22) и (24), находимъ:

$$a=2\eta+4g\omega; \tag{27}$$

$$a'=2\eta'+4g\omega'; \tag{28}$$

вносія это въ (12) и (13), будемъ имѣть:

$$\Phi(u+2\omega)=-e^{(2\eta+4g\omega)(u+\omega)}\Phi(u)\,; \tag{29}$$

$$\Phi(u+2\omega')=-e^{(2\eta'+4g\omega')(u+\omega')}\Phi(u)\,. \tag{30}$$

Изъ (16) по (19) и (26) получимъ:

$$\Phi(u)=e^{gu^2+h}\Theta(u)\,; \tag{31}$$

но это равенство выражаетъ соотношеніе между двумя различными $\Theta(u)$, отвѣчающими различнымъ значеніемъ постоянныхъ c' и C въ $Y(u)$. Дѣйствительно,

$$gu^2+h+Y(u)=gu^2+h+\int_{u_0}^{u}\frac{1}{2}\int_{-u}^{+u}[c'-\wp(u)]dudu+C; \tag{32}$$

но

$$\left.\begin{aligned} gu^2+h&=g(u^2-u_0^2)+h+gu_0^2=\\ =g\int_{u_0}^{u}2udu+h+gu_0^2&=2g\int_{u_0}^{u}\frac{1}{2}\int_{-u}^{+u}dudu+h+gu_0^2; \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

слѣдовательно

$$gu^2+h+Y(u)=\int_{u_0}^{u}\frac{1}{2}\int_{-u}^{+u}[c'+2g-\wp(u)]dudu+C+h+gu_0^2; \tag{34}$$

т. е. это будетъ функція какъ $Y(u)$, въ которой только c' замѣнено чрезъ $c'+2g$ и C чрезъ $C+h+gu_0^2$; обозначая ее чрезъ $Y_1(u)$, такъ, что слѣдовательно будетъ

$$Y_1(u)=gu^2+h+Y(u)\,, \tag{35}$$

мы изъ (31) получимъ

$$\Phi(u)=e^{Y_1(u)}\,, \tag{36}$$

т. е. это будетъ Θ-функція для другихъ значеній постоянныхъ c' и C, и легко видѣть, что $2\eta+2g\omega$ и $\eta'+2g\omega'$ будутъ имѣть по отношенію къ ней тоже значеніе, какъ η и η' по отношенію къ прежней: эти приращенія періодовъ функціи $\zeta(u)$ какъ разъ отвѣчаютъ измѣненію постоянной c' въ $c'+2g$.

98. Перемѣняя въ равенствѣ

$$\Theta(u+2\omega_i) = -e^{2\eta_i(u+\omega_i)}\Theta(u), \qquad (1)$$

которое обнимаетъ въ себѣ равенства (17), (18) § 93 и § 94, u на $u-\omega_i$ и помножая обѣ части на $e^{-\eta_i u}$, мы получимъ въ виду нечетности функціи $\Theta(u)$, такое равенство:

$$e^{-\eta_i u}\Theta(u+\omega_i) = e^{\eta_i u}\Theta(\omega_i - u), \qquad (2)$$

которое говоритъ, что функція, стоящая здѣсь по лѣвую часть знака равенства, есть четная функція отъ u. На основаніи этого равенства изъ (9) § 88 легко получаемъ такое:

$$\Theta_i(u) = \frac{\Theta'(0)\,\Theta(\omega_i - u)e^{\eta_i u}}{\Theta(\omega_i)} = \frac{\Theta'(0)\,\Theta(\omega_i + u)e^{-\eta_i u}}{\Theta(\omega_i)}; \qquad (3)$$

изъ этого равенства видна четность функціи $\Theta_i(u)$. Его короче можно такъ написать:

$$\Theta_i(u) = \pm\frac{\Theta'(0)\,\Theta(u\pm\omega_i)e^{\mp\eta_i u}}{\Theta(\omega_i)}, \qquad (4)$$

гдѣ нужно заразъ вездѣ брать или верхній знакъ или нижній. Это равенство (къ которому въ статьѣ нашей: Ueber das Umkehrproblem der elliptischen Intergrale. 2 Note. Math. Ann. Bd. XXII, мы пришли другимъ путемъ) можно принять за опредѣленіе союзной Θ-функціи, и тогда не трудно показать, что союзныя Θ-функціи удовлетворяютъ подобнымъ же функціональнымъ уравненіямъ, какъ и основная.

Остановившись въ (4) на верхнемъ знакѣ, перемѣнимъ тамъ u на $u+2\omega_j$; мы получимъ:

$$\Theta_i(u+2\omega_j) = \frac{\Theta'(0)\,\Theta(u+2\omega_j+\omega_i)e^{-\eta_i(u+2\omega_j)}}{\Theta(\omega_i)}; \qquad (5)$$

но по (1), перемѣняя тамъ сперва i на j, и затѣмъ u на $u+\omega_i$, имѣемъ:

$$\Theta(u+\omega_i+2\omega_j) = -e^{2\eta_j(u+\omega_i+\omega_j)}\Theta(u+\omega_i); \qquad (6)$$

*

вноси это въ предыдущее, будемъ имѣть:

$$\Theta_i(u+2\omega_j) = -\frac{\Theta'(0)\,\Theta(u+\omega_i)e^{2\eta_j(u+\omega_i+\omega_j)}}{\Theta(\omega_i)}\,e^{-\eta_i(u+2\omega_j)}, \tag{7}$$

или

$$\Theta_i(u+2\omega_j) = -\frac{\Theta'(0)\,\Theta(u+\omega_i)e^{-\eta_i u}}{\Theta(\omega_i)}\,e^{2\eta_j(u+\omega_j)}\,.\,e^{2(\eta_j\omega_i-\eta_i\omega_j)}, \tag{8}$$

или наконецъ по (3):

$$\Theta_i(u+2\omega_j) = -\,e^{2(\eta_j\omega_i-\eta_i\omega_j)}\,.\,e^{2\eta_j(u+\omega_j)}\,\Theta_i(u); \tag{9}$$

если $j=i$, то

$$e^{2(\eta_i\omega_i-\eta_i\omega_i)} = 1\,,$$

и (9) обращается въ такое:

$$\Theta_i(u+2\omega_i) = -\,e^{2\eta_i(u+\omega_i)}\,\Theta_i(u); \tag{10}$$

— что одинаковаго вида съ функціональнымъ уравненіемъ (1) основной Θ-функціи; если же j не $=i$, то по Лежандровской теоремѣ [(13), (14), (15) § 95] будетъ:

$$e^{2(\eta_j\omega_i-\eta_i\omega_j)} = e^{\pm\pi i} = -\,1\,,$$

и (9) принимаетъ такой видъ:

$$\Theta_i(u+2\omega_j) = +\,e^{2\eta_j(u+\omega_j)}\,\Theta_i(u). \tag{11}$$

99. Равенство (4) опредѣляетъ $\Theta_i(u)$ какъ функцію такого типа:

$$\Phi(u) = e^{\alpha u+\beta}\,\Theta(u+v), \tag{1}$$

гдѣ α, β и v нѣкоторыя постоянныя, которая удовлетворяетъ функціональнымъ уравненіямъ вида:

$$\Phi(u+2\omega) = e^{au+b}\,\Phi(u); \tag{2}$$

$$\Phi(u+2\omega') = e^{a'u+b'}\,\Phi(u), \tag{3}$$

и притомъ четную. Изъ послѣдняго условія сейчасъ вытекаютъ соотношенія между a и b, и a' и b'. Перемѣняя во (2) u на $u - \omega$, получимъ:

$$\Phi(u + \omega) = e^{au - a\omega + b}\Phi(u - \omega); \tag{4}$$

полагая здѣсь $u = 0$, будемъ имѣть:

$$\Phi(+\omega) = e^{-a\omega + b}\Phi(-\omega); \tag{5}$$

но какъ по четности функціи $\Phi(u)$

$$\Phi(+\omega) = \Phi(-\omega); \tag{6}$$

то изъ (5) будетъ слѣдовать

$$e^{-a\omega + b} = 1, \tag{7}$$

и слѣдовательно

$$b = a\omega + 2k\pi i; \tag{8}$$

внося это въ (2), будемъ имѣть:

$$\Phi(u + 2\omega) = e^{a(u+\omega)}\Phi(u); \tag{9}$$

точно также (3) приведется на основаніи четности функціи $\Phi(u)$ къ такому:

$$\Phi(u + 2\omega') = e^{a'(u+\omega')}\Phi(u). \tag{10}$$

Перемѣняя въ (1) u на $u + 2\omega$, будемъ имѣть:

$$\Phi(u + 2\omega) = e^{\alpha(u+2\omega)+\beta}\Theta(u + 2\omega + v); \tag{11}$$

но по (17) § 93 будетъ:

$$\Theta(u + 2\omega + v) = -e^{2\eta(u+v+\omega)}\Theta(u + v); \tag{12}$$

внося это въ предыдущее и имѣя въ виду (1), получимъ:

$$\Phi(u + 2\omega) = -e^{2\eta(u+\omega)}e^{\alpha.2\omega + v.2\eta}\Phi(u); \tag{13}$$

сличая это съ (9), найдемъ:

$$a = 2\eta; \tag{14}$$

$$e^{2(\alpha\omega + v\eta)} = -1; \tag{15}$$

откуда слѣдуетъ, что

$$2(a\omega + v\eta) = (2l + 1)\pi i. \tag{16}$$

Точно также найдемъ

$$a' = 2\eta, \tag{17}$$

$$2(a\omega' + v\eta') = (2l' + 1)\pi i. \tag{18}$$

Изъ уравненій (16) и (18), рѣшая ихъ относительно a и v, помня Лежандровское соотношеніе:

$$2(\eta'\omega - \eta\omega') = \pm \pi i, \tag{19}$$

найдемъ:

$$a = (2l + 1)\eta' - (2l' + 1)\eta; \tag{20}$$

$$v = (2l' + 1)\omega' - (2l + 1)\omega, \tag{21}$$

гдѣ мы опустили для простоты двойной знакъ, такъ какъ l и l' какія угодно цѣлыя числа положительныя или отрицательныя. Внося изъ (20) и (21) значенія a и v въ (1), будемъ имѣть:

$$\Phi(u) = e^{[(2l+1)\eta' - (2l'+1)\eta]u + \beta}\, \Theta[u + (2l' + 1)\omega - (2l + 1)\omega'], \tag{22}$$

или перемѣняя l на $-l'' - 1$:

$$\Phi(u) = e^{-[(2l'+1)\eta + (2l''+1)\eta']u + \beta}\, \Theta[u + (2l' + 1)\omega + (2l'' + 1)\omega']. \tag{23}$$

Это выраженіе значительно упрощается съ помощію (6) § 94, по которому будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} &\Theta[u + (2l' + 1)\omega + (2l'' + 1)\omega'] = \\ &= (-1)^{l' + l'' + l'l''} e^{(2l'\eta + 2l''\eta')[u + (l'+1)\omega + (l''+1)\omega']}\, \Theta(u + \omega + \omega'); \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

внося это въ (23), и полагая

$$(l' + l'' + l'l'')\pi i + \beta + (2l'\eta + 2l''\eta')[(l' + 1)\omega + (l'' + 1)\omega'] = \gamma, \tag{25}$$

$$e^{\gamma} = \Gamma, \tag{26}$$

мы получимъ

$$\Phi(u) = \Gamma \cdot e^{-\eta'' u}\, \Theta(u + \omega''), \tag{27}$$

такъ какъ $\eta + \eta' = \eta''$, $\omega + \omega' = \omega''$. Полагая

$$\Gamma = \frac{\Gamma_2 \Theta'(0)}{\Theta(\omega'')}, \tag{28}$$

это можно и такъ написать:

$$\Phi(u) = \Gamma_2 \frac{\Theta'(0) e^{-\eta'' u} \Theta(u + \omega'')}{\Theta(\omega'')}. \tag{29}$$

Какъ видимъ эта функція только постояннымъ множителемъ отличается отъ функціи:

$$\Theta_2(u) = \frac{\Theta'(0)\,\Theta(u + \omega'') e^{-\eta'' u}}{\Theta(\omega'')}, \tag{30}$$

получающейся изъ (4) § 98, принимая $\omega_i = \omega''$.

Точно также, если бы искали четную функцію типа (1), удовлетворяющую уравненіямъ:

$$\Phi(u + 2\omega) = e^{au+b} \Phi(u), \tag{31}$$

$$\Phi(u + 2\omega') = - e^{a'u+b'} \Phi(u), \tag{32}$$

то пришли бы къ функціи лишь постояннымъ множителемъ отличающейся отъ $\Theta_3(u)$; ища функцію, удовлетворяющую уравненіямъ:

$$\Phi(u + 2\omega) = - e^{au+b} \Phi(u) \tag{33}$$

$$\Phi(u + 2\omega') = e^{a'u+b'} \Phi(u), \tag{34}$$

мы получили бы функцію лишь постояннымъ множителемъ отличающуюся отъ $\Theta_1(u)$. Итакъ, не обращая вниманія на постоянный множитель, можемъ сказать, что функціи

$$\Theta_1(u), \qquad \Theta_2(u), \qquad \Theta_3(u) \tag{35}$$

суть единственныя четныя функціи типа (1), удовлетворяющія уравненіямъ вида (2) и (3).

100. Самая общая Θ-функція получится, если мы возьмемъ для образованія функціи $Y(u)$ самую общую функцію второго рода:

$$Z(u \mid v) = \int_{u_0}^{u} [c' - \wp(u - v)] du + C; \tag{1}$$

помножая на du и интегрируя, получимъ самую общую функцію $Y(u)$, которую означимъ чрезъ $Y(u\,|\,v;C,C')$:

$$\left.\begin{aligned} Y(u\,|\,v;C,C') &= \int_{u_0}^{u} Z(u\,|\,v)du + C'' = \\ &= \int_{u_0}^{u}\int_{u_0}^{u} [c' - \wp(u-v)]dudu + Cu + C'; \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

гдѣ $C' = C'' - Cu_0$. Она, какъ и интегралъ третьяго рода, выражается двойнымъ интеграломъ, только оба раза по одной и той же перемѣнной u. Эта функція весьма просто выражается чрезъ $Y(u)$. Дѣйствительно, по (16) § 84, полагая

$$-\zeta(u_0 - v) + C = C_0, \qquad (3)$$

имѣемъ

$$Z(u\,|\,v) = \zeta(u-v) + C_0;$$

потому будетъ

$$\left.\begin{aligned} Y(u\,|\,v;C,C') &= \int_{u_0}^{u} \zeta(u-v)du + C_0(u-u_0) + C' = \\ &= Y(u-v) - Y(u_0 - v) + C_0(u-u_0) + C', \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

или, полагая:

$$-Y(u_0 - v) - C_0u_0 + C' = C_1: \qquad (6)$$

$$Y(u\,|\,v;C,C') = Y(u-v) + C_0u + C_1; \qquad (7)$$

слѣдовательно

$$e^{Y(u\,|\,v;\,C,\,C')} = e^{Y(u-v)}\cdot e^{C_0u + C_1} = e^{C_0u + C_1}\Theta(u-v); \qquad (8)$$

полагая

$$e^{Y(u\,|\,v;\,C,\,C')} = \Theta(u\,|\,v;\,C_0,\,C_1), \qquad (9)$$

мы будемъ имѣть:

$$\Theta(u\,|\,v;\,C_0,\,C_1) = e^{C_0u + C_1}\Theta(u-v). \qquad (10)$$

Вотъ самая общая Θ-функція, и мы видимъ какъ она просто выражается чрезъ нашу прежнюю Θ-функцію; она переходитъ въ нее, когда всѣ параметры v, C_0, и C_1 приравняемъ нулю; она переходитъ въ $\Theta_i(u)$, когда примемъ

$$v = \omega_i, \quad C_0 = \eta_i, \quad C_1 = \log \frac{\Theta'(0)}{\Theta(\omega_i)}. \tag{11}$$

Если примемъ (9) за опредѣленіе общей Θ-функціи, и пожелаемъ получить изъ нея нечетную, то значенія параметровъ должны будемъ опредѣлить изъ условія:

$$e^{Y(-u\,|\,v;\,C,\,C')} = -e^{Y(u\,|\,v;\,C,\,C')}, \tag{12}$$

которое по (7) приводится къ такому:

$$Y(-u-v) - C_0 u + C_1 = Y(u-v) + C_0 u + C_1 + (2g+1)\pi i \tag{13}$$

или

$$Y(-u-v) - Y(u-v) = 2C_0 u + (2g+1)\pi i; \tag{14}$$

что должно имѣть мѣсто для всякаго u; но полагая $u=0$, приходимъ къ невозможному равенству:

$$Y(-v) - Y(-v) = (2g+1)\pi i,$$

ибо различныя значенія $Y(-v)$ могутъ разниться только на четнократное πi; отсюда заключаемъ, что должно принять $v=0$, $C_0=0$, ибо тогда (14) переходитъ въ равенство

$$Y(-u) - Y(u) = (2g+1)\pi i, \tag{15}$$

имѣющее мѣсто для всякаго u [§ 92]. Если пожелаемъ имѣть изъ общей четную Θ-функцію, то постоянныя должно опредѣлить изъ условія:

$$Y(-u-v) - Y(u-v) = 2C_0 u + 2g\pi i \tag{16}$$

или, такъ какъ

$$Y(-u-v) = Y(u+v) + (2h+1)\pi i \tag{17}$$

изъ условія:

$$Y(u+v)-Y(u-v)=2C_0u+(2k+1)\pi i\,; \tag{18}$$

сличая это съ (5) § 94, находимъ, что вообще должно быть

$$v=\tilde{\omega}\,,\qquad C_0=\tilde{\eta}\,, \tag{19}$$

при m и n нечетныхъ, что, какъ мы видѣли въ предыдущемъ §, легко сводится къ случаямъ, когда эти числа не превосходятъ единицу, а тогда мы получаемъ наши союзныя $\Theta_i(u)$, если не обращать вниманія на постоянный множитель.

101. Въ § 98 мы разсмотрѣли измѣненіе союзной Θ_i-функціи при измѣненіи u на періоды $2\omega_i$ и $2\omega_j$; изслѣдуемъ, какъ она измѣняется при измѣненіи u на $u+2\tilde{\omega}$, гдѣ $\tilde{\omega}$ имѣетъ прежнее значеніе: $\tilde{\omega}=m\omega+n\omega'$. Дѣлая эту перемѣну u на $u+2\tilde{\omega}$ въ (4) § 98, мы будемъ имѣть:

$$\Theta_i(u+2\tilde{\omega})=\pm\frac{\Theta'(0)\,\Theta(u+2\tilde{\omega}\pm\omega_i)}{\Theta(\omega_i)}\,e^{\mp\eta_i(u+2\tilde{\omega})}\,; \tag{1}$$

но перемѣняя u на $u\pm\omega_i$ въ (6) § 94, мы будемъ имѣть:

$$\Theta(u\pm\omega_i+2\tilde{\omega})=(-1)^{m+n+mn}\,\Theta(u\pm\omega_i)e^{2\tilde{\eta}(u\pm\omega_i+\tilde{\omega})}\,; \tag{2}$$

внося это въ (1), получимъ:

$$\left.\begin{aligned}\Theta_i(u+2\tilde{\omega})=\pm(-1)^{m+n+mn}\,\frac{\Theta'(0)\,\Theta(u\pm\omega_i)}{\Theta(\omega_i)}\,e^{\mp\eta_i u}\times\\ \times\,e^{2\tilde{\eta}(u+\tilde{\omega})}\,.\,e^{\pm 2(\tilde{\eta}\omega_i-\eta_i\tilde{\omega})}\,;\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

или по (4) § 98:

$$\Theta_i(u+2\tilde{\omega})=(-1)^{m+n+mn}e^{\pm 2(\tilde{\eta}\omega_i-\eta_i\tilde{\omega})}\,\Theta_i(u)e^{2\tilde{\eta}(u+\tilde{\omega})}\,; \tag{4}$$

но

$$\tilde{\omega}=m\omega+n\omega'\,,\ \tilde{\eta}=m\eta+n\eta'\,;$$

слѣдовательно

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\eta}\omega_i-\eta_i\tilde{\omega}=(m\eta+n\eta')\omega_i-\eta_i(m\omega+n\omega')=\\ =m(\eta\omega_i-\eta_i\omega)+n(\eta'\omega_i-\eta_i\omega')\,;\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

если $i=1$, то это приведется къ

$$n(\eta'\omega-\eta\omega')=\mp n\frac{\pi}{2}i; \tag{6}$$

если $i=2$, то къ

$$\left.\begin{aligned} & m[\eta(\omega+\omega')-(\eta+\eta')\omega]+n[\eta'(\omega+\omega')-(\eta+\eta')\omega']= \\ & =(m-n)(\eta\omega'-\eta'\omega)=\pm(m-n)\frac{\pi}{2}i; \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

если $i=3$, то къ

$$m(\eta\omega'-\eta'\omega)=\pm m\frac{\pi}{2}i; \tag{8}$$

слѣдовательно въ первомъ случаѣ будетъ:

$$e^{\pm 2(\tilde{\eta}\omega_i-\eta_i\tilde{\omega})}=e^{\pm(\mp n\pi i)}=(-1)^n \tag{9}$$

во второмъ

$$e^{\pm 2(\tilde{\eta}\omega_i-\eta_i\tilde{\omega})}=e^{\pm[\mp(m-n)\pi i]}=(-1)^{m-n}=(-1)^{m+n}; \tag{10}$$

въ третьемъ:

$$e^{\pm 2(\tilde{\eta}\omega_i-\eta_i\tilde{\omega})}=e^{\pm(\pm m\pi i)}=(-1)^m; \tag{11}$$

полагая теперь

$$\varepsilon_1=(-1)^{m(n+1)}; \qquad \varepsilon_2=(-1)^{mn}, \qquad \varepsilon_3=(-1)^{n(m+1)}, \tag{12}$$

мы можемъ по (6), (7) и (8) равенству (4) дать такой видъ:

$$\Theta_i(u+2\tilde{\omega})=\varepsilon_i e^{2\tilde{\eta}(u+\tilde{\omega})}\Theta_i(u); \tag{13}$$

это равенство лишь множителемъ ε_i отличается отъ (6) § 94, которое тоже можно считать заключающимся въ этомъ, если принять, что $\Theta_0(u)=\Theta(u)$, и

$$\varepsilon_0=(-1)^{m+n+mn}. \tag{14}$$

102. Полагая въ (6) § 94 $u=0$, изъ равенства

$$\Theta(0)=0 \tag{1}$$

мы вывели то слѣдствіе для основной Θ-функціи, что

$$\Theta(2m\omega + 2n\omega') = 0\,; \tag{2}$$

по той же причинѣ, т. е. (1), полагая въ (3) § 98 $u = \omega_i$, мы получимъ

$$\Theta_i(\omega_i) = 0\,, \tag{3}$$

и на основаніи этого изъ (13) пред. § найдемъ

$$\Theta_i(\omega_i + 2\tilde{\omega}) = 0\,; \tag{4}$$

отсюда получаемъ такія равенства для каждой союзной Θ-функціи въ отдѣльности:

$$\Theta_1[(2m+1)\omega + 2n\omega'] = 0\,; \tag{5}$$

$$\Theta_2[(2m+1)\omega + (2n+1)\omega'] = 0\,; \tag{6}$$

$$\Theta_3[2m\omega + (2n+1)\omega'] = 0\,. \tag{7}$$

Равенства (2), (5), (6) и (7) опредѣляютъ нули основной Θ-функціи и союзныхъ.

103. Равенство (3) пред. § говоритъ, что $\Theta_i(u)$ обращается въ нуль, когда вмѣсто u подставимъ полуперіодъ ω_i, входящій въ ея опредѣленіе; разсмотримъ теперь значеніе $\Theta_i(u)$ для $u = \omega_j$. Полагая въ (3) § 98 $u = \mp\omega_j$ и имѣя въ виду четность $\Theta_i(u)$, мы получимъ:

$$\Theta_i(\omega_i) = \frac{\Theta'(0)\Theta(\omega_i \mp \omega_j)e^{\pm\eta_i\omega_j}}{\Theta(\omega_i)}\,; \tag{1}$$

отсюда, если $\omega_i + \omega_j = \omega_k$, — это, когда $k = 2$, — будемъ имѣть:

$$\Theta_i(\omega_j) = \frac{\Theta'(0)\Theta(\omega_k)e^{-\eta_i\omega_j}}{\Theta(\omega_i)}\,; \tag{2}$$

если $\omega_i - \omega_j = \pm\omega_k$, — когда k не $= 2$:

$$\Theta_i(\omega_j) = \pm\frac{\Theta'(0)\Theta(\omega_k)e^{\eta_i\omega_j}}{\Theta(\omega_i)}\,; \tag{3}$$

здѣсь верхній знакъ относится къ случаю $i=2$, нижній къ случаю $j=2$. Такимъ образомъ получаемъ слѣдующія шесть формулъ:

$$\left.\begin{aligned}
\Theta_1(\omega'') &= -\frac{\Theta'(0)\Theta(\omega')e^{\eta\omega''}}{\Theta(\omega')}; & \Theta_1(\omega') &= \frac{\Theta'(0)\Theta(\omega'')e^{-\eta\omega'}}{\Theta(\omega)};\\
\Theta_2(\omega') &= \frac{\Theta'(0)\Theta(\omega)e^{\eta''\omega'}}{\Theta(\omega'')}; & \Theta_2(\omega) &= \frac{\Theta'(0)\Theta(\omega')e^{\eta''\omega}}{\Theta(\omega'')};\\
\Theta_3(\omega) &= \frac{\Theta'(0)\Theta(\omega'')e^{-\eta'\omega}}{\Theta(\omega')}; & \Theta_3(\omega'') &= -\frac{\Theta'(0)\Theta(\omega)e^{\eta'\omega''}}{\Theta(\omega')}.
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

104. Если въ формулѣ

$$\sqrt{\wp(u)-e_i}=\frac{\Theta_i(u)}{\Theta(u)} \quad (1)$$

положить $u=\omega_j$, то будемъ имѣть:

$$\sqrt{e_j-e_i}=\frac{\Theta_i(\omega_j)}{\Theta(\omega_j)}, \quad (2)$$

откуда получаемъ:

$$\Theta_i(\omega_j)=\sqrt{e_j-e_i}\,\Theta(\omega_j). \quad (3)$$

Внося во (2) вмѣсто $\Theta_i(\omega_j)$ ея значеніе изъ формулъ (2) или (3) пред. §, будемъ имѣть:

$$\sqrt{e_j-e_i}=\frac{\Theta'(0)\Theta(\omega_k)}{\Theta(\omega_i)\Theta(\omega_j)}e^{-\eta_i\omega_j}, \quad (4)$$

когда $\omega_i+\omega_j=\omega_k$, слѣдовательно $k=2$, и

$$\sqrt{e_j-e_i}=\pm\frac{\Theta'(0)\,\Theta(\omega_k)}{\Theta(\omega_i)\,\Theta(\omega_j)}e^{\eta_i\omega_j}, \quad (5)$$

когда $\omega_i-\omega_j=\pm\omega_k$; сообразно съ этимъ знакомъ берется и знакъ во второй части этой формулы. Переставляя i и j между собою, мы получимъ для перваго случая:

$$\sqrt{e_i-e_j}=\frac{\Theta'(0)\,\Theta(\omega_k)}{\Theta(\omega_i)\,\Theta(\omega_j)}e^{-\eta_j\omega_i}, \quad (6)$$

для второго

$$\sqrt{e_i - e_j} = \mp \frac{\Theta'(0)\,\Theta(\omega_k)}{\Theta(\omega_i)\,\Theta(\omega_j)}\, e^{\eta_j \omega_i}. \tag{7}$$

Эти формулы обнимаютъ слѣдующія шесть формулъ:

$$\left.\begin{aligned}
&\sqrt{e_2 - e_1} = -\frac{\Theta'(0)\,\Theta(\omega')}{\Theta(\omega)\,\Theta(\omega'')}\, e^{\eta\omega''}; \quad \sqrt{e_3 - e_1} = \frac{\Theta'(0)\,\Theta(\omega'')}{\Theta(\omega)\,\Theta(\omega')}\, e^{-\eta\omega'};\\
&\sqrt{e_3 - e_2} = \frac{\Theta'(0)\,\Theta(\omega)}{\Theta(\omega'')\,\Theta(\omega')}\, e^{\eta''\omega'}; \quad \sqrt{e_1 - e_2} = \frac{\Theta'(0)\,\Theta(\omega')}{\Theta(\omega'')\,\Theta(\omega)}\, e^{\eta''\omega};\\
&\sqrt{e_1 - e_3} = \frac{\Theta'(0)\,\Theta(\omega'')}{\Theta(\omega')\,\Theta(\omega)}\, e^{-\eta'\omega}; \quad \sqrt{e_2 - e_3} = -\frac{\Theta'(0)\,\Theta(\omega)}{\Theta(\omega')\,\Theta(\omega'')}\, e^{\eta'\omega''}.
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Дѣля (4) на (6), или (5) на (7), находимъ:

$$\frac{\sqrt{e_j - e_i}}{\sqrt{e_i - e_j}} = e^{\eta_j\omega_i - \eta_i\omega_j}, \tag{9}$$

$$\frac{\sqrt{e_j - e_i}}{\sqrt{e_i - e_j}} = -\, e^{\eta_i\omega_j - \eta_j\omega_i}; \tag{10}$$

первое предполагаетъ $k = 2$; въ этомъ случаѣ, если $j > i$, будетъ по (13) § 95:

$$\eta_j\omega_i - \eta_i\omega_j = \eta'\omega - \eta\omega' = \mp \frac{\pi}{2}\sqrt{-1}, \tag{11}$$

гдѣ — берется въ случаѣ $\Re\left(\frac{\omega'}{\omega_i}\right) > 0$, въ противномъ же случаѣ $+$;

второе предполагаетъ i или $j = 2$; если опять $j > i$, то по (14) и (15) § 95 будетъ

$$\eta_i\omega_j - \eta_j\omega_i = \pm \frac{\pi}{2}\sqrt{-1}; \tag{12}$$

слѣдовательно въ обоихъ равенствахъ при $j > i$ правая часть приведется къ

$$-\, e^{\pm\frac{\pi}{2}} = \mp\sqrt{-1}, \tag{13}$$

такъ что при $j > i$ будетъ

$$\frac{\sqrt{e_j - e_i}}{\sqrt{e_i - e_j}} = \mp\sqrt{-1}\,, \tag{14}$$

или, подробнѣе выписывая:

$$\frac{\sqrt{e_3 - e_2}}{\sqrt{e_2 - e_3}} = \frac{\sqrt{e_3 - e_1}}{\sqrt{e_1 - e_3}} = \frac{\sqrt{e_2 - e_1}}{\sqrt{e_1 - e_2}} = \mp\sqrt{-1}\,, \tag{15}$$

гдѣ верхній знакъ относится къ случаю, когда $\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right) > 0$, нижній — когда $\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right) < 0$.

105. Если предположимъ $\omega_i + \omega_j = \omega_k$, то перемѣняя въ (7) пред. § j на k и наоборотъ, мы должны взять нижній знакъ въ формулѣ; будемъ имѣть:

$$\sqrt{e_i - e_k} = +\frac{\Theta'(0)\,\Theta(\omega_j)}{\Theta(\omega_i)\,\Theta(\omega_k)}\,e^{\eta_k \omega_i}\,; \tag{1}$$

перемножая ее съ (6) пред. §, по извлеченіи квадратнаго корня получимъ:

$$\sqrt[4]{e_i - e_j}\cdot\sqrt[4]{e_i - e_k} = \frac{\Theta'(0)}{\Theta(\omega_i)}\,e^{\frac{\eta_i \omega_i}{2}}\,, \tag{2}$$

— имѣя въ виду, что $\eta_i + \eta_j = \eta_k$ въ разсматриваемомъ случаѣ. Дѣля (6) пред. § на (1) настоящаго, по извлеченіи квадратнаго корня получимъ:

$$\frac{\sqrt[4]{e_i - e_j}}{\sqrt[4]{e_i - e_k}} = \frac{\Theta(\omega_k)}{\Theta(\omega_j)}\,e^{-\frac{\eta_j + \eta_k}{2}\omega_i}\,. \tag{3}$$

Если k не $= 2$, а $i = 2$, то нужно взять (7) пред. § съ верхнимъ знакомъ также и тогда, когда переставимъ j съ k; въ этомъ случаѣ будемъ имѣть:

$$\sqrt{e_i - e_j} = -\frac{\Theta'(0)\,\Theta(\omega_k)}{\Theta(\omega_i)\,\Theta(\omega_j)}\,e^{\eta_j \omega_i}\,; \tag{4}$$

$$\sqrt{e_i - e_k} = -\frac{\Theta'(0)\,\Theta(\omega_j)}{\Theta(\omega_i)\,\Theta(\omega_k)}\,e^{\eta_k \omega_i}\,; \tag{5}$$

перемножая, въ виду того, что теперь $\eta_j + \eta_k = \eta_i$ получимъ опять (2) по извлеченіи квадратнаго корня; дѣля же (4) на (5), по извлеченіи квадратнаго корня получимъ:

$$\frac{\sqrt[4]{e_i - e_j}}{\sqrt[4]{e_i - e_k}} = \frac{\Theta(\omega_k)}{\Theta(\omega_j)} e^{\frac{\eta_i - \eta_k}{2}\omega_i}. \tag{6}$$

Изъ (2) находимъ слѣдующія три равенства, которыя оно заключаетъ въ себѣ:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt[4]{e_1 - e_2} \cdot \sqrt[4]{e_1 - e_3} &= \frac{\Theta'(0)}{\Theta(\omega)} e^{\frac{\eta\omega}{2}}; \\ \sqrt[4]{e_2 - e_3} \cdot \sqrt[4]{e_2 - e_1} &= \frac{\Theta'(0)}{\Theta(\omega'')} e^{\frac{\eta''\omega''}{2}}; \\ \sqrt[4]{e_3 - e_1} \cdot \sqrt[4]{e_3 - e_2} &= \frac{\Theta'(0)}{\Theta(\omega')} e^{\frac{\eta'\omega'}{2}}, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

откуда въ свою очередь получаемъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\Theta(\omega)}{\Theta'(0)} &= \frac{e^{\frac{\eta\omega}{2}}}{\sqrt[4]{e_1 - e_2} \cdot \sqrt[4]{e_1 - e_3}}; \\ \frac{\Theta(\omega'')}{\Theta'(0)} &= \frac{\sqrt{\pm i}\, e^{\frac{\eta''\omega''}{2}}}{\sqrt[4]{e_1 - e_2} \cdot \sqrt[4]{e_2 - e_3}}; \\ \frac{\Theta(\omega')}{\Theta'(0)} &= \frac{\pm i\, e^{\frac{\eta'\omega'}{2}}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} \cdot \sqrt[4]{e_2 - e_3}}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

[Ср. *Halphen*, I. p. 190—194; *Schwartz*, S. 24—25]. Здѣсь принято $\sqrt{i} = e^{\frac{\pi}{4}i}$, $\sqrt{-i} = e^{-\frac{\pi}{4}i}$; верхній знакъ отвѣчаетъ случаю $\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right) > 0$, нижній случаю $\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right) < 0$. Изъ (3) и (6) такимъ же образомъ найдемъ слѣдующія три:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\sqrt[4]{e_1-e_2}}{\sqrt[4]{e_1-e_3}}=\frac{\Theta(\omega')}{\Theta(\omega'')}e^{\frac{\eta'+\eta''}{2}\omega};\\
&\frac{\sqrt[4]{e_2-e_1}}{\sqrt[4]{e_2-e_3}}=\sqrt{\mp i}\,\frac{\sqrt[4]{e_1-e_2}}{\sqrt[4]{e_2-e_3}}=\frac{\Theta(\omega')}{\Theta(\omega)}e^{\frac{\eta-\eta'}{2}\omega''};\\
&\frac{\sqrt[4]{e_3-e_1}}{\sqrt[4]{e_3-e_2}}=\frac{\sqrt[4]{e_1-e_2}}{\sqrt[4]{e_2-e_3}}=\frac{\Theta(\omega'')}{\Theta(\omega)}e^{-\frac{\eta+\eta''}{2}\omega'}.
\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

Знаки въ этихъ формулахъ при извлеченіи квадратныхъ корней выбраны такъ, чтобы, перемножая формулы (7) и (9) извѣстнымъ образомъ, можно было бы получить формулы (8) § 104.

106. Перемѣняя въ формулѣ (4) § 98 u на $u\mp\omega_i$, мы получимъ по перестановкѣ въ результатѣ верхнихъ знаковъ съ нижними такую формулу:

$$\Theta_i(u\pm\omega_i)=\mp\frac{\Theta'(0)e^{\eta_i\omega_i}}{\Theta(\omega_i)}\Theta(u)e^{\pm\eta_i u},\qquad(1)$$

показывающую, что вслѣдствіе измѣненія u на полуперіодъ отвѣчающій разсматриваемой союзной Θ-функціи она переходитъ въ основную, помноженную на нѣкоторую постоянную и экспоненціальную функцію. Изъ (1) легко получаемъ формулу:

$$\Theta(u)=\mp\frac{\Theta(\omega_i)e^{-\eta_i\omega_i}}{\Theta'(0)}\Theta_i(u\pm\omega_i)e^{\mp\eta_i u},\qquad(2)$$

выражающую основную Θ-функцію чрезъ союзную. При помощи формулы (2) пред. § формулѣ (1) можно дать такой видъ:

$$\Theta_i(u\pm\omega_i)=\mp\sqrt[4]{e_i-e_j}\sqrt[4]{e_i-e_k}\,\Theta(u)e^{\pm\eta_i\left(u\pm\frac{\omega_i}{2}\right)}.\qquad(3)$$

Если тоже изъ (2) предыдущаго § внесемъ значеніе постоянной $\frac{\Theta'(0)}{\Theta(\omega_i)}$ въ (4) § 98, то дадимъ послѣдней формулѣ такой видъ:

$$\Theta_i(u)=\pm\sqrt[4]{e_i-e_j}\cdot\sqrt[4]{e_i-e_k}\,\Theta(u\pm\omega_i)e^{\mp\eta_i\left(u\pm\frac{\omega_i}{2}\right)}.\qquad(4)$$

Перемѣнивъ въ (4) § 98 u на $u \pm \omega_j$, получимъ:

$$\Theta_i(u \pm \omega_j) = \pm \frac{\Theta'(0)\Theta(u \pm \omega_i \pm \omega_j)e^{\mp \eta_i(u \pm \omega_j)}}{\Theta(\omega_i)}. \tag{5}$$

Если $\omega_i + \omega_j = \omega_k$, (слѣдовательно $k = 2$), то помножая и дѣля на $\Theta(\omega_k)$, получимъ отсюда:

$$\Theta_i(u \pm \omega_j) = \frac{\Theta(\omega_k)e^{-\eta_i\omega_j}}{\Theta(\omega_i)} . \pm \frac{\Theta'(0)\Theta(u \pm \omega_k)e^{\mp \eta_k u}}{\Theta(\omega_k)} . e^{\mp \eta_j u}; \tag{6}$$

здѣсь среднiй множитель второй части по (4) § 98 есть не что иное, какъ $\Theta_k(u)$, а потому равенство (6) такъ перепишется въ случаѣ нами теперь разсматриваемомъ, когда $\omega_i + \omega_j = \omega_k$:

$$\Theta_i(u \pm \omega_j) = \frac{\Theta(\omega_k)e^{-\eta_i\omega_j}}{\Theta(\omega_i)} \Theta_k(u)e^{\pm \eta_j u}. \tag{7}$$

Изъ (3) пред. §, перемѣняя i на j и на оборотъ и имѣя въ виду, что теперь $\eta_i + \eta_j = \eta_k$, мы получаемъ:

$$\frac{\sqrt[4]{e_j - e_i}}{\sqrt[4]{e_j - e_k}} = \frac{\Theta(\omega_k)e^{-\eta_i\omega_j}}{\Theta(\omega_i)} . e^{-\frac{\eta_i\omega_j}{2}}; \tag{8}$$

на основанiи ея (7) принимаетъ такой видъ:

$$\Theta_i(u \pm \omega_j) = \frac{\sqrt[4]{e_j - e_i}}{\sqrt[4]{e_j - e_k}} \Theta_k(u)e^{\pm \eta_j\left(u \pm \frac{\omega_j}{2}\right)}. \tag{9}$$

Въ случаѣ когда $\omega_i - \omega_j = \pm \omega_k$, надобно въ (5) знаки предъ ω_i взять противные знакамъ ω_j; мы разсмотримъ случай, когда имѣетъ мѣсто $\omega_i - \omega_j = \omega_k$, ибо другой случай можетъ быть прямо сведенъ на этотъ черезъ перемѣну знака у ω_k на противный. Въ этомъ случаѣ (5) замѣняется такимъ:

$$\Theta_i(u \pm \omega_j) = \mp \frac{\Theta'(0)\Theta(u \mp \omega_k)e^{\pm \eta_i(u \pm \omega_j)}}{\Theta(\omega_i)}, \tag{10}$$

что пораздѣленіи и умноженіи на $\Theta(\omega_k)$ легко приведется къ такому:

$$\Theta_i(u \pm \omega_j) = \frac{\Theta(\omega_k)e^{\eta_i \omega_j}}{\Theta(\omega_i)} \cdot \mp \frac{\Theta'(0)\Theta(u \mp \omega_k)e^{\pm \eta_k u}}{\Theta(\omega_k)} \cdot e^{\pm \eta_i u}; \qquad (11)$$

но средній множитель второй части есть $\Theta_k(u)$; потому это равенство принимаетъ такой видъ:

$$\Theta_i(u \pm \omega_j) = \frac{\Theta(\omega_k)e^{\eta_i \omega_j}}{\Theta(\omega_i)} \Theta_k(u) e^{\pm \eta_j u}. \qquad (12)$$

Если бы мы приняли $\omega_i - \omega_j = -\omega_k$, то получили бы результатъ такой:

$$\Theta_i(u \pm \omega_j) = -\frac{\Theta(\omega_k)e^{\eta_i \omega_j}}{\Theta(\omega_i)} \Theta_k(u) e^{\pm \eta_j u}, \qquad (13)$$

[какъ легко видѣть изъ (11), гдѣ въ среднемъ множителѣ внѣшній знакъ сохранился бы, тогда какъ внутренній и при η_k измѣнились бы на противные].

Формула (12) имѣетъ мѣсто при $\omega_i - \omega_j = \omega_k$, или $\omega_i = \omega_j + \omega_k$; въ этомъ случаѣ имѣетъ мѣсто формула получающаяся изъ (3) чрезъ перемѣну k на i, i на j, j на k, именно:

$$\frac{\sqrt[4]{e_j - e_k}}{\sqrt[4]{e_j - e_i}} = \frac{\Theta(\omega_i)}{\Theta(\omega_k)} e^{-\frac{\eta_k + \eta_i}{2}\omega_j}, \qquad (14)$$

откуда, имѣя въ виду, что $\eta_i = \eta_k + \eta_j$, слѣдовательно $\eta_k = \eta_i - \eta_j$, находимъ:

$$\frac{\Theta(\omega_k)}{\Theta(\omega_i)} e^{\eta_i \omega_j} = \frac{\sqrt[4]{e_j - e_i}}{\sqrt[4]{e_j - e_k}} e^{\frac{\eta_j \omega_j}{2}}; \qquad (15)$$

на основаніи этого (12) принимаетъ такой видъ:

$$\Theta_i(u \pm \omega_j) = \frac{\sqrt[4]{e_j - e_i}}{\sqrt[4]{e_j - e_k}} \Theta_k(u) e^{\pm \eta_j \left(u \pm \frac{\omega_j}{2}\right)}. \qquad (16)$$

*

Равенство (13) имѣетъ мѣсто, когда $\omega_i - \omega_j = -\omega_k$, слѣдовательно когда $\omega_j = \omega_i + \omega_k$, но тогда имѣетъ мѣсто равенство, получающееся изъ (6) § 105 чрезъ перестановку i и j, именно:

$$\frac{\sqrt[4]{e_j - e_i}}{\sqrt[4]{e_j - e_k}} = \frac{\Theta(\omega_k)}{\Theta(\omega_i)} e^{\frac{\eta_i - \eta_k}{2}\omega_j}; \tag{17}$$

но какъ теперь $-\eta_k = \eta_i - \eta_j$, то отсюда получаемъ:

$$\frac{\sqrt[4]{e_j - e_i}}{\sqrt[4]{e_j - e_k}} = \frac{\Theta(\omega_k)}{\Theta(\omega_i)} e^{\eta_i \omega_j} . e^{-\frac{\eta_i \omega_j}{2}}; \tag{18}$$

съ помощію его (13) даемъ такой видъ:

$$\Theta_i(u \pm \omega_j) = -\frac{\sqrt[4]{e_j - e_i}}{\sqrt[4]{e_j - e_k}} \Theta_k(u) e^{\pm \eta_i \left(u \pm \frac{\omega_j}{2}\right)}. \tag{19}$$

Формулы (9), (16) и (17) можно соединить въ одну:

$$\Theta_i(u \pm \omega_j) = \varepsilon \frac{\sqrt[4]{e_j - e_i}}{\sqrt[4]{e_i - e_k}} \Theta_k(u) e^{\pm \eta_j \left(u \pm \frac{\omega_j}{2}\right)}, \tag{20}$$

съ условіемъ принимать

$$\varepsilon = +1, \qquad \text{когда } \omega_i \pm \omega_j = \omega_k, \tag{21}$$

(первый и второй случай) и

$$\varepsilon = -1, \qquad \text{когда } \omega_i - \omega_j = -\omega_k, \tag{22}$$

(третій случай).

Въ заключеніе этого § отмѣтимъ еще двѣ формулы, изъ которыхъ первая получается изъ (4) § 98 чрезъ рѣшеніе этого равенства относительно $\Theta(u \pm \omega_i)$, вторая изъ нея при помощи (2) § 105, либо чрезъ рѣшеніе относительно той же $\Theta(u \pm \omega_i)$ равенства (4) настоящаго §, именно:

$$\Theta(u \pm \omega_i) = \pm \frac{\Theta(\omega_i)}{\Theta'(0)} \Theta_i(u) e^{\pm \eta_i u}; \tag{23}$$

$$\Theta(u \pm \omega_i) = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{e_i - e_j} \cdot \sqrt[4]{e_i - e_k}} \Theta_i(u) e^{\pm \eta_i \left(u \pm \frac{\omega_i}{2}\right)}; \tag{24}$$

эти формулы показываютъ переходъ основной Θ-функціи въ союзныя.

107. Изъ формулъ (4), (24), (3) и (20) пред. § получаемъ слѣдующій рядъ формулъ:

$$\left.\begin{aligned}
\Theta_1(u) &= \pm \sqrt[4]{e_1 - e_2} \cdot \sqrt[4]{e_1 - e_2}\, e^{\mp \eta \left(u \pm \frac{\omega}{2}\right)} \Theta(u \pm \omega); \\
\Theta_2(u) &= \pm \frac{1}{\sqrt{i}} \sqrt[4]{e_1 - e_2} \cdot \sqrt[4]{e_2 - e_3}\, e^{\mp \eta'' \left(u \pm \frac{\omega''}{2}\right)} \Theta(u \pm \omega''); \\
\Theta_3(u) &= \pm \frac{1}{i} \sqrt[4]{e_1 - e_3} \cdot \sqrt[4]{e_2 - e_3}\, e^{\mp \eta' \left(u \pm \frac{\omega'}{2}\right)} \Theta(u \pm \omega').
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned}
\Theta(u \pm \omega) &= \pm \frac{1}{\sqrt[4]{e_1 - e_2} \cdot \sqrt[4]{e_1 - e_3}}\, e^{\pm \eta \left(u \pm \frac{\omega}{2}\right)} \Theta_1(u); \\
\Theta(u \pm \omega'') &= \pm \frac{\sqrt{i}}{\sqrt[4]{e_1 - e_2} \cdot \sqrt[4]{e_2 - e_3}}\, e^{\pm \eta'' \left(u \pm \frac{\omega''}{2}\right)} \Theta_2(u); \\
\Theta(u \pm \omega') &= \pm \frac{i}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} \cdot \sqrt[4]{e_2 - e_3}}\, e^{\pm \eta' \left(u \pm \frac{\omega'}{2}\right)} \Theta_3(u).
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}
\Theta_1(u \pm \omega) &= \pm \sqrt[4]{e_1 - e_2} \cdot \sqrt[4]{e_1 - e_3}\, e^{\pm \eta \left(u \pm \frac{\omega}{2}\right)} \Theta(u); \\
\Theta_1(u \pm \omega'') &= + \frac{1}{\sqrt{i}} \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_2}}{\sqrt[4]{e_2 - e_3}}\, e^{\pm \eta'' \left(u + \frac{\omega''}{2}\right)} \Theta_3(u); \text{ *)} \\
\Theta_1(u \pm \omega') &= \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3}}{\sqrt[4]{e_2 - e_3}}\, e^{\pm \eta' \left(u \pm \frac{\omega'}{2}\right)} \Theta_2(u).
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

*) Ибо $\sqrt{-i}\sqrt{+i} = e^{-\frac{\pi}{4}i} \cdot e^{+\frac{\pi}{4}i} = +1.$

$$\left.\begin{aligned}
\Theta_2(u\pm\omega) &= \frac{\sqrt[4]{e_1-e_2}}{\sqrt[4]{e_1-e_3}}\, e^{\pm\eta\left(u\pm\frac{\omega}{2}\right)}\,\Theta_3(u);\\
\Theta_2(u\pm\omega'') &= \pm\frac{1}{\sqrt{i}}\sqrt[4]{e_1-e_2}\cdot\sqrt[4]{e_2-e_3}\, e^{\pm\eta''\left(u\pm\frac{\omega''}{2}\right)}\,\Theta(u);\\
\Theta_2(u\pm\omega') &= \frac{\sqrt[4]{e_2-e_3}}{\sqrt[4]{e_1-e_3}}\, e^{\pm\eta'\left(u\pm\frac{\omega'}{2}\right)}\,\Theta_1(u).
\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

$$\left.\begin{aligned}
\Theta_3(u\pm\omega) &= \frac{\sqrt[4]{e_1-e_3}}{\sqrt[4]{e_1-e_2}}\, e^{\pm\eta\left(u\pm\frac{\omega}{2}\right)}\,\Theta_2(u);\\
\Theta_3(u\pm\omega'') &= +\sqrt{i}\,\frac{\sqrt[4]{e_2-e_3}}{\sqrt[4]{e_1-e_2}}\, e^{\pm\eta'\left(u\pm\frac{\omega''}{2}\right)}\,\Theta_1(u);\\
\Theta_3(u\pm\omega') &= \mp\frac{1}{i}\sqrt[4]{e_1-e_3}\cdot\sqrt[4]{e_2-e_3}\, e^{\pm\eta'\left(u\pm\frac{\omega'}{2}\right)}\,\Theta(u).
\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

При выводѣ ихъ принято во вниманіе (15) § 104. [Ср. Шварцъ, стр. 26].

108. Формула (1) § 104 представляетъ слѣдующія три:

$$\sqrt{\wp(u)-e_1}=\frac{\Theta_1(u)}{\Theta(u)};\quad \sqrt{\wp(u)-e_2}=\frac{\Theta_2(u)}{\Theta(u)};\quad \sqrt{\wp(u)-e_3}=\frac{\Theta_3(u)}{\Theta(u)};\qquad(1)$$

возвышая ихъ квадратъ и вычитая одну изъ другой, по освобожденіи отъ знаменателя получимъ слѣдующія три соотношенія между четырьмя Θ-функціями, основной и ея союзными, содержащія каждое лишь три изъ этихъ функцій, въ числѣ которыхъ входитъ основная:

$$\left.\begin{aligned}
\Theta_2^2(u)-\Theta_3^2(u)+(e_2-e_3)\,\Theta^2(u)&=0;\\
\Theta_3^2(u)-\Theta_1^2(u)+(e_3-e_1)\,\Theta^2(u)&=0;\\
\Theta_1^2(u)-\Theta_2^2(u)+(e_1-e_2)\,\Theta^2(u)&=0;
\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

но изъ этихъ трехъ соотношеній одно есть слѣдствіе двухъ остальныхъ, ибо складывая ихъ получаемъ тождественно нуль. Помножая

ихъ по порядку на e_1, e_2, e_3 и складывая, получимъ соотношеніе между квадратами трехъ союзныхъ функцій:

$$(e_2 - e_3)\,\Theta_1^2(u) + (e_3 - e_1)\Theta_2^2(u) + (e_1 - e_2)\Theta_3^2(u) = 0. \tag{3}$$

Съ помощію формулъ, представляемыхъ формулою (2) § 104 величины e_1, e_2, e_3 могутъ быть исключены изъ соотношеній (2) и (3); изъ (2) мы получимъ двоякія формулы; или

$$\left.\begin{aligned}
&\Theta^2(\omega'')[\Theta_2^2(u) - \Theta_3^2(u)] + \Theta_3^2(\omega'')\,\Theta^2(u) = 0\,;\\
&\Theta^2(\omega'\,)[\Theta_3^2(u) - \Theta_1^2(u)] + \Theta_1^2(\omega'\,)\,\Theta^2(u) = 0\,;\\
&\Theta^2(\omega\,\,)[\Theta_1^2(u) - \Theta_2^2(u)] + \Theta_2^2(\omega\,\,)\,\Theta^2(u) = 0\,;
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

или

$$\left.\begin{aligned}
&\Theta^2(\omega'\,)[\Theta_2^2(u) - \Theta_3^2(u)] - \Theta_2^2(\omega'\,)\,\Theta^2(u) = 0\,;\\
&\Theta^2(\omega\,\,)[\Theta_3^2(u) - \Theta_1^2(u)] - \Theta_3^2(\omega\,\,)\,\Theta^2(u) = 0\,;\\
&\Theta^2(\omega'')[\Theta_1^2(u) - \Theta_2^2(u)] - \Theta_1^2(\omega'')\,\Theta^2(u) = 0\,;
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

смотря по значеніямъ, которыя будемъ давать значкамъ i и j въ формулѣ (2) § 104. Изъ нея мы имѣемъ, перестанавливая i и j, такія двѣ:

$$\sqrt{e_j - e_i} = \frac{\Theta_i(\omega_j)}{\Theta(\omega_j)} \quad \text{и} \quad \sqrt{e_i - e_j} = \frac{\Theta_j(\omega_i)}{\Theta(\omega_i)}. \tag{6}$$

Если мы ихъ перемножимъ, то получимъ по (14) § 104 при $j > i$:

$$\mp (e_i - e_j)\sqrt{-1} = \frac{\Theta_i(\omega_j)\cdot\Theta_j(\omega_i)}{\Theta(\omega_j)\cdot\Theta(\omega_i)}\,; \tag{7}$$

помножая (3) на $\mp\sqrt{-1}$ и пользуясь этой формулою по освобожденіи отъ знаменателя получимъ такое соотношеніе:

$$\left.\begin{aligned}
&\Theta_2(\omega')\,\Theta_3(\omega'')\,\Theta(\omega)\,\Theta_1^2(u) - \Theta_1(\omega')\,\Theta_3(\omega)\,\Theta(\omega'')\,\Theta_2^2(u) +\\
&\qquad + \Theta_1(\omega'')\,\Theta_2(\omega)\,\Theta(\omega')\,\Theta_3^2(u) = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Эту формулу легко запомнить, ибо каждый членъ ея такъ получается, что квадратъ одной изъ союзныхъ помножается на основную отъ полупероіда, входящаго въ ея опредѣленіе, умноженную на произ-

веденіе прочихъ союзныхъ, взятыхъ каждая для значенія u равнаго полупперіоду, входящему въ опредѣленіе другой. Короче равенство (8) можно такъ написать:

$$\sum(-1)^{i-1}\Theta(\omega_i)\Theta_j(\omega_k)\Theta_k(\omega_j)\Theta_i^2(u)=0\,, \tag{9}$$

гдѣ i, j, k должны имѣть различныя изъ значеній $1, 2, 3$.

109. Равенства (4), (5) и (8) предыдущаго §, какъ выражающія соотношенія между квадратами Θ-функцій, должны получиться и независимо отъ соотношеній между $\Theta(u)$ и функціей $\wp(u)$. Дѣйствительно, функціи $\Theta(u)$ и ея союзныя $\Theta_i(u)$ удовлетворяютъ такимъ уравненіямъ:

$$\left.\begin{aligned}
\Theta(u+2\omega_j) &= -e^{2\eta_j(u+\omega_j)}\Theta(u)\,; \quad (j=1,2,3)\\
\Theta_i(u+2\omega_j) &= +e^{2\eta_j(u+\omega_j)}\Theta_i(u)\,; \quad (j \text{ не} = i)\\
\Theta_i(u+2\omega_i) &= -e^{2\eta_i(u+\omega_i)}\Theta_i(u)\,;
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

вторыя части ихъ различаются знаками; но если мы ихъ возвысимъ въ квадратъ то они всѣ примутъ одинаковый видъ:

$$\Theta_i^2(u+2\omega_j)=+e^{4\eta_j(u+\omega_j)}\Theta^2(u)\,, \tag{2}$$

будетъ ли j не $=i$ или $=i$, или $i=0$ [когда примемъ $\Theta_0(u)=\Theta(u)$]. Сумма квадратовъ двухъ какихъ либо изъ Θ-функцій, помноженныхъ на какія-либо постоянныя, именно:

$$A\,\Theta_j^2(u)+B\,\Theta_k^2(u) \tag{3}$$

будетъ удовлетворять такому же уравненію (2), ибо экспоненціальный множитель второй части зависитъ лишь отъ періода, на который измѣняется u, но не отъ индексовъ союзныхъ Θ-функцій; посмотримъ нельзя-ли опрѣлить постоянныя A и B такъ, чтобы эта функція (3) приводилась къ квадрату которой-нибудь изъ прочихъ Θ-функцій, или къ $\Theta^2(u)$, или $\Theta_i^2(u)$. Посмотримъ сперва, какъ привести ее къ первой изъ этихъ функцій. Для того, чтобы функція (3) приводилась къ $\Theta^2(u)$, необходимо прежде всего, чтобы она обращалась въ нуль для одинаковыхъ съ послѣдней значеній перемѣнной независимой u, т. е. для

$$u\equiv 0, \tag{4}$$

т. е. для значеній на линейную съ цѣлыми коэффиціентами функцію періодовъ 2ω и $2\omega'$ отличающихся отъ нуля; — это первое условіе:

затѣмъ, чтобы ея значеніе для какого-нибудь другого частнаго значенія u равнялось бы значенію $\Theta^2(u)$ для того же значенія u; — это второе условіе; оно необходимо, ибо первое условіе сверхъ условія удовлетворять уравненіямъ (2) опредѣляетъ искомую функцію до постояннаго множителя, второе опредѣляетъ этотъ самый множитель. Итакъ, положивъ въ предположенномъ равенствѣ:

$$\Theta^2(u) = A\,\Theta_j^2(u) + B\Theta_k^2(u) \tag{5}$$

$u = 0$, мы будемъ имѣть:

$$0 = A\Theta_j^2(0) + B\Theta_k^2(0), \tag{6}$$

но какъ по (11) § 89: $\Theta_j(0) = \Theta_k(0) = \Theta'(0)$, то это равенство по сокращеніи на $\Theta'^2(0)$ принимаетъ такой видъ:

$$0 = A + B; \tag{7}$$

на основаніи его (5) приметъ такой видъ:

$$\Theta^2(u) = A[\,\Theta_j^2(u) - \Theta_k^2(u)]. \tag{8}$$

Для опредѣленія A положимъ $u = \omega_j$, или $u = \omega_k$; тогда найдемъ отсюда

$$A = -\frac{\Theta^2(\omega_j)}{\Theta_k^2(\omega_j)} = \frac{\Theta^2(\omega_k)}{\Theta_j^2(\omega_k)}. \tag{9}$$

Здѣсь мимоходомъ замѣчаемъ тождество

$$\frac{\Theta^2(\omega_j)}{\Theta_k^2(\omega_j)} + \frac{\Theta^2(\omega_k)}{\Theta_j^2(\omega_k)} = 0, \tag{10}$$

которое легко провѣряется съ помощію (2) и (3) § 103. Дѣйствительно по этимъ формуламъ имѣемъ:

$$\Theta_j(\omega_k) = \pm\frac{\Theta'(0)\Theta(\omega_i)}{\Theta(\omega_j)}\,e^{\mp\eta_j\omega_k}; \tag{11}$$

$$\Theta_k(\omega_j) = \pm\frac{\Theta'(0)\Theta(\omega_i)}{\Theta(\omega_k)}\,e^{\mp\eta_k\omega_j}; \tag{12}$$

взявъ ихъ квадраты, получимъ по раздѣленіи одного на другой:

$$\frac{\Theta_j^2(\omega_k)}{\Theta_k^2(\omega_j)} = \frac{\Theta^2(\omega_k)}{\Theta^2(\omega_j)} e^{\mp 2(\eta_j\omega_k - \eta_k\omega_j)}; \tag{13}$$

но какъ

$$2(\eta_j\omega_k - \eta_k\omega_j) = \pm \pi i, \tag{14}$$

слѣдовательно

$$e^{\mp 2(\eta_j\omega_k - \eta_k\omega_j)} = -1, \tag{15}$$

то равенство (13) принимаетъ такой видъ:

$$\frac{\Theta_j^2(\omega_k)}{\Theta_k^2(\omega_j)} = -\frac{\Theta^2(\omega_k)}{\Theta^2(\omega_j)}; \tag{16}$$

перенося все въ одну часть и дѣля на $\Theta_j^2(\omega_k)$ и помножая на $\Theta^2(\omega_j)$, и получимъ отсюда (10), которое такимъ образомъ провѣрено. Внося изъ (9) значеніе (A) въ (8), получимъ:

$$\Theta^2(u) = -\frac{\Theta^2(\omega_j)}{\Theta_k^2(\omega_j)} [\Theta_j^2(u) - \Theta_k^2(u)], \tag{17}$$

или

$$\Theta^2(u) = \frac{\Theta^2(\omega_k)}{\Theta_j^2(\omega_k)} [\Theta_j^2(u) - \Theta_k^2(u)]; \tag{18}$$

очевидно одно получается изъ другого чрезъ перестановку j и k. По освобожденіи отъ знаменателя и перенесеніи всего въ лѣвую часть эти равенства такъ представятся:

$$\Theta^2(\omega_j)[\Theta_j^2(u) - \Theta_k^2(u)] + \Theta_k^2(\omega_j)\Theta^2(u) = 0, \tag{19}$$

$$\Theta^2(\omega_k)[\Theta_k^2(u) - \Theta_j^2(u)] + \Theta_j^2(\omega_k)\Theta^2(u) = 0. \tag{20}$$

110. Соотношеніе между квадратами союзныхъ Θ-функцій мы можемъ предположить въ такой формѣ:

$$A\Theta_1^2(u) + B\Theta_2^2(u) + C\Theta_3^2(u) = 0; \tag{1}$$

полагая здѣсь $u=\omega, \omega'', \omega'$, мы получимъ такія три уравненія:

$$\left.\begin{array}{l} * \quad + B\Theta_2^2(\omega) + C\Theta_3^2(\omega) = 0; \\ A\Theta_1^2(\omega'') + \quad * \quad + C\Theta_3^2(\omega'') = 0; \\ A\Theta_1^2(\omega') + B\Theta_2^2(\omega') + \quad * \quad = 0; \end{array}\right\} \qquad (2)$$

опредѣлитель этой системы:

$$\begin{vmatrix} 0 & \Theta_2^2(\omega) & \Theta_3^2(\omega) \\ \Theta_1^2(\omega'') & 0 & \Theta_3^2(\omega'') \\ \Theta_1^2(\omega') & \Theta_2^2(\omega') & 0 \end{vmatrix} = \qquad (3)$$

$$= \Theta_1^2(\omega')\Theta_2^2(\omega)\Theta_3^2(\omega'') + \Theta_1^2(\omega'')\Theta_2^2(\omega')\Theta_3^2(\omega'') = 0;$$

въ самомъ дѣлѣ, перемножая лѣвыя три изъ (4) § 103, а затѣмъ правыя три, и дѣля первое равенство, такимъ образомъ полученное, на второе, на основаніи (13), (14) и (15) § 95, будемъ имѣть:

$$\frac{\Theta_1(\omega'')\Theta_2(\omega')\Theta_3(\omega)}{\Theta_1(\omega')\Theta_2(\omega)\Theta_3(\omega'')} = \mp i; \qquad (4)$$

возвышая это въ квадратъ и перенося все налѣво по освобожденіи отъ знаменателя и получимъ равенство (3). Итакъ уравненія (2) не противорѣчатъ одни другимъ, и потому мы можемъ изъ нихъ взять любыя два для опредѣленія отношеній двухъ изъ коэффиціентовъ A, B, C въ (1), къ третьему; выбравъ первыя два, мы получимъ:

$$\frac{A}{\Theta_3^2(\omega)} = \frac{C}{-\Theta_2^2(\omega)}; \quad \frac{A}{\Theta_3^2(\omega'')} = \frac{C}{-\Theta_1^2(\omega'')}; \qquad (5)$$

дѣля первое равенство на $\Theta_1^2(\omega'')$, второе на $\Theta_2^2(\omega)$ мы получимъ:

$$\frac{A}{\Theta_2^2(\omega)\Theta_3^2(\omega'')} = \frac{B}{\Theta_1^2(\omega'')\Theta_3^2(\omega)} = \frac{C}{-\Theta_1^2(\omega'')\Theta_2^2(\omega)}; \qquad (6)$$

внося въ (1) вмѣсто A, B, C имъ пропорціональныя величины, получимъ равенство:

$$\Theta_2^2(\omega)\Theta_3^2(\omega'')\Theta_1^2(u) + \Theta_1^2(\omega'')\Theta_3^2(\omega)\Theta_2^2(u) - \Theta_1^2(\omega'')\Theta_2^2(\omega)\Theta_3^2(u) = 0 \quad (7)$$

— симметричное относительно входящихъ въ каждый членъ Θ-функцій, но не относительно ихъ аргументовъ. Такихъ равенство всего существуетъ три, которые однако лишь постояннымъ множителемъ будутъ отличаться одно отъ другого; но на этомъ мы не будемъ останавливаться.

111. Результатъ предыдущаго § можно получить скорѣе по способу § 109, полагая:

$$\Theta_i^2(u) = A'\Theta_j^2(u) + B'\Theta_k^2(u)\,; \tag{1}$$

дѣлая здѣсь $u = \omega_k$, найдемъ

$$A' = \frac{\Theta_i^2(\omega_k)}{\Theta_j^2(\omega_k)}\,; \tag{2}$$

дѣлая $u = \omega_j$, найдемъ

$$B' = \frac{\Theta_i^2(\omega_j)}{\Theta_j^2(\omega_k)}\,; \tag{3}$$

внося эти значенія въ (1), получимъ:

$$\Theta_i^2(u) = \frac{\Theta_i^2(\omega_k)}{\Theta_j^2(\omega_k)}\Theta_j^2(u) + \frac{\Theta_i^2(\omega_j)}{\Theta_k^2(\omega_j)}\Theta_k^2(u)\,; \tag{4}$$

полагая здѣсь $u = 0$, по (11) § 88 получимъ

$$1 = \frac{\Theta_i^2(\omega_k)}{\Theta_j^2(\omega_k)} + \frac{\Theta_i^2(\omega_j)}{\Theta_k^2(\omega_j)}\,; \tag{5}$$

— соотношеніе, которое найдетъ примѣненіе дальше; освобождая (4) отъ знаменателей, по перенесеніи всего направо будемъ имѣть:

$$-\Theta_j^2(\omega_k)\Theta_k^2(\omega_j)\Theta_i^2(u) + \Theta_i^2(\omega_k)\Theta_k^2(\omega_j)\Theta_j^2(u) + \Theta_i^2(\omega_j)\Theta_j^2(\omega_k)\Theta_k^2(u) = 0\,; \tag{6}$$

полагая $i = 3$, $j = 1$, $k = 2$, получимъ отсюда (7) пред. §. Давая здѣсь u значеніе $= \omega_i$, получимъ соотношеніе (3) пред. §. Изъ (4) съ помощію (6) § 108 легко получить (3) того же §. Изъ (6) можно слѣдующимъ образомъ получить (9) § 108 на основаніи только свойствъ Θ-функцій, не прибѣгая къ ихъ связи съ функціей $\wp(u)$. Раздѣливъ (6) на $\Theta^2(\omega_j)\Theta^2(\omega_k)$, мы получимъ:

$$-\frac{\Theta_j^2(\omega_k)}{\Theta^2(\omega_k)}\cdot\frac{\Theta_k^2(\omega_j)}{\Theta^2(\omega_j)}\Theta_i^2(u)+\frac{\Theta_i(\omega_k)}{\Theta^2(\omega_k)}\cdot\frac{\Theta_k^2(\omega_j)}{\Theta^2(\omega_j)}\Theta_j^2(u)+\frac{\Theta_i^2(\omega_j)}{\Theta^2(\omega_j)}\cdot\frac{\Theta_j^2(\omega_k)}{\Theta^2(\omega_k)}\Theta_k^2(u)=0; \quad (7)$$

но по (16) § 119 имѣемъ:

$$\frac{\Theta_j^2(\omega_k)}{\Theta^2(\omega_k)}=-\frac{\Theta_k^2(\omega_j)}{\Theta^2(\omega_j)}; \tag{8}$$

внося вмѣсто правой части этого равенства лѣвую въ лѣвую предыдущаго, въ среднiй членъ его, можно будетъ его сократить на $\frac{\Theta_j^2(\omega_k)}{\Theta^2(\omega_k)}$, послѣ чего оно обратится въ такое:

$$-\frac{\Theta_k^2(\omega_j)}{\Theta^2(\omega_j)}\Theta_i^2(u)-\frac{\Theta_i^2(\omega_k)}{\Theta^2(\omega_k)}\Theta_j^2(u)+\frac{\Theta_i^2(\omega_j)}{\Theta^2(\omega_k)}\Theta_k^2(u)=0; \tag{9}$$

предположивъ теперь для простоты, что $k=2$, по формулѣ (2) § 103 будемъ имѣть:

$$\frac{\Theta_i(\omega_j)}{\Theta(\omega_j)}=\frac{\Theta'(0)\Theta(\omega_k)}{\Theta(\omega_i)\Theta(\omega_j)}e^{-\eta_i\omega_j}; \tag{10}$$

если налѣво переставимъ i и j, то какъ условiя остаются тѣже, то по той же формулѣ (2) § 103 должны ихъ переставить и направо, такъ что будемъ имѣть:

$$\frac{\Theta_j(\omega_i)}{\Theta(\omega_i)}=\frac{\Theta'(0)\Theta(\omega_k)}{\Theta(\omega_i)\Theta(\omega_j)}e^{-\eta_j\omega_i}; \tag{11}$$

перемножая (10) и (11) и сравнивая съ квадратомъ (10), получимъ такое соотношенiе:

$$\left(\frac{\Theta_i(\omega_j)}{\Theta(\omega_j)}\right)^2=\frac{\Theta_i(\omega_j)\Theta_j(\omega_i)}{\Theta(\omega_j)\Theta(\omega_i)}e^{\eta_j\omega_i-\eta_i\omega_j}. \tag{12}$$

Чтобы найти коэффицiентъ при $\Theta_j^2(u)$, мы должны воспользоваться формулою (3) § 103, въ которой должно, переставивъ j и k, взять нижнiй знакъ, ибо будетъ $\omega_i-\omega_k=-\omega_j$; сдѣлавъ это, будемъ имѣть:

$$\frac{\Theta_i(\omega_k)}{\Theta(\omega_k)}=-\frac{\Theta'(0)\Theta(\omega_j)}{\Theta(\omega_i)\Theta(\omega_k)}e^{\eta_i\omega_k}; \tag{13}$$

переставивъ i и k, мы должны взять туже формулу, но съ $+$, ибо $\omega_k - \omega_i = + \omega_j$; тогда будемъ имѣть:

$$\frac{\Theta_k(\omega_i)}{\Theta(\omega_i)} = + \frac{\Theta'(0)\Theta(\omega_j)}{\Theta(\omega_i)\Theta(\omega_k)} e^{\eta_k\omega_i}; \tag{14}$$

перемножая и сравнивая съ квадратомъ (13), получимъ:

$$-\left(\frac{\Theta_i(\omega_k)}{\Theta(\omega_k)}\right)^2 = \frac{\Theta_i(\omega_k)\Theta_k(\omega_i)}{\Theta(\omega_k)\Theta(\omega_i)} e^{\eta_i\omega_k - \eta_k\omega_i}. \tag{15}$$

Въ формулахъ (13) и (14) мы вправѣ переставить i и j, ибо условія

$$\omega_k = \omega_i + \omega_j \qquad \text{и} \qquad \eta_k = \eta_i + \eta_j \tag{16}$$

симметричны относительно этихъ величинъ; перемножая имѣющія получиться такимъ образомъ результаты и сравнивая произведеніе съ квадратомъ того, которое получится изъ (14), мы получимъ такое равенство:

$$-\left(\frac{\Theta_k(\omega_j)}{\Theta(\omega_j)}\right)^2 = \frac{\Theta_k(\omega_j)\Theta_j(\omega_k)}{\Theta(\omega_j)\Theta(\omega_k)} e^{\eta_k\omega_j - \eta_j\omega_k}. \tag{17}$$

Въ силу (16) будетъ

$$\eta_i\omega_k - \eta_k\omega_i = \eta_i\omega_j - \eta_j\omega_i; \tag{18}$$

$$\eta_k\omega_j - \eta_j\omega_k = \eta_i\omega_j - \eta_j\omega_i; \tag{19}$$

потому, вставивъ изъ (12), (15) и (17) вмѣсто лѣвыхъ частей правыя въ равенство (9), можно будетъ результатъ вставки сократить на

$$e^{\eta_i\omega_j - \eta_j\omega_i}, \tag{20}$$

послѣ чего получится такое равенство:

$$\frac{\Theta_k(\omega_j)\Theta_j(\omega_k)}{\Theta(\omega_j)\Theta(\omega_k)}\Theta_i^2(u) + \frac{\Theta_i(\omega_k)\Theta_k(\omega_i)}{\Theta(\omega_k)\Theta(\omega_i)}\Theta_j^2(u) - \frac{\Theta_i(\omega_j)\Theta_j(\omega_i)}{\Theta(\omega_j)\Theta(\omega_i)}\Theta_k^2(u) = 0, \tag{21}$$

ибо

$$e^{2(\eta_j\omega_i - \eta_i\omega_j)} = e^{\pm\pi i} = -1. \tag{22}$$

Освобождая отъ знаменателя, получимъ результатъ, который, какъ легко видѣть, можетъ быть короче такъ представленъ:

$$\sum(-1)^{i-1}\Theta_k(\omega_j)\Theta_j(\omega_k)\Theta(\omega_i)\Theta_i^2(u)=0\,, \tag{23}$$

что согласно съ (9) § 108. Здѣсь, какъ и тамъ, i, j, k обозначаютъ числа 1, 2, 3, какъ нибудь переставленныя.

Разсмотрѣвъ соотношенія между квадратами Θ-функцій, переходимъ къ изслѣдованію свойствъ функцій, получающихся изъ Θ и ея союзныхъ чрезъ дѣленіе одной на другую; въ числѣ ихъ, какъ видѣли заключаются и эллиптическія функціи

$$\sqrt{\wp(u)-e_i}\,. \tag{24}$$

Это и будетъ составлять предметъ слѣдующей главы.

ГЛАВА IX.

Отношенія Θ-функцій. Функціи амплитуды.

112. Дѣля каждую изъ четырехъ Θ-функцій на каждую изъ прочихъ, мы будемъ имѣть функціи такихъ трехъ типовъ:

$$\text{I)}\ \frac{\Theta_j(u)}{\Theta(u)}, \qquad \text{II)}\ \frac{\Theta(u)}{\Theta_j(u)}, \qquad \text{III)}\ \frac{\Theta_i(u)}{\Theta_k(u)}, \tag{1}$$

изъ которыхъ втораго типа суть обратныя первымъ, перваго же типа функціи мы уже встрѣтили въ § 88: формула (12) устанавливаетъ связь ихъ съ функціей $\wp(u)$; на основаніи этой формулы будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\Theta_j(u)}{\Theta(u)} &= \sqrt{\wp(u) - e_j}\,; \\ \frac{\Theta(u)}{\Theta_j(u)} &= \frac{1}{\sqrt{\wp(u) - e_j}}\,; \\ \frac{\Theta_i(u)}{\Theta_k(u)} &= \frac{\sqrt{\wp(u) - e_i}}{\sqrt{\wp(u) - e_k}}\,; \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

на основаніи этихъ равенствъ легко вывести свойства функцій (1) изъ свойствъ функцій $\wp(u)$; но еще проще эти свойства выводятся изъ свойствъ Θ-функцій, выведенныхъ въ предыдущей главѣ, и мы это покажемъ въ слѣдующихъ §§; этого метода придерживался Якоби въ своихъ лекціяхъ, какъ извѣстно. Здѣсь же замѣтимъ, что изъ самаго опредѣленія этихъ функцій (1) видно, что это будутъ однозначныя и вообще непрерывныя функціи, обращающіяся въ нуль 0^1 соотвѣтственно въ точкахъ:

$$\text{I)}\ u \equiv \omega_j\,; \qquad \text{II)}\ u \equiv 0\,; \qquad \text{III)}\ u \equiv \omega_i\,, \tag{3}$$

и въ безконечность: ∞^1 въ точкахъ:

$$\text{I) } u \equiv 0; \qquad \text{II) } u \equiv \omega_j; \qquad \text{III) } u \equiv \omega_k. \tag{4}$$

113. Сравнивая формулы (7), (12) и (13) § 106 между собою и параллельно этому условія:

$$\omega_i + \omega_j = \omega_k; \qquad \omega_i - \omega_j = \omega_k; \qquad \omega_i - \omega_j = -\omega_k \tag{a}$$

при которыхъ они соотвѣтственно имѣютъ мѣсто, мы легко замѣтимъ, что первая изъ этихъ формулъ получается изъ второй чрезъ перемѣну знака у ω_j на противный во второй части формулы, а послѣдняя чрезъ перемѣну знака также и у ω_k; это замѣчаніе позволяетъ ограничиться запоминаніемъ одной лишь формулы (12), считая какъ бы за нормальный случай

$$\omega_i = \omega_j + \omega_k, \tag{b}$$

а также легко получить результаты перестановки значковъ i, j, k въ этой формулѣ. Такимъ образомъ, а также и изъ формулъ (1) и (23) § 106 мы получимъ слѣдующія 12 формулъ:

$$\left.\begin{aligned}
\Theta(u \pm \omega_i) &= \pm \frac{\Theta(\omega_i)}{\Theta'(0)} \Theta_i(u) e^{\pm \eta_i u}; \\
\Theta(u \pm \omega_j) &= \pm \frac{\Theta(\omega_j)}{\Theta'(0)} \Theta_j(u) e^{\pm \eta_j u}; \\
\Theta(u \pm \omega_k) &= \pm \frac{\Theta(\omega_k)}{\Theta'(0)} \Theta_k(u) e^{\pm \eta_k u};
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned}
\Theta_i(u \pm \omega_i) &= \mp \frac{\Theta'(0) e^{\eta_i \omega_i}}{\Theta(\omega_i)} \Theta(u) e^{\pm \eta_i u}; \\
\Theta_i(u \pm \omega_j) &= + \frac{\Theta(\omega_k) e^{\eta_i \omega_j}}{\Theta(\omega_i)} \Theta_k(u) e^{\pm \eta_j u}; \\
\Theta_i(u \pm \omega_k) &= + \frac{\Theta(\omega_j) e^{\eta_i \omega_k}}{\Theta(\omega_i)} \Theta_j(u) e^{\pm \eta_k u};
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}
\Theta_j(u \pm \omega_i) &= -\frac{\Theta(\omega_k)e^{\eta_j\omega_i}}{\Theta(\omega_j)}\Theta_k(u)e^{\pm\eta_i u};\\
\Theta_j(u \pm \omega_j) &= \mp\frac{\Theta'(0)e^{\eta_j\omega_j}}{\Theta(\omega_i)}\Theta(u)e^{\pm\eta_j u};\\
\Theta_j(u \pm \omega_k) &= +\frac{\Theta(\omega_i)e^{-\eta_j\omega_k}}{\Theta(\omega_j)}\Theta_i(u)e^{\pm\eta_k u};
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned}
\Theta_k(u \pm \omega_i) &= -\frac{\Theta(\omega_j)e^{\eta_k\omega_i}}{\Theta(\omega_k)}\Theta_j(u)e^{\pm\eta_i u};\\
\Theta_k(u \pm \omega_j) &= +\frac{\Theta(\omega_i)e^{-\eta_k\omega_j}}{\Theta(\omega_k)}\Theta_i(u)e^{\pm\eta_j u};\\
\Theta_k(u \pm \omega_k) &= \mp\frac{\Theta'(0)e^{\eta_k\omega_k}}{\Theta(\omega_k)}\Theta(u)e^{\pm\eta_k u}.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Дѣля (1) на (3) и (2) на (4), получимъ слѣдующія 6 формулъ, показывающихъ переходъ функцій II) и III) пред. § однѣхъ въ другія или въ имъ обратныя при измѣненіи аргумента на полуперіоды:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\Theta(u \pm \omega_i)}{\Theta_j(u \pm \omega_i)} &= \mp\frac{\Theta(\omega_i)\Theta(\omega_j)}{\Theta'(0)\Theta(\omega_k)}e^{-\eta_j\omega_i}\frac{\Theta_i(u)}{\Theta_k(u)};\\
\frac{\Theta(u \pm \omega_j)}{\Theta_j(u \pm \omega_j)} &= -\left[\frac{\Theta(\omega_j)}{\Theta'(0)}e^{-\frac{1}{2}\eta_j\omega_j}\right]^2\frac{\Theta_j(u)}{\Theta(u)};\\
\frac{\Theta(u \pm \omega_k)}{\Theta_j(u \pm \omega_k)} &= \pm\frac{\Theta(\omega_k)\Theta(\omega_j)}{\Theta'(0)\Theta(\omega_i)}e^{\eta_j\omega_k}\frac{\Theta_k(u)}{\Theta_i(u)};
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\Theta_i(u \pm \omega_i)}{\Theta_k(u \pm \omega_i)} &= \pm\frac{\Theta'(0)\Theta(\omega_k)}{\Theta(\omega_i)\Theta(\omega_j)}e^{\eta_j\omega_i}\frac{\Theta(u)}{\Theta_j(u)};\\
\frac{\Theta_i(u \pm \omega_j)}{\Theta_k(u \pm \omega_j)} &= +\left[\frac{\Theta(\omega_k)}{\Theta(\omega_i)}e^{\frac{1}{2}(\eta_i+\eta_k)\omega_j}\right]^2\frac{\Theta_k(u)}{\Theta_i(u)};\\
\frac{\Theta_i(u \pm \omega_k)}{\Theta_k(u \pm \omega_k)} &= \mp\frac{\Theta(\omega_j)\Theta(\omega_k)}{\Theta'(0)\Theta(\omega_i)}e^{\eta_j\omega_k}\frac{\Theta_j(u)}{\Theta(u)}.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Аналогичныя формулы для функцій I), понятно, будутъ обратныя (5). На основаніи формулъ (1), (2) и (3) § 105 этимъ соотношеніямъ можно дать другой видъ. Прежде однако замѣтимъ, что случай, теперь разсматриваемый: $\omega_i = \omega_j + \omega_k$, получится изъ случая $\omega_i + \omega_j = \omega_k$, для котораго дѣйствительны (2) и (3) формулы, чрезъ круговую перестановку значковъ (i, j, k); потому, предъ примѣненіемъ къ настоящему случаю упомянутыхъ формулъ нужно въ нихъ сдѣлать эту круговую перестановку значковъ (i, j, k), и мы будемъ имѣть тогда такія формулы:

$$\sqrt{e_k - e_i} = \frac{\Theta'(0)\,\Theta(\omega_i)}{\Theta(\omega_j)\,\Theta(\omega_k)}\,e^{-\eta_j\omega_k}; \tag{7}$$

$$\sqrt[4]{e_j - e_k}\cdot\sqrt[4]{e_j - e_i} = \frac{\Theta'(0)}{\Theta(\omega_j)}\,e^{\frac{\eta_j\omega_j}{2}}; \tag{8}$$

$$\frac{\sqrt[4]{e_j - e_k}}{\sqrt[4]{e_j - e_i}} = \frac{\Theta(\omega_i)}{\Theta(\omega_k)}\,e^{-\frac{\eta_k+\eta_i}{2}\omega_j}; \tag{9}$$

и перестанавливая значки i и j въ формулѣ (4) § 105, которая имѣетъ мѣсто для разсматриваемаго теперь случая $\omega_i = \omega_j + \omega_k$, еще такую:

$$\sqrt{e_j - e_i} = -\frac{\Theta'(0)\,\Theta(\omega_k)}{\Theta(\omega_i)\,\Theta(\omega_j)}\,e^{\eta_i\omega_j}. \tag{10}$$

На основаніи формулъ (7) — (10) формулъ (5) и (6) принимаютъ такой видъ:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\Theta(u\pm\omega_i)}{\Theta_j(u\pm\omega_i)} &= \pm\frac{1}{\sqrt{e_i - e_j}}\,\frac{\Theta_i(u)}{\Theta_k(u)};\\
\frac{\Theta(u\pm\omega_j)}{\Theta_j(u\pm\omega_j)} &= -\frac{1}{\sqrt{e_j - e_k}\cdot\sqrt{e_j - e_i}}\,\frac{\Theta_j(u)}{\Theta(u)};\\
\frac{\Theta(u\pm\omega_k)}{\Theta_j(u\pm\omega_k)} &= \pm\frac{1}{\sqrt{e_k - e_j}}\,\frac{\Theta_k(u)}{\Theta_i(u)};
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\Theta_i(u\pm\omega_i)}{\Theta_k(u\pm\omega_i)} &= \mp\sqrt{e_i - e_j}\,\frac{\Theta(u)}{\Theta_j(u)};\\
\frac{\Theta_i(u\pm\omega_j)}{\Theta_k(u\pm\omega_j)} &= \frac{\sqrt{e_j - e_i}}{\sqrt{e_j - e_k}}\,\frac{\Theta_k(u)}{\Theta_i(u)};\\
\frac{\Theta_i(u\pm\omega_k)}{\Theta_k(u\pm\omega_k)} &= \mp\frac{1}{\sqrt{e_k - e_j}}\,\frac{\Theta_j(u)}{\Theta(u)}.
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

*

114. Давая значкамъ i, j, k значенія (1), (2) и (3), мы будемъ имѣть слѣдующія формулы отсюда:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\Theta(u \pm \omega)}{\Theta_1(u \pm \omega)} &= -\frac{1}{\sqrt{e_1-e_2}\cdot\sqrt{e_1-e_3}}\,\frac{\Theta_1(u)}{\Theta(u)};\\
\frac{\Theta(u \pm \omega'')}{\Theta_1(u \pm \omega'')} &= \pm\frac{i}{\sqrt{e_1-e_2}}\,\frac{\Theta_2(u)}{\Theta_3(u)};\\
\frac{\Theta(u \pm \omega')}{\Theta_1(u \pm \omega')} &= \pm\frac{i}{\sqrt{e_1-e_3}}\,\frac{\Theta_3(u)}{\Theta_2(u)};
\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\Theta(u \pm \omega)}{\Theta_2(u \pm \omega)} &= \pm\frac{1}{\sqrt{e_1-e_2}}\,\frac{\Theta_1(u)}{\Theta_3(u)};\\
\frac{\Theta(u \pm \omega'')}{\Theta_2(u \pm \omega'')} &= -\frac{i}{\sqrt{e_1-e_2}\cdot\sqrt{e_2-e_3}}\,\frac{\Theta_2(u)}{\Theta(u)};\\
\frac{\Theta(u \pm \omega')}{\Theta_2(u \pm \omega')} &= \pm\frac{i}{\sqrt{e_2-e_3}}\,\frac{\Theta_3(u)}{\Theta_1(u)};
\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\Theta(u \pm \omega)}{\Theta_3(u \pm \omega)} &= \pm\frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\,\frac{\Theta_1(u)}{\Theta_2(u)};\\
\frac{\Theta(u \pm \omega'')}{\Theta_3(u \pm \omega'')} &= \pm\frac{1}{\sqrt{e_2-e_3}}\,\frac{\Theta_2(u)}{\Theta_1(u)};\\
\frac{\Theta(u \pm \omega')}{\Theta_3(u \pm \omega')} &= \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}\cdot\sqrt{e_2-e_3}}\,\frac{\Theta_3(u)}{\Theta(u)};
\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\Theta_1(u \pm \omega)}{\Theta_2(u \pm \omega)} &= \mp\sqrt{e_1-e_3}\,\frac{\Theta(u)}{\Theta_3(u)};\\
\frac{\Theta_1(u \pm \omega'')}{\Theta_2(u \pm \omega'')} &= \mp\frac{1}{\sqrt{e_2-e_3}}\,\frac{\Theta_3(u)}{\Theta(u)};\\
\frac{\Theta_1(u \pm \omega')}{\Theta_2(u \pm \omega')} &= \frac{\sqrt{e_1-e_3}}{\sqrt{e_2-e_3}}\,\frac{\Theta_2(u)}{\Theta_1(u)};
\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\Theta_1(u \pm \omega)}{\Theta_3(u \pm \omega)} &= \mp \sqrt{e_1 - e_2}\,\frac{\Theta(u)}{\Theta_2(u)};\\
\frac{\Theta_1(u \pm \omega'')}{\Theta_3(u \pm \omega'')} &= \frac{1}{i}\frac{\sqrt{e_1 - e_2}}{\sqrt{e_2 - e_3}}\,\frac{\Theta_3(u)}{\Theta_1(u)};\\
\frac{\Theta_1(u \pm \omega')}{\Theta_3(u \pm \omega')} &= \mp \frac{i}{\sqrt{e_2 - e_3}}\,\frac{\Theta_2(u)}{\Theta(u)};
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\Theta_2(u \pm \omega)}{\Theta_3(u \pm \omega)} &= \frac{\sqrt{e_1 - e_2}}{\sqrt{e_1 - e_3}}\,\frac{\Theta_3(u)}{\Theta_2(u)};\\
\frac{\Theta_2(u \pm \omega'')}{\Theta_3(u \pm \omega'')} &= \pm i\sqrt{e_1 - e_2}\,\frac{\Theta(u)}{\Theta_1(u)};\\
\frac{\Theta_2(u \pm \omega')}{\Theta_3(u \pm \omega')} &= \mp \frac{i}{\sqrt{e_1 - e_3}}\,\frac{\Theta_1(u)}{\Theta(u)}.
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

115. При помощи (2) § 112 формулы (11) и (12) § 113 преобразуются въ такія:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{\wp(u \pm \omega_i) - e_j}} &= \pm \frac{1}{\sqrt{e_i - e_j}}\cdot\frac{\sqrt{\wp(u) - e_i}}{\sqrt{\wp(u) - e_k}};\\
\frac{1}{\sqrt{\wp(u \pm \omega_j) - e_j}} &= \frac{1}{\sqrt{e_i - e_j}\cdot\sqrt{e_k - e_j}}\sqrt{\wp(u) - e_j};\\
\frac{1}{\sqrt{\wp(u \pm \omega_k) - e_j}} &= \pm \frac{1}{\sqrt{e_k - e_j}}\cdot\frac{\sqrt{\wp(u) - e_k}}{\sqrt{\wp(u) - e_i}}.
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\sqrt{\wp(u \pm \omega_i) - e_i}}{\sqrt{\wp(u \pm \omega_i) - e_k}} &= \mp \sqrt{e_i - e_j}\cdot\frac{1}{\sqrt{\wp(u) - e_j}};\\
\frac{\sqrt{\wp(u \pm \omega_j) - e_i}}{\sqrt{\wp(u \pm \omega_j) - e_k}} &= \frac{\sqrt{e_j - e_i}}{\sqrt{e_j - e_k}}\cdot\frac{\sqrt{\wp(u) - e_k}}{\sqrt{\wp(u) - e_i}};\\
\frac{\sqrt{\wp(u \pm \omega_k) - e_i}}{\sqrt{\wp(u \pm \omega_k) - e_k}} &= \mp \frac{1}{\sqrt{e_k - e_j}}\sqrt{\wp(u) - e_j}.
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Обратныя формулъ (1) покажутъ переходъ функцiи $\sqrt{\wp(u)-e_j}$ въ другiя при измѣненiи u на полуперiоды; очевидно ихъ можно невыписывать здѣсь.

116. Перемѣняя въ первомъ изъ (5) § 113 u на $u \pm \omega_i$, на основанiи перваго изъ (6) того же § будемъ имѣть:

$$\frac{\Theta(u \pm 2\omega_i)}{\Theta_j(u \pm 2\omega_i)} = -\frac{\Theta(u)}{\Theta_j(u)}; \tag{1}$$

перемѣняя во второмъ изъ (5) § 113 u на $u \pm \omega_j$, на основанiи этого же самого равенства будемъ имѣть:

$$\frac{\Theta(u \pm 2\omega_j)}{\Theta_j(u \pm 2\omega_j)} = +\frac{\Theta(u)}{\Theta_j(u)}; \tag{2}$$

перемѣняя наконецъ въ третьемъ изъ (5) u на $u \pm \omega_k$, будемъ имѣть на основанiи третьяго изъ (6) того же §:

$$\frac{\Theta(u \pm 2\omega_k)}{\Theta_j(u \pm 2\omega_k)} = -\frac{\Theta(u)}{\Theta_j(u)}. \tag{3}$$

Эти равенства показываютъ, что функцiя $\frac{\Theta(u)}{\Theta_j(u)}$ будетъ имѣть своими перiодами величины $4\omega_i$, $2\omega_j$ и $4\omega_k$, изъ которыхъ послѣднiй будетъ однако линейная функцiя первыхъ двухъ, если $\omega_k = \omega_i + \omega_j$, ибо будетъ отсюда слѣдовать:

$$4\omega_k = 2 \cdot 2\omega_j + 4\omega_i. \tag{4}$$

Перемѣняя въ первомъ изъ (6) § 113 u на $u \pm \omega_i$, на основанiи перваго изъ (5) того же § будемъ имѣть:

$$\frac{\Theta_i(u \pm 2\omega_i)}{\Theta_k(u \pm 2\omega_i)} = -\frac{\Theta_i(u)}{\Theta_k(u)}; \tag{5}$$

перемѣняя во второмъ изъ (6) § 113 u на $u \pm \omega_j$, на основанiи его же самого получимъ:

$$\frac{\Theta_i(u \pm 2\omega_j)}{\Theta_k(u \pm 2\omega_j)} = +\frac{\Theta_i(u)}{\Theta_k(u)}; \tag{6}$$

перемѣняя u на $u \pm \omega_k$ въ третьемъ изъ (6) § 113, на основаніи третьяго изъ (5) того же § будемъ имѣть:

$$\frac{\Theta_i(u \pm 2\omega_k)}{\Theta_k(u \pm 2\omega_k)} = -\frac{\Theta_i(u)}{\Theta_k(u)}. \tag{7}$$

Изъ послѣднихъ трехъ равенствъ слѣдуетъ, что функція $\frac{\Theta_i(u)}{\Theta_k(u)}$ имѣетъ тѣже періоды, что и функція $\frac{\Theta(u)}{\Theta_j(u)}$. Такимъ образомъ частныя Θ-функцій суть двоякопеnecessarily періодическія функціи u.

Этотъ выводъ полученъ нами независимо отъ соотношеній между ними и функціей $\wp(u)$, а прямо изъ ихъ опредѣленія, какъ однозначныхъ, конечныхъ и непрерывныхъ на всей плоскости (u), удовлетворяющихъ функціональнымъ уравненіямъ (1) § 109. Отсюда напротивъ слѣдуетъ двоякая періодичность функцій $\sqrt{\wp(u) - e_j} = \frac{\Theta_j(u)}{\Theta(u)}$, ибо по (1), (2) и (3) будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}
\sqrt{\wp(u+2\omega_i) - e_j} &= -\sqrt{\wp(u) - e_j};\\
\sqrt{\wp(u+2\omega_j) - e_j} &= +\sqrt{\wp(u) - e_j};\\
\sqrt{\wp(u+2\omega_k) - e_j} &= -\sqrt{\wp(u) - e_j}.
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Параллелограммъ періодовъ этихъ функцій будетъ составленъ изъ двухъ рядомъ лежащихъ параллелограммовъ функціи $\wp(u)$. Нулей 0^1 этой функціи внутри ея параллелограмма періодовъ будетъ два: въ точкахъ $u = \pm \omega_j$; безконечностей ∞^1 тоже двѣ: въ точкѣ $u = 0$ и въ точкѣ $u = 2\omega_i$.

117. Изъ (1) § 109 чрезъ логариѳмическое дифференцированіе (по перестановкѣ значковъ i и j одного на мѣсто другого), мы получаемъ такія два равенства, будетъ-ли j равно или неравно i:

$$\frac{\Theta'(u+2\omega_i)}{\Theta(u+2\omega_i)} = 2\eta_i + \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}; \tag{1}$$

$$\frac{\Theta_j'(u+2\omega_i)}{\Theta_j(u+2\omega_i)} = 2\eta_i + \frac{\Theta_j'(u)}{\Theta(u)}. \tag{2}$$

Изъ этихъ равенствъ, полагая $u = -\omega_j$ и имѣя въ виду, что $\Theta(u)$ и $\Theta_j'(u)$ суть нечетныя функціи (послѣдняя — какъ производная четной функціи), мы легко найдемъ:

$$\eta_i = \frac{\Theta'(\omega_i)}{\Theta(\omega_i)} = \frac{\Theta_j'(\omega_i)}{\Theta_j(\omega_i)}. \;{}^{*)} \tag{3}$$

Вычитая теперь (2) изъ (1), получимъ:

$$\frac{\Theta'(u+2\omega_i)}{\Theta(u+2\omega_i)} - \frac{\Theta_j'(u+2\omega_i)}{\Theta_j(u+2\omega_i)} = \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} - \frac{\Theta_j'(u)}{\Theta_j(u)}, \tag{4}$$

откуда видно, что функція второй части этого равенства есть двоякопеNone

періодическая. Освобождая лѣвую часть отъ знаменателя получимъ такое равенство:

$$\left.\begin{aligned} &\Theta_j(u+2\omega_i)\,\Theta'(u+2\omega_i) - \Theta(u+2\omega_i)\,\Theta_j'(u+2\omega_i) = \\ &= \frac{\Theta(u+2\omega_i)}{\Theta(u)} \cdot \frac{\Theta_j(u+2\omega_i)}{\Theta_j(u)} \left[\Theta_j(u)\,\Theta'(u) - \Theta(u)\,\Theta_j'(u)\right]; \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

но по (1) § 109

$$\frac{\Theta(u+2\omega_i)}{\Theta(u)} = -e^{2\eta_i(u+\omega_i)}; \tag{6}$$

*) Это впрочемъ легко получается и прямо изъ опредѣленія Θ-функціи равенствомъ (13) § 87, изъ котораго по (17) § 89 имѣемъ:

$$\eta_i = \zeta(\omega_i) = \frac{\Theta'(\omega_i)}{\Theta(\omega_i)}; \tag{a}$$

далѣе изъ (4) § 98 (по перемѣнѣ i съ j) чрезъ логариѳмическое дифференцированіе получаемъ:

$$\frac{\Theta_j'(u)}{\Theta_j(u)} = \frac{\Theta'(u \pm \omega_j)}{\Theta(u \pm \omega_j)} \mp \eta_j; \tag{b}$$

полагая здѣсь $u = \omega_i$ будемъ имѣть:

$$\frac{\Theta_j'(\omega_i)}{\Theta_j(\omega_i)} = \frac{\Theta'(\omega_i \pm \omega_j)}{\Theta(\omega_i \pm \omega_j)} \mp \eta_j, \tag{c}$$

или по (a):

$$\frac{\Theta_j'(\omega_i)}{\Theta_j(\omega_i)} = \eta_i \pm \eta_j \mp \eta_j = \eta_i, \tag{d}$$

что и требовалось доказать.

$$\frac{\Theta_j(u+2\omega_i)}{\Theta_j(u)} = \pm e^{2\eta_i(u+\omega_i)}; \tag{7}$$

(гдѣ $+$ для i не $= j$, и $-$ для $i = j$); на основаніи этого равенство (5) такъ представится:

$$\left.\begin{aligned} &\Theta_j(u+2\omega_i)\Theta'(u+2\omega_i) - \Theta(u+2\omega_i)\Theta_j'(u+2\omega_i) = \\ &= \mp e^{4\eta_i(u+\omega_i)}[\Theta_j(u)\Theta'(u) - \Theta(u)\Theta_j'(u)], \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

гдѣ $-$ для i не $= j$, и $+$ для $i = j$. Но такому же функціональному уравненію удовлетворяетъ и функція:

$$\Theta_i(u)\,\Theta_k(u); \tag{9}$$

дѣйствительно:

$$\left.\begin{aligned} \Theta_i(u+2\omega_i) &= - e^{2\eta_i(u+\omega_i)}\Theta_i(u); \\ \Theta_k(u+2\omega_i) &= + e^{2\eta_i(u+\omega_i)}\Theta_k(u); \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

слѣдовательно:

$$\Theta_i(u+2\omega_i)\,\Theta_k(u+2\omega_i) = - e^{4\eta_i(u+\omega_i)}\,\Theta_i(u)\,\Theta_k(u); \tag{11}$$

и

$$\left.\begin{aligned} \Theta_i(u+2\omega_j) &= + e^{2\eta_j(u+\omega_j)}\Theta_i(u); \\ \Theta_k(u+2\omega_j) &= + e^{2\eta_j(u+\omega_j)}\Theta_k(u); \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

слѣдовательно

$$\Theta_i(u+2\omega_j)\,\Theta_k(u+2\omega_j) = + e^{4\eta_j(u+\omega_j)}\,\Theta_i(u)\,\Theta_k(u). \tag{13}$$

Обѣ функціи:

$$\Theta_j(u)\Theta'(u) - \Theta(u)\,\Theta_j'(u) \tag{14}$$

и (9) обращаются въ нуль для однихъ и тѣхъ же значеній u, именно либо для

$$u = \omega_i, \quad \text{либо для} \quad u = \omega_k; \tag{15}$$

для (9) это слѣдуетъ изъ (3) § 102, для (14) изъ (3) настоящаго §; притомъ въ точкахъ (15) функція (9) будетъ $=0^1$; функція же (14) будетъ $=0^m$, гдѣ m не <1, ибо это функція однозначная; слѣдовательно частное ихъ:

$$\frac{\Theta_j(u)\,\Theta'(u)-\Theta(u)\Theta'_j(u)}{\Theta_i(u)\,\Theta_k(u)} \tag{16}$$

будетъ функція однозначная, конечная и непрерывная на всей плоскости (u); кромѣ того она по (8), (11) и (13) есть функція двоякопеbecause періодическая; слѣдовательно она есть постоянная:

$$\frac{\Theta_j(u)\,\Theta'(u)-\Theta(u)\Theta'_j(u)}{\Theta_i(u)\,\Theta_k(u)}=C. \tag{17}$$

Полагая $u=0$, получимъ отсюда:

$$C=\frac{\Theta_j(0)\,\Theta'(0)}{\Theta_i(0)\,\Theta_k(0)}=+1, \tag{18}$$

по (11) § 88; потому изъ (17) будемъ имѣть:

$$\Theta_j(u)\,\Theta'(u)-\Theta(u)\,\Theta'_j(u)=\Theta_i(u)\Theta_k(u); \tag{19}$$

раздѣляя обѣ части этого равенства на $\Theta_j^2(u)$, получимъ такое:

$$\frac{d\,\dfrac{\Theta(u)}{\Theta_j(u)}}{du}=\frac{\Theta_i(u)}{\Theta_j(u)}\cdot\frac{\Theta_k(u)}{\Theta_j(u)}. \tag{20}$$

Замѣтимъ еще, что полагая въ (19) $u=\omega_j$, мы будемъ имѣть:

$$-\Theta(\omega_j)\,\Theta'_j(\omega_j)=\Theta_i(\omega_j)\,\Theta_k(\omega_j), \tag{21}$$

откуда найдемъ

$$\Theta'_j(\omega_j)=-\frac{\Theta_i(\omega_j)\,\Theta_k(\omega_j)}{\Theta(\omega_j)}. \tag{22}$$

118. Такимъ же точно образомъ получится дифференціальное уравненіе, аналогичное (20), и для функціи $\dfrac{\Theta_i(u)}{\Theta_k(u)}$. Перемѣняя въ равен-

ствѣ (2) пред. § j на i и на k, а i оба раза на j, и вычитая второй результатъ изъ перваго, получимъ:

$$\frac{\Theta_i'(u+2\omega_j)}{\Theta_i(u+2\omega_j)}-\frac{\Theta_k'(u+2\omega_j)}{\Theta_k(u+2\omega_j)}=\frac{\Theta_i'(u)}{\Theta_i(u)}-\frac{\Theta_k'(u)}{\Theta_k(u)}, \tag{1}$$

и освобождая затѣмъ лѣвую часть отъ знаменателя:

$$\left.\begin{aligned}&\Theta_k(u+2\omega_j)\Theta_i'(u+2\omega_j)-\Theta_i(u+2\omega_j)\Theta_k'(u+2\omega_j)=\\&=\frac{\Theta_i(u+2\omega_j)}{\Theta_i(u)}\cdot\frac{\Theta_k(u+2\omega_j)}{\Theta_k(u)}[\Theta_k(u)\Theta_i'(u)-\Theta_i(u)\Theta_k'(u)];\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

но

$$\frac{\Theta_i(u+2\omega_j)}{\Theta_i(u)}=\pm e^{2\eta_j(u+\omega_j)}, \tag{3}$$

гдѣ верхній знакъ берется для j не $=i$, нижній для $j=i$; также

$$\frac{\Theta_k(u+2\omega_j)}{\Theta_k(u)}=\pm e^{2\eta_j(u+\omega_j)}, \tag{4}$$

гдѣ $+$ берется для j не $=k$, и $-$ для $j=k$; потому (2) можно такъ написать:

$$\left.\begin{aligned}&\Theta_k(u+2\omega_j)\Theta_i'(u+2\omega_j)-\Theta_i(u+2\omega_j)\Theta_k'(u+2\omega_j)=\\&=\pm e^{4\eta_j(u+\omega_j)}[\Theta_k(u)\Theta_i'(u)-\Theta_i(u)\Theta_k'(u)],\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

гдѣ верхній знакъ берется, когда j неравно ни которому изъ i и k, и нижній —, когда оно равно которому нибудь изъ нихъ. Но такому же функціональному уравненію, какъ (5), будетъ удовлетворять и функція:

$$\Theta(u)\Theta_j(u), \tag{6}$$

ибо

$$\left.\begin{aligned}\Theta(u+2\omega_j)&=-e^{2\eta_j(u+\omega_j)}\Theta(u);\\\Theta_j(u+2\omega_j)&=-e^{2\eta_j(u+\omega_j)}\Theta_j(u);\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

*

слѣдовательно:

$$\Theta(u+2\omega_j)\,\Theta_j(u+2\omega_j)=e^{4\eta_j(u+\omega_j)}\,\Theta(u)\,\Theta_j(u)\,; \tag{8}$$

также

$$\left.\begin{aligned}\Theta(u+2\omega_i)&=-\,e^{2\eta_i(u+\omega_i)}\,\Theta(u);\\ \Theta_j(u+2\omega_i)&=+\,e^{2\eta_i(u+\omega_i)}\,\Theta_j(u);\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

откуда

$$\Theta(u+2\omega_i)\,\Theta_j(u+2\omega_i)=-\,e^{4\eta_i(u+\omega_i)}\,\Theta(u)\,\Theta_j(u)\,; \tag{10}$$

обѣ функціи (6) и

$$\Theta_k(u)\,\Theta_i'(u)-\Theta_i(u)\,\Theta_k'(u)\,, \tag{11}$$

обращаются въ нуль для однихъ и тѣхъ же значеній u, именно для

$$u\equiv 0\,,\qquad \text{и}\qquad u\equiv\omega_j\,, \tag{12}$$

какъ то слѣдуетъ для первой, т. е. (6) изъ (1) и (3) § 102, а для послѣдней, т. е. (11), изъ того, что $\Theta_i'(u)$ и $\Theta_k'(u)$, какъ производныя четныхъ функцій, обращаются въ нуль вмѣстѣ съ u, и изъ равенства:

$$\eta_j=\frac{\Theta'(\omega_j)}{\Theta(\omega_j)}=\frac{\Theta_i'(\omega_j)}{\Theta_i(\omega_j)}=\frac{\Theta_k'(\omega_j)}{\Theta_k(\omega_j)}\,, \tag{13}$$

получаемаго изъ (3) § 117 чрезъ перемѣну значковъ, притомъ первая въ 0^1, послѣдняя въ 0^m, гдѣ не $m<1$, ибо это однозначная функція; слѣдовательно частное

$$\frac{\Theta_k(u)\,\Theta_i'(u)-\Theta_i(u)\,\Theta_k'(u)}{\Theta(u)\,\Theta_j(u)} \tag{14}$$

будетъ функція, однозначная, конечная и непрерывная на всей плоскости (u), притомъ двоякопе078іодическая, какъ то слѣдуетъ изъ (5), (8) и (10); слѣдовательно постоянная, т. е.

$$\frac{\Theta_k(u)\,\Theta_i'(u)-\Theta_i(u)\,\Theta_k'(u)}{\Theta(u)\,\Theta_j(u)}=C; \tag{15}$$

полагая здѣсь $u = \omega_i$, или $u = \omega_k$, найдемъ:

$$C = \frac{\Theta_k(\omega_i)\,\Theta_i'(\omega_i)}{\Theta(\omega_i)\,\Theta_j(\omega_i)} = -\frac{\Theta_i(\omega_k)\,\Theta_k'(\omega_k)}{\Theta(\omega_k)\,\Theta_j(\omega_k)}. \tag{16}$$

Отсюда получается новое соотношеніе между значеніями производныхъ Θ-функцій отъ полуперіодовъ и самими функціями, которое однако есть слѣдствіе прежнихъ. По формулѣ (22) § 117 имѣемъ:

$$\Theta_i'(\omega_i) = -\frac{\Theta_j(\omega_i)\,\Theta_k(\omega_i)}{\Theta(\omega_i)}; \quad \Theta_k'(\omega_k) = -\frac{\Theta_i(\omega_k)\,\Theta_j(\omega_k)}{\Theta(\omega_k)}; \tag{17}$$

внося это въ (16), будемъ имѣть:

$$C = -\frac{\Theta_k^2(\omega_i)}{\Theta^2(\omega_i)} = \frac{\Theta_i^2(\omega_k)}{\Theta^2(\omega_k)}, \tag{18}$$

что согласно съ (8) § 111, если тамъ j перемѣнить на i. Внося одно изъ этихъ послѣднихъ значеній, напр. первое въ (15), получимъ по освобожденіи отъ знаменателя:

$$\Theta_k(u)\,\Theta_i'(u) - \Theta_i(u)\,\Theta_k'(u) = -\frac{\Theta_k^2(\omega_i)}{\Theta^2(\omega_i)} \cdot \Theta(u)\,\Theta_j(u). \tag{19}$$

Дѣля обѣ части на $\Theta_k^2(u)$, получимъ:

$$\frac{d\,\dfrac{\Theta_i(u)}{\Theta_k(u)}}{du} = -\frac{\Theta_k^2(\omega_i)}{\Theta^2(\omega_i)} \cdot \frac{\Theta(u)}{\Theta_k(u)} \cdot \frac{\Theta_j(u)}{\Theta_k(u)}. \tag{20}$$

119. Такимъ образомъ дифференціальныя уравненія для функцій II) и III) (1) § 112 уже получены; для функціи I) получимъ, раздѣляя (19) § 117 на $-\Theta^2(u)$; тогда будетъ:

$$\frac{d\,\dfrac{\Theta_j(u)}{\Theta(u)}}{du} = -\frac{\Theta_i(u)}{\Theta(u)} \cdot \frac{\Theta_k(u)}{\Theta(u)}. \tag{1}$$

120. Послѣднее уравненіе, равно какъ и уравненія (20) §§ 117 и 118, при помощи соотношеній между квадратами трехъ Θ-функцій, [§§ 109—111] могутъ быть преобразованы такимъ образомъ, что на-

право отъ знака равенства будутъ содержать туже функцію, какъ и налѣво. Изъ (18) § 109 имѣемъ:

$$\frac{\Theta_k^2(u)}{\Theta^2(u)}=\frac{\Theta_j^2(u)}{\Theta^2(u)}-\frac{\Theta_j^2(\omega_k)}{\Theta^2(\omega_k)}, \tag{1}$$

и перемѣняя k на i:

$$\frac{\Theta_i^2(u)}{\Theta^2(u)}=\frac{\Theta_j^2(u)}{\Theta^2(u)}-\frac{\Theta_j^2(\omega_i)}{\Theta^2(\omega_i)}; \tag{2}$$

извлекая квадратный корень, будемъ имѣть:

$$\frac{\Theta_k(u)}{\Theta(u)}=\sqrt{\frac{\Theta_j^2(u)}{\Theta^2(u)}-\frac{\Theta_j^2(\omega_k)}{\Theta^2(\omega_k)}}; \tag{3}$$

$$\frac{\Theta_i(u)}{\Theta(u)}=\sqrt{\frac{\Theta_j^2(u)}{\Theta^2(u)}-\frac{\Theta_j^2(\omega_i)}{\Theta^2(\omega_i)}}; \tag{4}$$

гдѣ мы взяли предъ знакомъ корня знакъ $+$ на томъ основаніи, что по умноженіи обѣихъ частей на u и положеніи затѣмъ $u=0$, налѣво отъ знака равенства, равно какъ и подъ корнемъ, по (11) § 88 получится $+1$. Внося изъ (3) и (4) въ (1) пред. §, получимъ:

$$\frac{d\,\dfrac{\Theta_j(u)}{\Theta(u)}}{du}=-\sqrt{\left(\frac{\Theta_j^2(u)}{\Theta^2(u)}-\frac{\Theta_j^2(\omega_i)}{\Theta^2(\omega_i)}\right)\left(\frac{\Theta_j^2(u)}{\Theta^2(u)}-\frac{\Theta_j^2(\omega_k)}{\Theta^2(\omega_k)}\right)}. \tag{5}$$

Далѣе изъ (17) § 109 находимъ:

$$\frac{\Theta_k(u)}{\Theta_j(u)}=\sqrt{1-\frac{\Theta_j^2(\omega_k)}{\Theta^2(\omega_k)}\cdot\frac{\Theta^2(u)}{\Theta_j^2(u)}}, \tag{6}$$

и перемѣняя k на i:

$$\frac{\Theta_i(u)}{\Theta_j(u)}=\sqrt{1-\frac{\Theta_j^2(\omega_i)}{\Theta^2(\omega_i)}\cdot\frac{\Theta^2(u)}{\Theta_j^2(u)}}, \tag{7}$$

гдѣ въ обѣихъ формулахъ направо взятъ предъ корнемъ знакъ $+$ на томъ основаніи, что для $u=0$ какъ лѣвая часть, такъ и подкоренное

выраженіе обращаются въ положительную единицу. Внося изъ (6) и (7) въ (20) § 117, будемъ имѣть:

$$\frac{d\dfrac{\Theta(u)}{\Theta_j(u)}}{du}=\sqrt{\left(1-\frac{\Theta_j^2(\omega_i)}{\Theta^2(\omega_i)}\cdot\frac{\Theta^2(u)}{\Theta_j^2(u)}\right)\left(1-\frac{\Theta_j^2(\omega_k)}{\Theta^2(\omega_k)}\cdot\frac{\Theta^2(u)}{\Theta_j^2(u)}\right)}. \tag{8}$$

Изъ (17) § 109 имѣемъ:

$$\frac{\Theta^2(u)}{\Theta_k^2(u)}=\frac{\Theta^2(\omega_i)}{\Theta_k^2(\omega_i)}\left(1-\frac{\Theta_i^2(u)}{\Theta_k^2(u)}\right) \tag{9}$$

извлекая корень и беря его съ $+$, ибо для $u=\omega_i$ обѣ части равенства должны обратиться въ $\dfrac{\Theta(\omega_i)}{\Theta_k(\omega_i)}$, будемъ имѣть:

$$\frac{\Theta(u)}{\Theta_k(u)}=\frac{\Theta(\omega_i)}{\Theta_k(\omega_i)}\sqrt{1-\frac{\Theta_i^2(u)}{\Theta_k^2(u)}}. \tag{10}$$

Затѣмъ изъ (6) § 111, раздѣляя на послѣдній членъ все равенство, получимъ:

$$-\frac{\Theta_k^2(\omega_j)}{\Theta_i^2(\omega_j)}\cdot\frac{\Theta_i^2(u)}{\Theta_k^2(u)}+\frac{\Theta_i^2(\omega_k)\,\Theta_k^2(\omega_j)}{\Theta_i^2(\omega_j)\,\Theta_j^2(\omega_k)}\cdot\frac{\Theta_j^2(u)}{\Theta_k^2(u)}+1=0; \tag{11}$$

но изъ того же равенства (6) § 111 полагая $u=\omega_i$ получаемъ такое:

$$\Theta_i^2(\omega_k)\,\Theta_k^2(\omega_j)\,\Theta_j^2(\omega_i)+\Theta_i^2(\omega_j)\,\Theta_j^2(\omega_k)\,\Theta_k^2(\omega_i)=0, \tag{12}$$

откуда будетъ слѣдовать:

$$\frac{\Theta_i^2(\omega_k)\,\Theta_k^2(\omega_j)}{\Theta_i^2(\omega_j)\,\Theta_j^2(\omega_k)}=-\frac{\Theta_k^2(\omega_i)}{\Theta_j^2(\omega_i)}, \tag{13}$$

на основаніи чего равенство (11) приметъ такой видъ:

$$-\frac{\Theta_k^2(\omega_j)}{\Theta_i^2(\omega_j)}\cdot\frac{\Theta_i^2(u)}{\Theta_k^2(u)}-\frac{\Theta_k^2(\omega_i)}{\Theta_j^2(\omega_i)}\cdot\frac{\Theta_j^2(u)}{\Theta_k^2(u)}+1=0; \tag{14}$$

отсюда найдемъ:

$$\frac{\Theta_j^2(u)}{\Theta_k^2(u)}=\frac{\Theta_j^2(\omega_i)}{\Theta_k^2(\omega_i)}\left(1-\frac{\Theta_k^2(\omega_j)}{\Theta_i^2(\omega_j)}\cdot\frac{\Theta_i^2(u)}{\Theta_k^2(u)}\right); \tag{15}$$

и, извлекая корень:

$$\frac{\Theta_j(u)}{\Theta_k(u)}=\frac{\Theta_j(\omega_i)}{\Theta_k(\omega_i)}\sqrt{1-\frac{\Theta_k^2(\omega_j)}{\Theta_i^2(\omega_j)}\cdot\frac{\Theta_i^2(u)}{\Theta_k^2(u)}}, \tag{16}$$

гдѣ взятъ предъ корнемъ $+$, ибо только съ этимъ знакомъ для $u=\omega_i$ обѣ части равенства сдѣлаются равными. Внося изъ (10) и (16) въ (20) § 118, мы будемъ имѣть:

$$\frac{d\dfrac{\Theta_i(u)}{\Theta_k(u)}}{du}=-\frac{\Theta_j(\omega_i)}{\Theta(\omega_i)}\sqrt{\left(1-\frac{\Theta_i^2(u)}{\Theta_k^2(u)}\right)\left(1-\frac{\Theta_k^2(\omega_j)}{\Theta_i^2(\omega_j)}\cdot\frac{\Theta_i^2(u)}{\Theta_k^2(u)}\right)}. \tag{17}$$

121. Уравненіямъ (5), (8) и (17) предыдущаго § можно дать другой видъ, вводя вмѣсто значеній функцій I), II), III) § 112 для значеній u, равныхъ которому нибудь изъ полуперіодовъ, ихъ выраженія чрезъ e_i, e_j, e_k по формулѣ (2) § 104, именно:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{e_i-e_j}&=\frac{\Theta_j(\omega_i)}{\Theta(\omega_i)}; & \sqrt{e_k-e_j}&=\frac{\Theta_j(\omega_k)}{\Theta(\omega_k)};\\ \sqrt{e_j-e_k}&=\frac{\Theta_k(\omega_j)}{\Theta(\omega_j)}; & \sqrt{e_j-e_i}&=\frac{\Theta_i(\omega_j)}{\Theta(\omega_j)};\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

вводя эти величины въ упомянутыя сейчасъ уравненія, мы дадимъ имъ такой видъ:

$$\frac{d\dfrac{\Theta_j(u)}{\Theta(u)}}{du}=-\sqrt{\left(\frac{\Theta_j^2(u)}{\Theta^2(u)}-(e_i-e_j)\right)\left(\frac{\Theta_j^2(u)}{\Theta^2(u)}-(e_k-e_j)\right)}; \tag{2}$$

$$\frac{d\dfrac{\Theta(u)}{\Theta_j(u)}}{du}=\sqrt{\left(1-(e_i-e_j)\frac{\Theta^2(u)}{\Theta_j^2(u)}\right)\left(1-(e_k-e_j)\frac{\Theta^2(u)}{\Theta_j^2(u)}\right)}; \tag{3}$$

$$\frac{d\dfrac{\Theta_i(u)}{\Theta_k(u)}}{du}=-\sqrt{e_i-e_j}\sqrt{\left(1-\frac{\Theta_i^2(u)}{\Theta_k^2(u)}\right)\left(1-\frac{e_k-e_i}{e_i-e_j}\cdot\frac{\Theta_i^2(u)}{\Theta_k^2(u)}\right)}. \tag{4}$$

Уравненіямъ (2) и (4) можно дать форму одинаковую съ (3), если вмѣсто $\frac{\Theta_j(u)}{\Theta(u)}$ и $\frac{\Theta_i(u)}{\Theta_k(u)}$ ввести слѣдующія функціи, отличающіеся отъ нихъ соотвѣтственно постоянными множителями:

$$-\frac{1}{\sqrt{e_i-e_j}\cdot\sqrt{e_k-e_j}}\cdot\frac{\Theta_j(u)}{\Theta(u)} \quad \text{и} \quad -\frac{1}{\sqrt{e_i-e_j}}\cdot\frac{\Theta_i(u)}{\Theta_k(u)}; \tag{5}$$

тогда эти функціи, какъ и функція $\frac{\Theta(u)}{\Theta_j(u)}$, будутъ удовлетворять одному и тому же дифференціальному уравненію перваго порядка:

$$\frac{d\xi}{du}=\sqrt{[1-(e_i-e_j)\xi^2][1-(e_k-e_j)\xi^2]} \tag{6}$$

(Schwartz, стр. 29), будутъ его частными интегралами, принимающими для $u=0$ первая, т. е. $\frac{\Theta(u)}{\Theta_j(u)}$, значеніе нуль, вторая ∞, и третья единицу.

122. Если въ уравненіи (3) пред. § положить:

$$\sqrt{e_i-e_j}\,\frac{\Theta(u)}{\Theta_j(u)}=x \tag{1}$$

$$\sqrt{e_i-e_j}\,u=v, \tag{2}$$

то уравненіе (3) приметъ такой видъ:

$$\frac{dx}{dv}=\sqrt{(1-x^2)\left(1-\frac{e_k-e_j}{e_i-e_j}x^2\right)}, \tag{3}$$

причемъ $x=0$ при $v=0$. Полагая

$$\frac{\sqrt{e_k-e_j}}{\sqrt{e_i-e_j}}=k, \tag{4}$$

мы можемъ это уравненіе (3) такъ написать:

$$\frac{dx}{dv}=\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}. \tag{5}$$

Отсюда, интегрируя, получимъ:

$$v = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}. \tag{6}$$

Если положить

$$x = \sin\varphi, \tag{7}$$

то этотъ интегралъ обратится въ такой:

$$v = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \tag{8}$$

или полагая

$$\triangle\varphi = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}, \tag{9}$$

въ такой:

$$v = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\triangle\varphi}. \tag{10}$$

Этотъ интегралъ *Лежандръ* называлъ эллиптической функціей перваго рода и обозначалъ чрезъ $F(\varphi, k)$, такъ что слѣдовательно

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\triangle\varphi}, \tag{11}$$

причемъ k онъ называлъ *модулемъ* эллиптической функціи; названіе это *модуля* для величины k удержалось въ наукѣ, но интегралъ (11) теперь уже не называютъ эллиптической функціей, а эллиптическимъ интеграломъ. Уголъ φ *Якоби* назвалъ амплитудою интеграла v, и письменно онъ обозначалъ это такъ:

$$\varphi = \operatorname{am} v. \tag{12}$$

Такъ какъ $x = \sin\varphi$, то слѣдовательно

$$x = \sin\operatorname{am} v; \tag{13}$$

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2\operatorname{am} v} = \cos\operatorname{am} v; \tag{14}$$

$$\triangle\varphi = \sqrt{1-k^2x^2} = \sqrt{1-k^2\sin^2\operatorname{am} v} = \triangle\operatorname{am} v; \tag{15}$$

это и суть тѣ *эллиптическія функціи*, которыя, съ Якоби начиная, обыкновенно и разсматривались въ теоріи эллиптическихъ функцій. Обозначеніе ихъ, показанное въ послѣднихъ трехъ формулахъ, принадлежитъ Якоби. Если разсматриваются въ одно время нѣсколько эллиптическихъ функцій съ различными модулями, то модуль приписывается послѣ аргумента, отдѣляя его запятой, такимъ образомъ:

$$\left.\begin{array}{r}\sin\mathrm{am}(v,k)\\ \cos\mathrm{am}(v,k)\\ \Delta\mathrm{am}(v,k)\end{array}\right\}. \tag{16}$$

Гудерманъ предложилъ болѣе короткое обозначеніе для этихъ функцій, именно:

$$x=\mathrm{sn}\,v;\qquad \sqrt{1-x^2}=\mathrm{cn}\,v;\qquad \sqrt{1-k^2x^2}=\mathrm{dn}\,v. \tag{17}$$

123. Модуль k чрезъ величины e_i, e_j, e_k выражается алгебраически, чрезъ полупеніоды $\omega_i, \omega_j, \omega_k$ онъ выразится трансцендентно. Выраженіе его чрезъ $\wp(u)$ для $u=$ одному изъ полуперіодовъ не представляетъ особеннаго интереса; выраженіе же его чрезъ Θ-функціи найдется легко такимъ образомъ. По (3) и (6) § 105, возвышая эти равенства *) въ четвертую степень, будемъ имѣть:

$$\frac{e_j-e_i}{e_j-e_k}=\left(\frac{\Theta(\omega_k)}{\Theta(\omega_i)}\,e^{-\frac{\eta_i\pm\eta_k}{2}\omega_j}\right)^4, \tag{1}$$

гдѣ $+$ относится къ случаю $\omega_i+\omega_j=\omega_k$, а $-$, когда $\omega_i=\omega_j+\omega_k$. Слѣдовательно по (4) пред. § будетъ:

$$k^2=\left(\frac{\Theta(\omega_i)}{\Theta(\omega_k)}\,e^{\frac{\eta_i\pm\eta_k}{2}\omega_j}\right)^4. \tag{2}$$

Извлекая квадратный корень, получимъ:

$$k=\pm\left(\frac{\Theta(\omega_i)}{\Theta(\omega_k)}\right)^2 e^{(\eta_i\pm\eta_k)\omega_j}, \tag{3}$$

гдѣ знакъ остается пока неопредѣленнымъ.

*) по перестановкѣ i и j одного на мѣсто другого.

Сравнивая (4) пред. § съ упомянутыми формулами § 105 будемъ имѣть:

$$\sqrt{k}=\frac{\sqrt[4]{e_j-e_k}}{\sqrt[4]{e_j-e_i}}=\frac{\Theta(\omega_i)}{\Theta(\omega_k)}\,e^{\frac{\eta_i\pm\eta_k}{2}\omega_j}. \tag{4}$$

Вмѣстѣ съ модулемъ k разсматриваютъ и его *дополнительный* k', опредѣляемый равенствомъ:

$$k^2+k'^2=1\,; \tag{5}$$

отсюда будемъ имѣть по (4) пред. §:

$$k'^2=1-k^2=\frac{e_i-e_k}{e_i-e_j}. \tag{6}$$

Слѣдовательно по (3) и (6) § 105:

$$k'=\frac{\sqrt{e_i-e_k}}{\sqrt{e_i-e_j}}=\pm\left(\frac{\Theta(\omega_j)}{\Theta(\omega_k)}\,e^{\frac{\eta_k\pm\eta_j}{2}\omega_i}\right)^2, \tag{7}$$

$$\sqrt{k'}=\frac{\sqrt[4]{e_i-e_k}}{\sqrt[4]{e_i-e_j}}=\frac{\Theta(\omega_j)}{\Theta(\omega_k)}\,e^{\frac{\eta_k\pm\eta_j}{2}\omega_i}\,; \tag{8}$$

гдѣ знакъ — предъ η_j отвѣчаетъ случаю $\omega_i+\omega_j=\omega_k$, а $+$ случаю $\omega_i=\omega_j+\omega_k$. Знаки предъ корнями пока оставляемъ неопредѣленными. — Если принять $i=1$, $j=3$, $k=2$, то будемъ имѣть по (4) и (8):

$$\sqrt{k}=\frac{\sqrt[4]{e_2-e_3}}{\sqrt[4]{e_1-e_3}}=\frac{\Theta(\omega)}{\Theta(\omega'')}\,e^{\frac{\eta+\eta''}{2}\omega'}\,; \tag{9}$$

$$\sqrt{k'}=\frac{\sqrt[4]{e_1-e_2}}{\sqrt[4]{e_1-e_3}}=\frac{\Theta(\omega'')}{\Theta(\omega')}\,e^{\frac{\eta'+\eta''}{2}\omega}, \tag{10}$$

согласно съ (9) § 105.— Въ этомъ случаѣ будетъ

$$x=\operatorname{sinam}(\sqrt{e_1-e_3}\,u,k)=\sqrt{e_1-e_3}\,\frac{\Theta(u)}{\Theta_3(u)}. \tag{11}$$

124. Вводя въ формулы (7) и (6) § 120 вмѣсто Θ-функцій для $u=\omega_i$ и $u=\omega_k$ ихъ значенія изъ (1) § 121, мы будемъ имѣть:

$$\frac{\Theta_i(u)}{\Theta_j(u)}=\sqrt{1-(e_i-e_j)\frac{\Theta^2(u)}{\Theta_j^2(u)}}\,; \tag{1}$$

$$\frac{\Theta_k(u)}{\Theta_j(u)}=\sqrt{1-(e_k-e_j)\frac{\Theta^2(u)}{\Theta_j^2(u)}}\,; \tag{2}$$

а это по (1), (2), (14) и (15) § 122 такъ представится:

$$\frac{\Theta_i(u)}{\Theta_j(u)}=\sqrt{1-x^2}=\cos\operatorname{am}v\,; \tag{3}$$

$$\frac{\Theta_k(u)}{\Theta_j(u)}=\sqrt{1-k^2x^2}=\triangle\operatorname{am}v\,. \tag{4}$$

Такимъ образомъ, имѣя въ виду (2) § 122 мы имѣемъ слѣдующія формулы для выраженія отношенія трехъ Θ-функцій къ четвертой чрезъ функціи амплитуды:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\Theta(u)}{\Theta_j(u)}=\frac{1}{\sqrt{e_i-e_j}}\sin\operatorname{am}(\sqrt{e_i-e_j}\,u,k);\\
&\frac{\Theta_i(u)}{\Theta_j(u)}=\cos\operatorname{am}(\sqrt{e_i-e_j}\,u,k);\\
&\frac{\Theta_k(u)}{\Theta_j(u)}=\triangle\operatorname{am}(\sqrt{e_i-e_j}\,u,k);
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

наоборотъ отсюда получаются такія выраженія функцій амплитуды чрезъ функціи Θ:

$$\left.\begin{aligned}
&\sin\operatorname{am}(\sqrt{e_i-e_j}\,u,k)=\sqrt{e_i-e_j}\,\frac{\Theta(u)}{\Theta_j(u)};\\
&\cos\operatorname{am}(\sqrt{e_i-e_j}\,u,k)=\frac{\Theta_i(u)}{\Theta_j(u)};\\
&\triangle\operatorname{am}(\sqrt{e_i-e_j}\,u,k)=\frac{\Theta_k(u)}{\Theta_j(u)}.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

125. Эти функціи имѣютъ простое соотношеніе съ функціей $\wp(u)$: выражая вторыя части послѣднихъ равенствъ пред. § чрезъ функцію $\wp(u)$ по (1) § 104, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} \sin\mathrm{am}(\sqrt{e_i-e_j}\,u, k) &= \frac{\sqrt{e_i-e_j}}{\sqrt{\wp(u)-e_j}}; \\ \cos\mathrm{am}(\sqrt{e_i-e_j}\,u, k) &= \frac{\sqrt{\wp(u)-e_i}}{\sqrt{\wp(u)-e_j}}; \\ \triangle\,\mathrm{am}(\sqrt{e_i-e_j}\,u, k) &= \frac{\sqrt{\wp(u)-e_k}}{\sqrt{\wp(u)-e_j}}; \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

откуда въ свою очередь получатся выраженія функцій $\sqrt{\wp(u)-e_i}$ и проч., чрезъ функціи амплитуды:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{\wp(u)-e_i} &= \sqrt{e_i-e_j}\,\mathrm{cotg\,am}(\sqrt{e_i-e_j}\,u, k); \\ \sqrt{\wp(u)-e_j} &= \frac{\sqrt{e_i-e_j}}{\sin\mathrm{am}(\sqrt{e_i-e_j}\,u, k)}; \\ \sqrt{\wp(u)-e_k} &= \sqrt{e_i-e_j}\,\frac{\triangle\,\mathrm{am}(\sqrt{e_i-e_j}\,u, k)}{\sin\mathrm{am}(\sqrt{e_i-e_j}\,u, k)}. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Изъ средней изъ послѣднихъ формулъ находимъ:

$$\wp(u) = e_j + \frac{e_i-e_j}{\sin^2\mathrm{am}(\sqrt{e_i-e_j}\,u, k)}. \quad (3)$$

Такъ выражается $\wp(u)$ чрезъ $\sin\mathrm{am}(\sqrt{e_i-e_j}\,u, k)$. Этимъ равенствомъ Halphen опредѣляетъ функцію $\wp(u)$. Чтобы получить его въ томъ самомъ видѣ, какъ у Halphen'а, надобно положить

$$e_i - e_j = \frac{1}{\lambda} \quad (4)$$

и выразить e_i и e_j чрезъ k и λ. Мы имѣли въ § 77 (2):

$$e_i + e_j + e_k = 0; \quad (5)$$

далѣе изъ (4) § 122 при помощи (5) § 123 получаемъ такое равенство:

$$k^2 e_i + k'^2 e_j - e_k = 0; \tag{6}$$

складывая его съ предыдущимъ (5), получаемъ:

$$(1 + k^2)e_i + (1 + k'^2)e_j = 0, \tag{7}$$

откуда при помощи извѣстныхъ свойствъ пропорцій и равенствъ (5) § 123 и (4) настоящаго получаемъ такую пропорцію:

$$\frac{e_i}{-(1 + k'^2)} = \frac{e_j}{1 + k^2} = \frac{-e_k}{k^2 - k'^2} = \frac{e_k}{k'^2 - k^2} = \frac{e_i - e_j}{-3} = -\frac{1}{3\lambda}; \tag{8}$$

отсюда находимъ:

$$e_i = \frac{1 + k'^2}{3\lambda}; \quad e_j = -\frac{1 + k^2}{3\lambda}; \quad e_k = \frac{k^2 - k'^2}{3\lambda}. \tag{9}$$

Эти формулы выражаютъ корни полинома

$$S = 4s^3 - g_2 s - g_3, \tag{10}$$

чрезъ величины k^2, k'^2, и λ; т. е. модуль и его дополнительный, и такъ называемый мультипликаторъ $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ [см. (2) § 122 и (4) настоящаго].

Что касается до выраженія самыхъ инваріантовъ g_2 и g_3, то подставляя въ ихъ выраженія чрезъ e_i, e_j, e_k [(3) и (4) § 77]:

$$g_2 = -4(e_j e_k + e_k e_i + e_i e_j); \tag{11}$$

$$g_3 = 4 e_i e_j e_k, \tag{12}$$

выраженіе этихъ послѣднихъ изъ формулъ (9), мы будемъ имѣть:

$$g_2 = \frac{4}{3\lambda^2}(1 - k^2 k'^2) = \frac{4}{3\lambda^2}(1 - k^2 + k^4); \tag{13}$$

$$g_3 = -\frac{1}{27\lambda^3}(2 + k^2 k'^2)(k^2 - k'^2). \tag{14}$$

Внося вмѣсто e_j и $e_i - e_j$ ихъ выраженія изъ формулъ (9) и (4) въ (3), мы получимъ формулу Halphen'а въ томъ самомъ видѣ, какъ у него:

$$\wp(u) = -\frac{1+k^2}{3\lambda} + \frac{1}{\lambda \sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{u}{\sqrt{\lambda}},\ k\right)}. \tag{15}$$

126. Полагая въ формулахъ (1) пред. § $u=0$, $u=\omega_i$, $u=\omega_j$, $u=\omega_k$, мы получимъ слѣдующій рядъ формулъ, дающихъ значенія функцій амплитуды для этихъ значеній аргумента:

$$\left.\begin{aligned} &\sin\operatorname{am}(0,k)=0\,;\\ &\cos\operatorname{am}(0,k)=1\,;\\ &\Delta\operatorname{am}(0,k)=1\,. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sin\operatorname{am}(\sqrt{e_i-e_j}\,\omega_i,k)=1\,;\\ &\cos\operatorname{am}(\sqrt{e_i-e_j}\,\omega_i,k)=0\,;\\ &\Delta\operatorname{am}(\sqrt{e_i-e_j}\,\omega_i,k)=\frac{\sqrt{e_i-e_j}}{\sqrt{e_i-e_k}}=k'. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sin\operatorname{am}(\sqrt{e_i-e_j}\,\omega_j,k)=\infty^1\,;\\ &\cos\operatorname{am}(\sqrt{e_i-e_j}\,\omega_j,k)=\infty^1\,;\\ &\Delta\operatorname{am}(\sqrt{e_i-e_j}\,\omega_j,k)=\infty^1. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sin\operatorname{am}(\sqrt{e_i-e_j}\,\omega_k,k)=\frac{\sqrt{e_i-e_j}}{\sqrt{e_k-e_j}}=\frac{1}{k}\,;\\ &\cos\operatorname{am}(\sqrt{e_i-e_j}\,\omega_k,k)=\frac{\sqrt{e_k-e_i}}{\sqrt{e_k-e_j}}=-i\frac{\sqrt{e_i-e_k}}{\sqrt{e_k-e_j}}=-i\frac{k'}{k}\,;\\ &\Delta\operatorname{am}(\sqrt{e_i-e_j}\,\omega_k,k)=0\,, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

ибо

$$\sqrt{e_k-e_j}=+1\cdot\sqrt{e_k-e_i}=-i\cdot i\sqrt{e_k-e_i}=-i\sqrt{-1}\cdot\sqrt{e_k-e_i}=-i\sqrt{e_i-e_k}.$$

127. Имѣя въ виду (7) § 73 и (13) § 122, мы можемъ равенство (3) § 125 такъ переписать:

$$s-e_j=\frac{e_i-e_j}{x^2}; \tag{1}$$

но мы имѣемъ также по (5) § 77:

$$s-e_j=\frac{(e_i-e_j)(e_k-e_j)}{s'-e_j}, \tag{2}$$

сличая оба эти равенства, найдемъ

$$s'-e_j=(e_k-e_j)x^2. \tag{3}$$

Отсюда видно, что когда x будетъ пробѣгать рядъ вещественныхъ значенiй отъ 0 до 1, слѣдовательно отрѣзокъ вещественной оси отъ 0 до 1, перемѣнная $s'-e_j$ будетъ пробѣгать по § 1, по прямой линiи отъ e_j до e_k. Величину интеграла v [(6) § 122] при такомъ пути интегрированiя по x принято по примѣру Якоби обозначать чрезъ K, такъ что

$$K=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\triangle\varphi}. \tag{4}$$

Теперь, изъ (2) § 122 имѣемъ:

$$\sqrt{e_i-e_j}\,du=dv, \tag{5}$$

а по (6) § 77 и (5) § 122 это можно такъ представить:

$$-\sqrt{e_i-e_j}\frac{ds'}{\sqrt{S'}}=\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}; \tag{6}$$

интегрируя по x отъ 0 до 1, слѣдовательно по s' отъ e_j до e_k, будемъ имѣть:

$$\sqrt{e_i-e_j}\int_{e_k}^{e_j}\frac{ds'}{\sqrt{S'}}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}; \tag{7}$$

интегралъ лѣвой части здѣсь $=\omega_k-\omega_j$, правая же $=K$ по (4); слѣдовательно получаемъ:

$$\sqrt{e_i-e_j}(\omega_k-\omega_j)=K. \tag{8}$$

Если въ (3) будемъ измѣнять x такъ, чтобы его значенія представляли бы послѣдовательно всѣ точки прямой отъ 1 до $\frac{1}{k}$, то s' будетъ пробѣгать всѣ значенія, отвѣчающія точкамъ прямой отъ e_k до e_i, [такъ какъ при $x = \frac{1}{k}$ по (4) § 122 будетъ:

$$s' - e_j = (e_k - e_j)\frac{e_i - e_j}{e_k - e_j} = e_i - e_j],$$

слѣдовательно интегрируя (6) настоящаго § по x отъ 1 до $\frac{1}{k}$ и слѣдовательно по s' отъ e_k до e_i, будемъ имѣть:

$$-\sqrt{e_i - e_j}\int_{e_k}^{e_i}\frac{ds'}{\sqrt{S'}} = \int_1^{\frac{1}{k}}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}. \tag{9}$$

Здѣсь интегралъ лѣвой части $= \omega_k - \omega_i$; интегралъ же правой такъ преобразуется:

$$\int_1^{\frac{1}{k}}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{1}{i}\int_1^{\frac{1}{k}}\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}, \tag{10}$$

гдѣ $i = \sqrt{-1}$; полагая здѣсь:

$$x = \frac{1}{\sqrt{1-k'^2y^2}}, \tag{11}$$

вслѣдствіе чего предѣламъ x: 1 и $\frac{1}{k}$, будутъ отвѣчать такіе предѣлы y: 0 и 1, мы легко найдемъ:

$$\int_1^{\frac{1}{k}}\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}} = \int_0^1\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k'^2y^2)}} = K'; \tag{12}$$

потому будетъ

$$\int_1^{\frac{1}{k}}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = -iK'; \tag{13}$$

на основаніи этого изъ (9) получимъ:

$$\sqrt{e_i - e_j}(\omega_k - \omega_i) = K'i. \tag{14}$$

Кромѣ соотношеній (8) и (14) между ω_i, ω_j и ω_k и величинами K и $K'i$ мы имѣемъ еще соотношеніе между величинами ω_i, ω_j и ω_k, въ силу котораго одна изъ этихъ величинъ есть сумма двухъ прочихъ. Если предположимъ, что

$$\omega_k = \omega_i + \omega_j, \tag{15}$$

то изъ (8) и (14) будемъ имѣть:

$$\sqrt{e_i - e_j}\,\omega_i = K, \tag{16}$$

$$\sqrt{e_i - e_j}\,\omega_j = K'i; \tag{17}$$

отсюда, складывая найдемъ еще по (15):

$$\sqrt{e_i - e_j}\,\omega_k = K + K'i. \tag{18}$$

128. Мы видѣли въ § 116, что функція $\dfrac{\Theta(u)}{\Theta_j(u)}$ имѣемъ два періода: $2\omega_j$ и $4\omega_k$, или $4\omega_i$ и $2\omega_j$; отсюда по (6) § 124 для функціи $\operatorname{sinam}(v, k)$ слѣдуютъ на основаніи (16) и (17) пред. § такіе періоды:

$$4K \quad \text{и} \quad 2K'i, \tag{1}$$

такъ что, слѣдовательно

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sinam}(v + 4K, k) &= \operatorname{sinam}(v, k); \\ \operatorname{sinam}(v + 2K'i, k) &= \operatorname{sinam}(v, k). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Замѣтимъ еще, что изъ (1) § 116 будетъ слѣдовать по (16) пред. § такое:

$$\operatorname{sinam}(v + 2K, k) = -\operatorname{sinam}(v, k). \tag{3}$$

Для функціи $\dfrac{\Theta_i(u)}{\Theta_j(u)}$ періоды будутъ по тому же § 116, переставливая только значки k и j между собою:

$$4\omega_i \quad \text{и} \quad 2\omega_k;$$

отсюда по (6) § 124 на основанiи (16) и (16) пред. § будутъ перiодами функцiи cosam (v, k) такiя величины:

$$4K \quad \text{и} \quad 2K + 2K'i, \tag{4}$$

такъ что слѣдовательно будетъ:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{cosam}(v + 4K, k) &= \operatorname{cosam}(v, k); \\ \operatorname{cosam}(v + 2K + 2K'i, k) &= \operatorname{cosam}(v, k). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

По (5) § 116 послѣ перестановки k и j будетъ еще слѣдовать такое:

$$\operatorname{cosam}(v + 2K, k) = -\operatorname{cosam}(v, k), \tag{6}$$

и на основанiи этого и (5):

$$\operatorname{cosam}(v + 2K'i, k) = -\operatorname{cosam}(v, k). \tag{7}$$

Для функцiи $\frac{\Theta_k(u)}{\Theta_j(u)}$ изъ (5) и (6) § 116 чрезъ круговую перестановку значковъ (i, k, j) получимъ:

$$\frac{\Theta_k(u \pm 2\omega_k)}{\Theta_j(u \pm 2\omega_k)} = -\frac{\Theta_k(u)}{\Theta_j(u)}; \tag{8}$$

$$\frac{\Theta_k(u \pm 2\omega_i)}{\Theta_j(u \pm 2\omega_i)} = +\frac{\Theta_k(u)}{\Theta_j(u)}; \tag{9}$$

откуда слѣдуетъ, что перiодами этой функцiи будутъ величины:

$$4\omega_k \quad \text{и} \quad 2\omega_i;$$

слѣдовательно по (6) § 124 на основанiи (16) и (18) § 127 перiодами функцiи $\triangle \operatorname{am}(v, k)$ будутъ величины:

$$4K + 4K'i \quad \text{и} \quad 2K; \tag{10}$$

вмѣсто перваго можно взять ихъ линейную комбинацiю:

$$4K + 4K'i - 2.2K = 4K'i. \tag{11}$$

Такимъ образомъ будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} \triangle \operatorname{am}(v + 2K, k) &= \triangle \operatorname{am}(v, k); \\ \triangle \operatorname{am}(v + 4K'i, k) &= \triangle \operatorname{am}(v, k). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

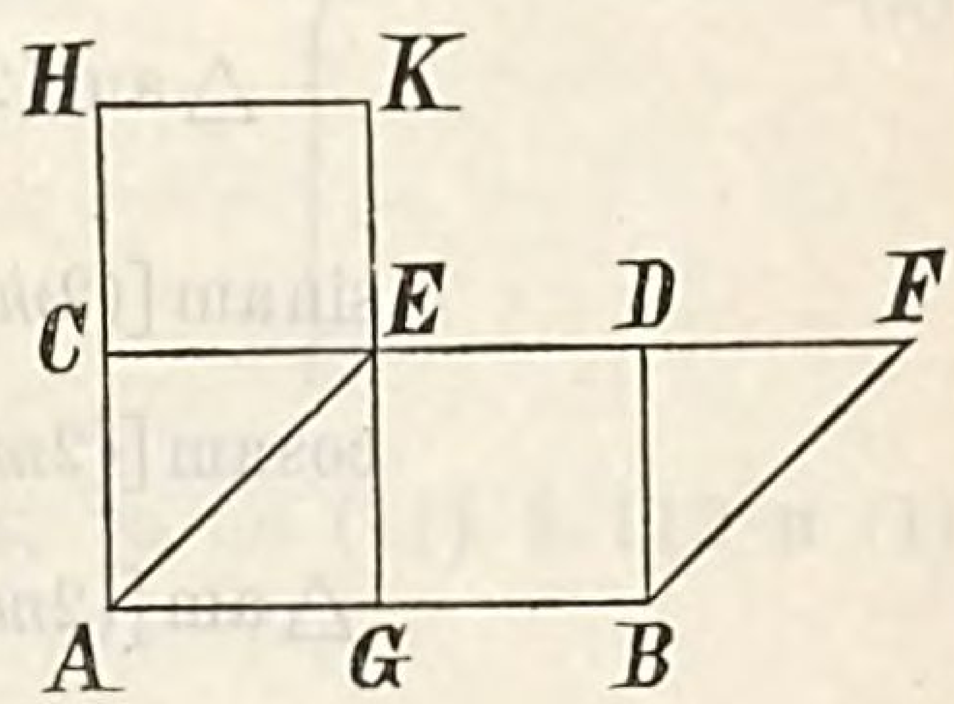
Изъ (5) § 116 послѣ круговой перестановки значковъ (ikj) будетъ слѣдовать по (17) § 127:

$$\triangle \operatorname{am}(v + 2K'i, k) = -\triangle \operatorname{am}(v, k). \tag{13}$$

Чрезъ повторное примѣненіе формулъ (3), второй изъ (2), (6) и (7), первой изъ (12) и (13), мы придемъ къ слѣдующимъ болѣе общимъ формуламъ:

$$\left.\begin{aligned} \sin\operatorname{am}(v + 2mK + 2nK'i) &= (-1)^m \sin\operatorname{am} v; \\ \cos\operatorname{am}(v + 2mK + 2nK'i) &= (-1)^{m+n} \cos\operatorname{am} v; \\ \triangle \operatorname{am}(v + 2mK + 2nK'i) &= (-1)^n \triangle \operatorname{am} v. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Въ случаѣ k вещественнаго и меньшаго единицы величины K и K', опредѣляемыя соотвѣтственно формулами (4) и (12) пред. § будутъ вещественныя; въ этомъ случаѣ параллелограммъ періодовъ функціи $\sin\operatorname{am} v$ будетъ какъ то видно изъ этихъ формулъ, прямоугольникъ $ABDC$, построенный на $AB = 4K$ на вещественной оси, и $AC = 2K'$, на мнимой оси; параллелограммъ функціи $\cos\operatorname{am} v$ получимъ соединивъ точку 0 (A) съ точкою $2K + K'i (E)$, что лежитъ на срединѣ CD, и построивъ параллелограммъ $ABFE$ на $AB = 4K$ и радіусѣ-векторѣ AE этой точки E; параллелограммъ функціи $\triangle \operatorname{am} v$ будетъ опять прямоугольнымъ $AGKH$, построенный на $AG = 2K$ и $AH = 4K'$, отложенной на мнимой оси.



129. Равенства (1)—(4) § 126 на основаніи (16), (17) и (18) § 127 примутъ такой видъ:

$$\left.\begin{aligned} \sin\operatorname{am}(0, k) &= 0; \\ \cos\operatorname{am}(0, k) &= 1; \\ \triangle \operatorname{am}(0, k) &= 1; \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} \sin\operatorname{am}(K, k) &= 1; \\ \cos\operatorname{am}(K, k) &= 0; \\ \triangle \operatorname{am}(K, k) &= k'; \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}\sin\operatorname{am}(K'i,k)&=\infty^1;\\ \cos\operatorname{am}(K'i,k)&=\infty^1;\\ \Delta\operatorname{am}(K'i,k)&=\infty^1;\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

$$\left.\begin{aligned}\sin\operatorname{am}(K+K'i,k)&=\frac{1}{k};\\ \cos\operatorname{am}(K+K'i,k)&=-i\frac{k'}{k};\\ \Delta\operatorname{am}(K+K'i,k)&=0.\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

Полагая по очереди $v=0$, K, $K'i$, $K+K'i$ въ формулахъ (14) пред. § получимъ слѣдующія, болѣе общія формулы этого же рода:

$$\left.\begin{aligned}\sin\operatorname{am}(2mK+2nK'i)&=0;\\ \cos\operatorname{am}(2mK+2nK'i)&=(-1)^{m+n};\\ \Delta\operatorname{am}(2mK+2nK'i)&=(-1)^{n};\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

$$\left.\begin{aligned}\sin\operatorname{am}[(2m+1)K+2nK'i]&=(-1)^{m};\\ \cos\operatorname{am}[(2m+1)K+2nK'i]&=0;\\ \Delta\operatorname{am}[(2m+1)K+2nK'i]&=(-1)^{n}k';\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

$$\left.\begin{aligned}\sin\operatorname{am}[2mK+(2n+1)K'i]&=\infty^1;\\ \cos\operatorname{am}[2mK+(2n+1)K'i]&=\infty^1;\\ \Delta\operatorname{am}[2mK+(2n+1)K'i]&=\infty^1;\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

$$\left.\begin{aligned}\sin\operatorname{am}[(2m+1)K+(2n+1)K'i]&=(-1)^{m}\frac{1}{k};\\ \cos\operatorname{am}[(2m+1)K+(2n+1)K'i]&=(-1)^{m+n+1}\frac{k'}{k}i;\\ \Delta\operatorname{am}[(2m+1)K+(2n+1)K'i]&=0.\end{aligned}\right\}\qquad(8)$$

130. При измѣненіи v на K, $K'i$ и $K+K'i$ функціи амплитуды переходятъ однѣ въ другія по формуламъ, которыя легко могутъ быть получены изъ формулъ § 113 на основаніи (5) § 124. Изъ этихъ по-

слѣднихъ формулъ, вводя въ нихъ аргументъ v по (2) § 122, мы получаемъ:

$$\left.\begin{aligned} \sin\mathrm{am}\, v &= \sqrt{e_i - e_j}\,\frac{\Theta(u)}{\Theta_j(u)}; \\ \cos\mathrm{am}\, v &= \frac{\Theta_i(u)}{\Theta_j(u)}; \\ \triangle\mathrm{am}\, v &= \frac{\Theta_k(u)}{\Theta_j(u)}; \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

перемѣняя здѣсь u на $u \pm \omega_i$, мы измѣнимъ по (16) § 127 v на $v \pm K$, и будемъ имѣть такія равенства:

$$\left.\begin{aligned} \sin\mathrm{am}\,(v \pm K) &= \sqrt{e_i - e_j}\,\frac{\Theta(u \pm \omega_i)}{\Theta_j(u \pm \omega_i)}; \\ \cos\mathrm{am}\,(v \pm K) &= \frac{\Theta_i(u \pm \omega_i)}{\Theta_j(u \pm \omega_i)}; \\ \triangle\mathrm{am}\,(v \pm K) &= \frac{\Theta_k(u \pm \omega_i)}{\Theta_i(u \pm \omega_i)}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Что касается первой изъ этихъ формулъ, то по (11) § 113 и (1) настоящаго мы получаемъ изъ нея:

$$\sin\mathrm{am}\,(v \pm K) = \pm\,\frac{\Theta_i(u)}{\Theta_k(u)} = \pm\,\frac{\cos\mathrm{am}\, v}{\triangle\mathrm{am}\, v}. \tag{3}$$

Для второй изъ (2) замѣтимъ, что

$$\frac{\Theta_i(u \pm \omega_i)}{\Theta_j(u \pm \omega_i)} = \frac{\Theta_i(u \pm \omega_i)}{\Theta_k(u \pm \omega_i)} \cdot \frac{\Theta_k(u \pm \omega_i)}{\Theta_j(u \pm \omega_i)}; \tag{4}$$

но по первому изъ (12) § 113 и затѣмъ по первому изъ (1) настоящаго § имѣемъ:

$$\frac{\Theta_i(u \pm \omega_i)}{\Theta_k(u \pm \omega_i)} = \mp \sqrt{e_i - e_j}\,\frac{\Theta(u)}{\Theta_j(u)} = \mp \sin\mathrm{am}\, v; \tag{5}$$

а по второму изъ (11) § 113 послѣ перестановки значковъ i и j, и затѣмъ по послѣднему изъ (1) настоящаго §, имѣя въ виду при этомъ также (7) § 124, будетъ

$$\frac{\Theta_j(u \pm \omega_i)}{\Theta_k(u \pm \omega_i)} = \frac{\sqrt{e_i - e_j}}{\sqrt{e_i - e_k}} \cdot \frac{\Theta_k(u)}{\Theta_j(u)} = \frac{1}{k'} \triangle \operatorname{am} v; \tag{6}$$

вносясь изъ (5) и (6) въ (4), получимъ:

$$\frac{\Theta_i(u \pm \omega_i)}{\Theta_j(u \pm \omega_i)} = \mp k' \frac{\sin \operatorname{am} v}{\triangle \operatorname{am} v}; \tag{7}$$

вносясь это во второе изъ (2), будемъ имѣть:

$$\cos \operatorname{am}(v \pm K) = \mp k' \frac{\sin \operatorname{am} v}{\triangle \operatorname{am} v}. \tag{8}$$

Наконецъ третье изъ (2) по (6) настоящаго § переходитъ въ такое:

$$\triangle \operatorname{am}(v \pm K) = \frac{k'}{\triangle \operatorname{am} v}. \tag{9}$$

Затѣмъ перемѣняя въ (1) настоящаго § u на $u \pm \omega_j$, мы будемъ имѣть по (17) § 127 слѣдующія формулы:

$$\left.\begin{aligned} \sin \operatorname{am}(v \pm K'i) &= \sqrt{e_i - e_j}\, \frac{\Theta(u \pm \omega_j)}{\Theta_j(u \pm \omega_j)}; \\ \cos \operatorname{am}(v \pm K'i) &= \frac{\Theta_i(u \pm \omega_j)}{\Theta_j(u \pm \omega_j)}; \\ \triangle \operatorname{am}(v \pm K'i) &= \frac{\Theta_k(u \pm \omega_j)}{\Theta_j(u \pm \omega_j)}; \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

но по второй формулѣ изъ (11) § 113 имѣемъ:

$$\frac{\Theta(u \pm \omega_j)}{\Theta_j(u \pm \omega_j)} = -\frac{1}{\sqrt{e_j - e_k} \cdot \sqrt{e_j - e_i}} \cdot \frac{\Theta_j(u)}{\Theta(u)}, \tag{11}$$

а это можно по (14) § 104 и затѣмъ (1) настоящ. § такъ представить:

$$\frac{\Theta(u \pm \omega_j)}{\Theta_j(u \pm \omega_j)} = \frac{1}{\sqrt{e_k - e_j} \cdot \sqrt{e_i - e_j}} \cdot \frac{\Theta_j(u)}{\Theta(u)} = \frac{1}{\sqrt{e_k - e_j}} \cdot \frac{1}{\sin \operatorname{am} v}; \tag{12}$$

вносясь это въ первое изъ (1) настоящ. § по (4) § 122 получимъ:

$$\sin \operatorname{am}(v \pm K'i) = \frac{1}{k \sin \operatorname{am} v}. \tag{13}$$

Переходя ко второй изъ (10), замѣтимъ, что

$$\frac{\Theta_i(u \pm \omega_j)}{\Theta_j(u \pm \omega_j)} = \frac{\Theta_i(u \pm \omega_j)}{\Theta_k(u \pm \omega_j)} \cdot \frac{\Theta_k(u \pm \omega_j)}{\Theta_j(u \pm \omega_j)}; \tag{14}$$

но по второму изъ (12) § 113:

$$\frac{\Theta_i(u \pm \omega_j)}{\Theta_k(u \pm \omega_j)} = \frac{\sqrt{e_j - e_i}}{\sqrt{e_j - e_k}} \cdot \frac{\Theta_k(u)}{\Theta_i(u)}; \tag{15}$$

а изъ перваго, послѣ перестановки значковъ i и j:

$$\frac{\Theta_j(u \pm \omega_j)}{\Theta_k(u \pm \omega_j)} = \mp \sqrt{e_j - e_i} \cdot \frac{\Theta(u)}{\Theta_i(u)}; \tag{16}$$

внося изъ (15) и (16) въ (14), будемъ имѣть по (4) § 104 и (4) § 122:

$$\frac{\Theta_i(u \pm \omega_j)}{\Theta_j(u \pm \omega_j)} = \mp \frac{1}{\sqrt{e_k - e_j}} \cdot \frac{\Theta_k(u)}{\Theta(u)}, \tag{17}$$

или

$$\frac{\Theta_i(u \pm \omega_j)}{\Theta_j(u \pm \omega_j)} = \mp i \frac{\sqrt{e_i - e_j}}{\sqrt{e_k - e_j}} \cdot \frac{\Theta_k(u)}{\Theta_j(u)} : \sqrt{e_i - e_j} \frac{\Theta(u)}{\Theta_j(u)}; \tag{18}$$

а это по (4) § 122 и (1) настоящаго § такъ перепишется:

$$\frac{\Theta_i(u \pm \omega_j)}{\Theta_j(u \pm \omega_j)} = \mp \frac{1}{k} \cdot \frac{\triangle \operatorname{am} v}{\sin \operatorname{am} v}; \tag{19}$$

внося это во второе изъ (10), получимъ:

$$\cos \operatorname{am}(v \pm K'i) = \mp \frac{i}{k} \cdot \frac{\triangle \operatorname{am} v}{\sin \operatorname{am} v}. \tag{20}$$

Послѣднее изъ (10) преобразуется при помощи (16) настоящ. §, которому можно дать такой видъ:

$$\frac{\Theta_k(u \pm \omega_j)}{\Theta_j(u \pm \omega_j)} = \mp \frac{i}{\sqrt{e_i - e_j}} \frac{\Theta_i(u)}{\Theta_j(u)} = \mp i \frac{\Theta_i(u)}{\Theta_j(u)} : \sqrt{e_i - e_j} \cdot \frac{\Theta(u)}{\Theta_j(u)} =$$

$$= \mp i \frac{\cos \operatorname{am} v}{\sin \operatorname{am} v},$$

— по (1) настоящаго §; внося это въ третье изъ (10) будемъ имѣть:

$$\triangle \operatorname{am}(v \pm K'i) = \mp i \frac{\cos \operatorname{am} v}{\sin \operatorname{am} v}. \tag{21}$$

Наконецъ, перемѣняя въ (1) настоящаго § u на $u \pm \omega_k$, мы измѣнимъ v на $v \pm (K + K'i)$ и получимъ такія равенства:

$$\left.\begin{aligned} \sin \operatorname{am}[v \pm (K + K'i)] &= \sqrt{e_i - e_j} \frac{\Theta(u \pm \omega_k)}{\Theta_j(u \pm \omega_k)}; \\ \cos \operatorname{am}[v \pm (K + K'i)] &= \frac{\Theta_i(u \pm \omega_k)}{\Theta_j(u \pm \omega_k)}; \\ \triangle \operatorname{am}[v \pm (K + K'i)] &= \frac{\Theta_k(u \pm \omega_k)}{\Theta_j(u \pm \omega_k)}; \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

но по третьему изъ (11) § 113 имѣемъ:

$$\frac{\Theta(u \mp \omega_k)}{\Theta_j(u \pm \omega_k)} = \pm \frac{1}{\sqrt{e_k - e_j}} \frac{\Theta_k(u)}{\Theta_i(u)} = \pm \frac{1}{\sqrt{e_k - e_j}} \cdot \frac{\Theta_k(u)}{\Theta_j(u)} : \frac{\Theta_i(u)}{\Theta_j(u)}; \tag{23}$$

внося это въ первое изъ (21) по (1) настоящаго § и (4) § 122 будемъ имѣть:

$$\sin \operatorname{am}[v \pm (K + K'i)] = \pm \frac{1}{k} \frac{\triangle \operatorname{am} v}{\cos \operatorname{am} v}. \tag{24}$$

Далѣе

$$\frac{\Theta_i(u \pm \omega_k)}{\Theta_j(u \pm \omega_k)} = \frac{\Theta_i(u \pm \omega_k)}{\Theta_k(u \pm \omega_k)} \cdot \frac{\Theta_k(u \pm \omega_k)}{\Theta_j(u \pm \omega_k)}; \tag{25}$$

но по третьему изъ (12) § 113:

$$\frac{\Theta_i(u \pm \omega_k)}{\Theta_k(u \pm \omega_k)} = \mp \frac{1}{\sqrt{e_k - e_j}} \cdot \frac{\Theta_j(u)}{\Theta(u)}; \tag{26}$$

по нему же послѣ перестановки значковъ i и j:

$$\frac{\Theta_j(u \pm \omega_k)}{\Theta_k(u \pm \omega_k)} = \mp \frac{1}{\sqrt{e_k - e_i}} \cdot \frac{\Theta_i(u)}{\Theta(u)}; \tag{27}$$

внося изъ (26) и (27) въ (25), получимъ, помножая на $-i.i=+1$, и имѣя въ виду, что изъ (4) § 122 и (7) § 123 слѣдуетъ, что

$$\frac{\sqrt{e_i-e_k}}{\sqrt{e_k-e_j}}=\frac{k'}{k}, \tag{28}$$

слѣдующее:

$$\frac{\Theta_i(u\pm\omega_k)}{\Theta_j(u\pm\omega_k)}=-i\frac{\sqrt{e_i-e_k}}{\sqrt{e_k-e_j}}\cdot\frac{\Theta_j(u)}{\Theta_i(u)}=-i\frac{k'}{k}\cdot\frac{1}{\operatorname{cosam} v}, \tag{29}$$

— по (1) настоящаго §; внося это во второе изъ (22), будемъ имѣть:

$$\operatorname{cosam}[v\pm(K+K'i)]=-i\frac{k'}{k}\cdot\frac{1}{\operatorname{cosam} v}. \tag{30}$$

Равенство (27) можно еще такъ представить по (7) § 123:

$$\frac{\Theta_j(u\pm\omega_k)}{\Theta_k(u\pm\omega_k)}=\mp\frac{\sqrt{e_i-e_j}}{\sqrt{e_k-e_i}}\cdot\frac{\Theta_i(u)}{\Theta_j(u)}:\sqrt{e_i-e_j}\frac{\Theta(u)}{\Theta_j(u)}=\mp\frac{1}{-ik'}\frac{\operatorname{cosam} v}{\operatorname{sinam} v}, \tag{30}$$

(ибо $\sqrt{e_k-e_i}=-i.i\sqrt{e_k-e_i}=-i\sqrt{e_i-e_k}$;) — по (1) настоящаго § и (4) § 122; внося это въ третье изъ (22), будемъ имѣть:

$$\triangle\operatorname{am}[v\pm(K+K'i)]=\pm ik'\frac{\operatorname{sinam} v}{\operatorname{cosam} v}. \tag{32}$$

131. Для удобства справокъ мы еще разъ выписываемъ здѣсь въ системѣ всѣ выведенныя въ пред. § формулы, показывающія переходъ однихъ функцій амплитуды въ другія при измѣненіи аргумента на K, $K'i$ и $K+K'i$:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sinam}(v\pm K)&=\pm\frac{\operatorname{cosam} v}{\triangle\operatorname{am} v};\\ \operatorname{cosam}(v\pm K)&=\mp k'\frac{\operatorname{sinam} v}{\triangle\operatorname{am} v};\\ \triangle\operatorname{am}(v\pm K)&=\frac{k'}{\triangle\operatorname{am} v}.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned}
\sin\mathrm{am}(v\pm K'i)&=\frac{1}{k\sin\mathrm{am}\,v};\\
\cos\mathrm{am}(v\pm K'i)&=\mp\frac{i}{k}\frac{\triangle\,\mathrm{am}\,v}{\sin\mathrm{am}\,v};\\
\triangle\,\mathrm{am}(v\pm K'i)&=\mp i\frac{\cos\mathrm{am}\,v}{\sin\mathrm{am}\,v}.
\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

$$\left.\begin{aligned}
\sin\mathrm{am}[v\pm(K+K'i)]&=\pm\frac{1}{k}\frac{\triangle\,\mathrm{am}\,v}{\cos\mathrm{am}\,v};\\
\cos\mathrm{am}[v\pm(K+K'i)]&=-i\frac{k'}{k}\frac{1}{\cos\mathrm{am}\,v};\\
\triangle\,\mathrm{am}[v\pm(K+K'i)]&=\pm ik'\frac{\sin\mathrm{am}\,v}{\cos\mathrm{am}\,v}.
\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

Если теперь въ формулахъ (14) § 128 перемѣнимъ v по очереди на $v+K$, $v+K'i$, $v+K+K'i$, то на основанiи этихъ формулъ получимъ слѣдующiя, которыя могутъ быть разсматриваемы какъ обобщенiе послѣднихъ:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\mathrm{am}[v+(2m+1)K+2nK'i]&=(-1)^m\frac{\cos\mathrm{am}\,v}{\triangle\,\mathrm{am}\,v};\\
\cos\mathrm{am}[v+(2m+1)K+2nK'i]&=(-1)^{m+n+1}k'\frac{\sin\mathrm{am}\,v}{\triangle\,\mathrm{am}\,v};\\
\triangle\,\mathrm{am}[v+(2m+1)K+2nK'i]&=(-1)^n\frac{k'}{\triangle\,\mathrm{am}\,v}.
\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

$$\left.\begin{aligned}
\sin\mathrm{am}[v+2mK+(2n+1)K'i]&=(-1)^m\frac{1}{k\sin\mathrm{am}\,v};\\
\cos\mathrm{am}[v+2mK+(2n+1)K'i]&=(-1)^{m+n+1}\frac{i}{k}\frac{\triangle\,\mathrm{am}\,v}{\sin\mathrm{am}\,v};\\
\triangle\,\mathrm{am}[v+2mK+(2n+1)K'i]&=(-1)^{n+1}i\frac{\cos\mathrm{am}\,v}{\sin\mathrm{am}\,v}.
\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

$$\left.\begin{aligned}
\sin\mathrm{am}\,[v+(2m+1)K+(2n+1)K'i] &= (-1)^m \frac{1}{k}\frac{\Delta\mathrm{am}\,v}{\cos\mathrm{am}\,v};\\
\cos\mathrm{am}\,[v+(2m+1)K+(2n+1)K'i] &= (-1)^{m+n+1}\, i\frac{k'}{k}\frac{1}{\cos\mathrm{am}\,v};\\
\Delta\mathrm{am}\,[v+(2m+1)K+(2n+1)K'i] &= (-1)^n\, ik'\frac{\sin\mathrm{am}\,v}{\cos\mathrm{am}\,v}.
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Эти формулы дополняютъ систему формулъ (14) § 128 въ томъ смыслѣ, что здѣсь одинъ или оба изъ коэффиціентовъ при K и $K'i$ нечетныя, тогда какъ тамъ оба они были четныя. — Полагая въ (14) § 128 и въ (1) — (6) настоящаго § $v=0$, получимъ систему формулъ (6)—(9) § 129.

132. Формулы сложенія для функцій амплитуды легко получаются изъ формулъ § 60. Примѣняя формулу (19) этого § 60 къ случаю, когда въ $4R(x)$ введена перемѣнная s по формулѣ (2) § 61, мы будемъ имѣть по обозначеніямъ § 61 слѣдующее:

$$\frac{(s_1-e_j)\sqrt{S_2}+(s_2-e_j)\sqrt{S_1}}{(e_j-e_i)(e_j-e_k)-(s_1-e_j)(s_2-e_j)} = \frac{2\sqrt{s_1-e_j}\sqrt{s_2-e_j}\sqrt{\overset{+}{s_2}-e_j}}{\sqrt{(e_j-e_i)(e_j-e_k)}}, \quad (1)$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned}
S_1 &= 4(s_1-e_i)(s_1-e_j)(s_1-e_k);\\
S_2 &= 4(s_2-e_i)(s_2-e_j)(s_2-e_k);
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

равенство же (16) того же § 60, по внесеніи въ него вмѣсто C_1 его значенія изъ (18) того же § и введеніи перемѣнной x обратится въ такое:

$$\int_{e_j}^{s_1}\frac{ds_1}{\sqrt{S_1}}+\int_{e_j}^{s_2}\frac{ds_2}{\sqrt{S_2}}=\int_{e_j}^{\overset{+}{s_2}}\frac{ds_2}{\sqrt{S_2}}; \quad (3)$$

вычтя его почленно изъ тождества:

$$\int_{e_j}^{\infty}\frac{ds_1}{\sqrt{S_1}}+\int_{e_j}^{\infty}\frac{ds_2}{\sqrt{S_2}}=\int_{e_j}^{\infty}\frac{ds_1}{\sqrt{S_1}}+\int_{e_j}^{\infty}\frac{ds_2}{\sqrt{S_2}},$$

мы получимъ также равенство:

$$\int_{s_1}^{\infty}\frac{ds_1}{\sqrt{S_1}}+\int_{s_2}^{\infty}\frac{ds_2}{\sqrt{S_2}}=\omega_j+\int_{\overset{+}{s}_2}^{\infty}\frac{d\overset{+}{s}_2}{\sqrt{\overset{+}{S}_2}};\tag{4}$$

если положимъ

$$\int_{s_1}^{\infty}\frac{ds_1}{\sqrt{S_1}}=u_1;\quad \int_{s_2}^{\infty}\frac{ds_2}{\sqrt{S_2}}=u_2;\quad \int_{\overset{+}{s}_2}^{\infty}\frac{d\overset{+}{s}_2}{\sqrt{\overset{+}{S}_2}}=w,\tag{5}$$

то (4) приметъ такой видъ:

$$u_1+u_2=\omega_j+w;\tag{6}$$

отсюда получимъ:

$$w=u_1+u_2-\omega_j,\tag{7}$$

а изъ (5) будетъ слѣдовать:

$$s_1=\wp(u_1);\quad s_2=\wp(u_2);\quad \overset{+}{s}_2=\wp(w)=\wp(u_1+u_2-\omega_j).\tag{8}$$

Дѣля теперь обѣ части равенства (1) на $2\sqrt{(s_1-e_j)(s_2-e_j)}$, умножая на $-\sqrt{e_i-e_j}$, сокращая налѣво на $-(s_1-e_j)(s_2-e_j)$, а для правой части имѣя въ виду, что

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{(e_j-e_i)(e_j-e_k)}&=\sqrt{e_j-e_k}\cdot\sqrt{e_j-e_k}=\sqrt{-(e_i-e_j)}\sqrt{-(e_k-e_j)}=\\&=(\sqrt{-1})^2\sqrt{e_i-e_j}\sqrt{e_k-e_j}=-\sqrt{e_i-e_j}\sqrt{e_k-e_j},\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

мы получимъ слѣдующее равенство:

$$\frac{\sqrt{\frac{e_i-e_j}{s_1-e_j}}\sqrt{\frac{s_2-e_i}{s_2-e_j}}\sqrt{\frac{s_2-e_k}{s_2-e_j}}+\sqrt{\frac{e_i-e_j}{s_2-e_j}}\sqrt{\frac{s_1-e_i}{s_1-e_j}}\sqrt{\frac{s_1-e_k}{s_1-e_j}}}{1-\frac{e_k-e_j}{e_i-e_j}\cdot\frac{e_i-e_j}{s_1-e_j}\cdot\frac{e_i-e_j}{s_2-e_j}}=\frac{\sqrt{\overset{+}{s}_2-e_j}}{\sqrt{e_k-e_j}}\tag{10}$$

но по формуламъ (1) § 125, полагая, какъ раньше дѣлали:

$$\sqrt{e_i-e_j}\,u=v,\tag{11}$$

и имѣя въ виду еще при этомъ (4) § 104, мы можемъ это равенство (9) такъ представить:

$$\frac{\sin\mathrm{am}\,v_1\cos\mathrm{am}\,v_2\,\Delta\,\mathrm{am}\,v_2+\sin\mathrm{am}\,v_2\cos\mathrm{am}\,v_1\,\Delta\,\mathrm{am}\,v_1}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,v_1\sin^2\mathrm{am}\,v_2}=\frac{1}{k\sin\mathrm{am}\,\overline{w}},\quad(12)$$

гдѣ

$$\overline{w}=\sqrt{e_i-e_j}\,w=\sqrt{e_i-e_j}\,(u_1+u_2-\omega_j)=v_1+v_2-K'i,\qquad(13)$$

(см. 17 § 127); по (2) же пред. § будетъ:

$$\frac{1}{k\sin\mathrm{am}\,\overline{w}}=\frac{1}{k\sin\mathrm{am}\,(v_1+v_2-K'i)}=\sin\mathrm{am}\,(v_1+v_2);\qquad(14)$$

внося это въ (12), получимъ искомую формулу, выражающую теорему сложенія функціи $\sin\mathrm{am}\,v$:

$$\sin\mathrm{am}\,(v_1+v_2)=\frac{\sin\mathrm{am}\,v_1\cos\mathrm{am}\,v_2\,\Delta\,\mathrm{am}\,v_2+\sin\mathrm{am}\,v_2\cos\mathrm{am}\,v_1\,\Delta\,\mathrm{am}\,v_1}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,v_1\sin^2\mathrm{am}\,v_2}.\ (15)$$

Перемѣняя здѣсь v_2 на $-v_2$ и имѣя въ виду нечетность функціи $\sin\mathrm{am}\,v$ и четность функцій $\cos\mathrm{am}\,v$ и $\Delta\,\mathrm{am}\,v$, [слѣдующія изъ (6) § 124], мы получимъ формулу для выраженія sinam разности v_1-v_2 чрезъ функціи амплитудъ v_1 и v_2; именно:

$$\sin\mathrm{am}\,(v_1-v_2)=\frac{\sin\mathrm{am}\,v_1\cos\mathrm{am}\,v_2\,\Delta\,\mathrm{am}\,v_2-\sin\mathrm{am}\,v_2\cos\mathrm{am}\,v_1\,\Delta\,\mathrm{am}\,v_1}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,v_1\sin^2\mathrm{am}\,v_2}.\ (16)$$

Обѣ формулы вмѣстѣ напишутся короче при помощи Гудермановскаго обозначенія такимъ образомъ:

$$\mathrm{sn}\,(v_1\pm v_2)=\frac{\mathrm{sn}\,v_1\,\mathrm{cn}\,v_2\,\mathrm{dn}\,v_2\pm\mathrm{sn}\,v_2\,\mathrm{cn}\,v_1\,\mathrm{dn}\,v_1}{1-k^2\mathrm{sn}^2v_1\,\mathrm{sn}^2v_2}.\qquad(17)$$

гдѣ принято

$$\left.\begin{aligned}\sin\mathrm{am}&\equiv\mathrm{sn}\\ \cos\mathrm{am}&\equiv\mathrm{cn}\\ \Delta\,\mathrm{am}&\equiv\mathrm{dn}\end{aligned}\right\}\qquad(18)$$

133. Изъ этихъ формулъ выводится цѣлый рядъ другихъ формулъ, найденныхъ Якоби. Прежде всего при помощи (14) и (15) § 122 можно вывести отсюда формулы выражающія теорему сложенія для $\cos\mathrm{am}\,v$ и $\Delta\,\mathrm{am}\,v$:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{cn}(v_1 \pm v_2) = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2(v_1 \mp v_2)} = \frac{1}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2} \times \\ \times \Big\{ 1 - 2k^2 \operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2 + k^4 \operatorname{sn}^4 v_1 \operatorname{sn}^4 v_2 - \operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{cn}^2 v_2 \operatorname{dn}^2 v_2 - \\ - \operatorname{sn}^2 v_2 \operatorname{cn}^2 v_1 \operatorname{dn}^2 v_1 \mp 2 \operatorname{sn} v_1 \operatorname{cn} v_1 \operatorname{dn} v_1 \operatorname{sn} v_2 \operatorname{cn} v_2 \operatorname{dn} v_2 \Big\}^{\frac{1}{2}}; \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

оставивъ пока въ сторонѣ послѣднiй членъ, съ двойнымъ знакомъ, остальные можно такъ представить, выразивъ сперва прочiя функцiи амплитуды чрезъ sin am:

$$\begin{aligned} &1 - 2k^2 \operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2 + k^4 \operatorname{sn}^4 v_1 \operatorname{sn}^4 v_2 - \\ &- \operatorname{sn}^2 v_1 [1 - (1 + k^2) \operatorname{sn}^2 v_2 + k^4 \operatorname{sn}^4 v_2] - \\ &- \operatorname{sn}^2 v_2 [1 - (1 + k^2) \operatorname{sn}^2 v_1 + k^4 \operatorname{sn}^4 v_1] = \\ &= 1 - \operatorname{sn}^2 v_1 - \operatorname{sn}^2 v_2 + \operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2 + \\ &+ \operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2 [1 - k^2 \operatorname{sn}^2 v_1 - k^2 \operatorname{sn} v_2 + k^4 \operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2] = \\ &= (1 - \operatorname{sn}^2 v_1)(1 - \operatorname{sn}^2 v_2) + \operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2 (1 - k^2 \operatorname{sn}^2 v_1)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 v_2) = \\ &= \operatorname{cn}^2 v_1 \operatorname{cn}^2 v_2 + \operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2 \operatorname{dn}^2 v_1 \operatorname{dn}^2 v_2; \end{aligned}$$

внося правую часть этого равенства вмѣсто лѣвой въ равенство (1), мы получимъ въ скобкахъ $\{\}$ полный квадратъ:

$$\begin{aligned} &\operatorname{cn}^2 v_1 \operatorname{cn}^2 v_2 + \operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2 \operatorname{dn}^2 v_1 \operatorname{dn}^2 v_2 \mp 2 \operatorname{sn} v_1 \operatorname{sn} v_2 \operatorname{cn} v_1 \operatorname{cn} v_2 \operatorname{dn} v_1 \operatorname{dn} v_2 = \\ &= (\operatorname{cn} v_1 \operatorname{cn} v_2 \mp \operatorname{sn} v_1 \operatorname{sn} v_2 \operatorname{dn} v_1 \operatorname{dn} v_2)^2; \end{aligned}$$

извлекая корень и беря его съ $+$, ибо тогда только обѣ части имѣющаго получиться равенства будутъ обращаться въ $\operatorname{cn} v_1$ для $v_2 = 0$, мы получимъ искомую формулу сложенiя для $\operatorname{cn} v$:

$$\operatorname{cn}(v_1 \pm v_2) = \frac{\operatorname{cn} v_1 \operatorname{cn} v_2 \mp \operatorname{sn} v_1 \operatorname{cn} v_2 \operatorname{dn} v_1 \operatorname{dn} v_2}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2}. \quad (2)$$

Точно также найдемъ изъ соотношенiя

$$\operatorname{dn}(v_1 \pm v_2) = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 (v_1 \pm v_2)}$$

формулу сложенія для функціи $\operatorname{dn} v$:

$$\operatorname{dn}(v_1 \pm v_2) = \frac{\operatorname{dn} v_1 \operatorname{dn} v_2 \pm k^2 \operatorname{sn} v_1 \operatorname{sn} v_2 \operatorname{cn} v_1 \operatorname{cn} v_2}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2}. \tag{3}$$

134. Написавъ отдѣльно для верхняго и нижняго знака формулу (17) § 132, чрезъ сложеніе и вычитаніе ихъ получимъ слѣдующія двѣ формулы:

$$\operatorname{sn}(v_1 + v_2) + \operatorname{sn}(v_1 - v_2) = \frac{2 \operatorname{sn} v_1 \operatorname{cn} v_2 \operatorname{dn} v_2}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2}; \tag{1}$$

$$\operatorname{sn}(v_1 + v_2) - \operatorname{sn}(v_1 - v_2) = \frac{2 \operatorname{sn} v_2 \operatorname{cn} v_1 \operatorname{dn} v_2}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2}. \tag{2}$$

Точно также изъ (2) и (3) пред. § получимъ:

$$\operatorname{cn}(v_1 + v_2) + \operatorname{cn}(v_1 - v_2) = \frac{2 \operatorname{cn} v_1 \operatorname{cn} v_2}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2}; \tag{3}$$

$$\operatorname{cn}(v_1 + v_2) - \operatorname{cn}(v_1 - v_2) = \frac{-2 \operatorname{sn} v_1 \operatorname{sn} v_2 \operatorname{dn} v_1 \operatorname{dn} v_2}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{sn} v_2}, \tag{4}$$

$$\operatorname{dn}(v_1 + v_2) + \operatorname{dn}(v_1 - v_2) = \frac{2 \operatorname{dn} v_1 \operatorname{dn} v_2}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2}; \tag{5}$$

$$\operatorname{dn}(v_1 + v_2) - \operatorname{dn}(v_1 - v_2) = \frac{-2 k^2 \operatorname{sn} v_1 \operatorname{sn} v_2 \operatorname{cn} v_1 \operatorname{cn} v_2}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2}. \tag{6}$$

Если положить

$$\left.\begin{aligned} v_1 + v_2 &= p; \\ v_1 - v_2 &= q; \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

то эти формулы такъ перепишутся

$$\operatorname{sn} p + \operatorname{sn} q = \frac{2 \operatorname{sn} \frac{p+q}{2} \operatorname{cn} \frac{p-q}{2} \operatorname{dn} \frac{p-q}{2}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{p+q}{2} \operatorname{sn}^2 \frac{p-q}{2}}; \tag{8}$$

$$\operatorname{sn} p - \operatorname{sn} q = \frac{2 \operatorname{sn} \frac{p-q}{2} \operatorname{cn} \frac{p+q}{2} \operatorname{dn} \frac{p+q}{2}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{p+q}{2} \operatorname{sn}^2 \frac{p-q}{2}}; \tag{9}$$

$$\operatorname{cn} p + \operatorname{cn} q = \frac{2 \operatorname{cn} \frac{p+q}{2} \operatorname{cn} \frac{p-q}{2}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{p+q}{2} \operatorname{sn}^2 \frac{p-q}{2}}; \tag{10}$$

$$\operatorname{cn} p - \operatorname{cn} q = \frac{-2 \operatorname{sn} \frac{p+q}{2} \operatorname{dn} \frac{p+q}{2} \operatorname{sn} \frac{p-q}{2} \operatorname{dn} \frac{p-q}{2}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{p+q}{2} \operatorname{sn}^2 \frac{p-q}{2}}; \tag{11}$$

$$\operatorname{dn} p + \operatorname{dn} q = \frac{2 \operatorname{dn} \frac{p+q}{2} \operatorname{dn} \frac{p-q}{2}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{p+q}{2} \operatorname{sn}^2 \frac{p-q}{2}}; \tag{12}$$

$$\operatorname{dn} p - \operatorname{dn} q = \frac{-2k^2 \frac{p+q}{2} \operatorname{cn} \frac{p+q}{2} \operatorname{sn} \frac{p-q}{2} \operatorname{cn} \frac{p-q}{2}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{p+q}{2} \operatorname{sn}^2 \frac{p-q}{2}}. \tag{13}$$

135. Другой рядъ формулъ выводится изъ тѣхъ-же формулъ чрезъ перемноженіе соотвѣтственныхъ формулъ. Такъ перемножая формулы для $\operatorname{sn}(v_1 + v_2)$ и $\operatorname{sn}(v_1 - v_2)$ [17 § 132], мы получимъ:

$$\operatorname{sn}(v_1 + v_2) \operatorname{sn}(v_1 - v_2) = \frac{\operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{cn}^2 v_2 \operatorname{dn}^2 v_2 - \operatorname{sn}^2 v_2 \operatorname{cn}^2 v_1 \operatorname{dn}^2 v_1}{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2)^2}; \tag{1}$$

въ числителѣ выразимъ чрезъ sn прочія функціи амплитуды; будемъ имѣть тогда

$$\operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{cn}^2 v_2 \operatorname{dn}^2 v_2 - \operatorname{sn}^2 v_2 \operatorname{cn}^2 v_1 \operatorname{dn}^2 v_1 =$$

$$= \operatorname{sn}^2 v_1 [1 - (1 + k^2) \operatorname{sn}^2 v_2 + k^2 \operatorname{sn}^4 v_2] - \operatorname{sn}^2 v_2 [1 - (1 + k^2) \operatorname{sn}^2 v_1 + k^2 \operatorname{sn}^4 v_1] =$$

$$= (\operatorname{sn}^2 v_1 - \operatorname{sn}^2 v_2)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2);$$

внося это въ (1), по сокращеніи получимъ:

$$\operatorname{sn}(v_1 + v_2)\operatorname{sn}(v_1 - v_2) = \frac{\operatorname{sn}^2 v_1 - \operatorname{sn}^2 v_2}{1 - k^2\operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2}. \qquad (2)$$

Точно также перемножая формулы для $\operatorname{cn}(v_1 + v_2)$ и $\operatorname{cn}(v_1 - v_2)$, мы будемъ имѣть:

$$\operatorname{cn}(v_1 + v_2)\operatorname{cn}(v_1 - v_2) = \frac{\operatorname{cn}^2 v_1 \operatorname{cn}^2 v_2 - \operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2 \operatorname{dn}^2 v_1 \operatorname{dn}^2 v_2}{(1 - k^2\operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2)^2}: \qquad (3)$$

но числитель можетъ быть такъ преобразованъ:

$$\operatorname{cn}^2 v_1 (1 - k^2\operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2) + \operatorname{cn}^2 v_1 (k^2 \operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2 - \operatorname{sn}^2 v_2) -$$

$$- \operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2 \operatorname{dn}^2 v_1 \operatorname{dn}^2 v_2 =$$

$$= \operatorname{cn}^2 v_1 (1 - k^2\operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2) - \operatorname{cn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2 \operatorname{dn}^2 v_1 -$$

$$- \operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2 \operatorname{dn}^2 v_1 \operatorname{dn}^2 v_2 =$$

$$= \operatorname{cn}^2 v_1 (1 - k^2\operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2) - \operatorname{sn}^2 v_2 \operatorname{dn}^2 v_1 (\operatorname{cn}^2 v_1 + \operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{dn}^2 v_2) =$$

$$= \operatorname{cn}^2 v_1 (1 - k^2\operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2) - \operatorname{sn}^2 v_2 \operatorname{dn}^2 v_1 (1 - k^2 \operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2) =$$

$$= (1 - k^2\operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2)(\operatorname{cn}^2 v_1 - \operatorname{sn}^2 v_2 \operatorname{dn}^2 v_1);$$

внося это въ (3), послѣ сокращенія получимъ:

$$\operatorname{cn}(v_1 + v_2)\operatorname{cn}(v_1 - v_2) = \frac{\operatorname{cn}^2 v_1 - \operatorname{sn}^2 v_2 \operatorname{dn}^2 v_1}{1 - k^2\operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2}. \qquad (4)$$

Въ виду симметричности (3) относительно v_1 и v_2 должна получиться и такая формула

$$\operatorname{cn}(v_1 + v_2)\operatorname{cn}(v_1 - v_2) = \frac{\operatorname{cn}^2 v_2 - \operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{dn}^2 v_2}{1 - k^2\operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2}; \qquad (5)$$

и дѣйствительно оба числителя будутъ тождественны:

$$\operatorname{cn}^2 v_1 - \operatorname{sn}^2 v_2 \operatorname{dn}^2 v_1 = 1 - \operatorname{sn}^2 v_1 - \operatorname{sn}^2 v_2 + k^2 \operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2 =$$

$$= 1 - \operatorname{sn}^2 v_2 - \operatorname{sn}^2 v_1 (1 - k^2 \operatorname{sn}^2 v_2) =$$

$$= \operatorname{cn}^2 v_2 - \operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{dn}^2 v_2;$$

такимъ образомъ отъ числителя въ (4) мы пришли къ числителю въ (5).

*

Перемножая формулы для $\operatorname{dn}(v_1 + v_2)$ и $\operatorname{dn}(v_1 - v_2)$ мы получимъ сперва:

$$\operatorname{dn}(v_1 + v_2)\operatorname{dn}(v_1 - v_2) = \frac{\operatorname{dn}^2 v_1 \operatorname{dn}^2 v_2 - k^4 \operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{cn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2 \operatorname{cn}^2 v_2}{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2)^2}; \tag{6}$$

числитель такъ преобразуется:

$$\operatorname{dn}^2 v_1 (1 - k^2 \operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2) + \operatorname{dn}^2 v_1 (k^2 \operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2 - k^2 \operatorname{sn}^2 v_2) -$$
$$- k^4 \operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{cn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2 \operatorname{cn}^2 v_2 =$$
$$= \operatorname{dn}^2 v_1 (1 - k^2 \operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2) - k^2 \operatorname{sn}^2 v_2 \operatorname{cn}^2 v_1 \operatorname{dn}^2 v_1 -$$
$$- k^4 \operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{cn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2 \operatorname{cn}^2 v_2 =$$
$$= \operatorname{dn}^2 v_1 (1 - k^2 \operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2) - k^2 \operatorname{sn}^2 v_2 \operatorname{cn}^2 v_1 (\operatorname{dn}^2 v_1 + k^2 \operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{cn}^2 v_2) =$$
$$= \operatorname{dn}^2 v_1 (1 - k^2 \operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2) - k^2 \operatorname{sn}^2 v_2 \operatorname{cn}^2 v_1 (1 - k^2 \operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2) =$$
$$= (1 - k^2 \operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2)(\operatorname{dn}^2 v_1 - k^2 \operatorname{sn}^2 v_2 \operatorname{cn}^2 v_1);$$

внося это въ (6), получимъ по сокращеніи:

$$\operatorname{dn}(v_1 + v_2)\operatorname{dn}(v_1 - v_2) = \frac{\operatorname{dn}^2 v_1 - k^2 \operatorname{sn}^2 v_2 \operatorname{sn}^2 v_1}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2}, \tag{7}$$

и на основаніи симметріи (6) относительно v_1 и v_2 еще такое:

$$\operatorname{dn}(v_1 + v_2)\operatorname{dn}(v_1 - v_2) = \frac{\operatorname{dn}^2 v_2 - k^2 \operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{cn}^2 v_2}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2}, \tag{8}$$

тождественность чего съ (7) провѣрится также легко, какъ то было выше сдѣлано для функціи $\operatorname{cn} v$.

136. Полагая въ формулахъ пред. §

$$v_1 = v_2 = u,$$

мы получимъ изъ нихъ такія:

$$\operatorname{sn} 2u = \frac{2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u}; \tag{1}$$

$$\operatorname{cn} 2u + 1 = \frac{2 \operatorname{cn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u}; \tag{2}$$

$$\operatorname{cn} 2u - 1 = \frac{-2\operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u}; \tag{3}$$

$$\operatorname{dn} 2u + 1 = \frac{2\operatorname{dn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u}; \tag{4}$$

$$\operatorname{dn} 2u - 1 = \frac{-2k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u}. \tag{5}$$

Изъ (3) и (5) легко получаемъ слѣдующія:

$$\operatorname{cn} 2u = \frac{1 - 2\operatorname{sn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^4 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u}; \tag{6}$$

$$\operatorname{dn} 2u = \frac{1 - 2k^2 \operatorname{sn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^4 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u}. \tag{7}$$

Эти формулы даютъ выраженія функцій отъ амплитуды $2u$ чрезъ таковыя отъ u, слѣдовательно позволяютъ аргументъ помножать на 2; они насъ приводятъ къ вопросу объ умноженіи аргумента вообще на какое либо количество; но этотъ вопросъ по своей обширности и деликатности и связи съ вопросомъ о преобразованіи требуетъ особой главы въ дальнѣйшемъ. Формулы, которыя мы вывели въ послѣднихъ четырехъ §§ представляютъ лишь главнѣйшія изъ тѣхъ которыя были выведены Якоби въ его „Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum". Замѣтимъ еще, что изъ формулъ для сложенія функціи амплитуды легко получить, полагая $v_1 = v$, $v_2 = K$, или $v_2 = K'i$, или $v_2 = K + K'i$ формулы (1), (2) и (3) § 131, предполагая уже выведенными формулы (1)—(4); но мы на этомъ останавливаться не будемъ, ибо это читатель можетъ найти, напр., у Бертрана въ его „Calcul intégral".

137. Въ § 117, нами было выведено такое дифференціальное уравненіе для отношенія $\Theta(u)$ къ $\Theta_j(u)$:

$$\frac{d\,\dfrac{\Theta(u)}{\Theta_j(u)}}{du} = \frac{\Theta_i(u)}{\Theta_j(u)} \cdot \frac{\Theta_k(u)}{\Theta_j(u)}; \tag{1}$$

дифференціальныя уравненія для отношеній прочихъ Θ-функцій, т. е. $\Theta_i(u)$ и $\Theta_k(u)$, къ той же $\Theta_j(u)$, получимъ изъ уравненія (20) § 118, перемѣнивъ тамъ k на j и обратно, или же перемѣнивъ i на k, k на j, j на i, (т. е. сдѣлавъ круговую перестановку $(i,j,k)^{-1}$ значковъ); они будутъ слѣдующія:

$$d\frac{\dfrac{\Theta_i(u)}{\Theta_j(u)}}{du} = -\frac{\Theta_j^2(\omega_i)}{\Theta^2(\omega_i)}\cdot\frac{\Theta(u)}{\Theta_j(u)}\cdot\frac{\Theta_k(u)}{\Theta_j(u)}; \qquad (2)$$

$$d\frac{\dfrac{\Theta_k(u)}{\Theta_j(u)}}{du} = -\frac{\Theta_j^2(\omega_k)}{\Theta^2(\omega_k)}\cdot\frac{\Theta(u)}{\Theta_j(u)}\cdot\frac{\Theta_i(u)}{\Theta_j(u)}. \qquad (3)$$

Полагая въ равенствѣ:

$$\sqrt{\wp(u)-e_j} = \frac{\Theta_j(u)}{\Theta(u)}$$

$u=\omega_i$, $u=\omega_k$, будемъ имѣть:

$$\sqrt{e_i-e_j} = \frac{\Theta_j(\omega_i)}{\Theta(\omega_i)}; \qquad (5)$$

$$\sqrt{e_k-e_j} = \frac{\Theta_j(\omega_k)}{\Theta(\omega_k)}; \qquad (6)$$

имѣя это въ виду, равенствамъ (1), (2) и (3) можно дать такой видъ:

$$\frac{d\left(\sqrt{e_i-e_j}\,\dfrac{\Theta(u)}{\Theta_j(u)}\right)}{d(\sqrt{e_i-e_j}\,u)} = \frac{\Theta_i(u)}{\Theta_j(u)}\cdot\frac{\Theta_k(u)}{\Theta_j(u)}; \qquad (7)$$

$$\frac{d\left(\dfrac{\Theta_i(u)}{\Theta_j(u)}\right)}{d(\sqrt{e_i-e_j}\,u)} = -\left(\sqrt{e_i-e_j}\,\frac{\Theta(u)}{\Theta_j(u)}\right)\cdot\frac{\Theta_k(u)}{\Theta_j(u)}; \qquad (8)$$

$$\frac{d\left(\dfrac{\Theta_k(u)}{\Theta_j(u)}\right)}{d(\sqrt{e_i-e_j}\,u)} = -\frac{e_k-e_j}{e_i-e_j}\left(\sqrt{e_i-e_j}\,\frac{\Theta(u)}{\Theta_j(u)}\right)\cdot\frac{\Theta_i(u)}{\Theta_j(u)}; \qquad (9)$$

и тогда они по (2) и (4) § 122 и (6) § 124 перейдутъ въ дифференціальныя уравненія функцій амплитуды:

$$\frac{d\sin\mathrm{am}\,v}{dv} = \cos\mathrm{am}\,v\,\triangle\,\mathrm{am}\,v; \qquad (10)$$

$$\frac{d\cos \mathrm{am}\, v}{dv} = -\sin \mathrm{am}\, v \,\triangle\, \mathrm{am}\, v; \tag{11}$$

$$\frac{d\triangle \mathrm{am}\, v}{dv} = -k^2 \sin \mathrm{am}\, v \cos \mathrm{am}\, v. \tag{12}$$

Эти уравненія могутъ быть получены и прямо изъ опредѣленія $\mathrm{am}\, v$, даннаго въ § 122 [формулы (9), (10), (12)]: изъ (10) § 122 будемъ имѣть въ виду (12) того же §:

$$\frac{d\mathrm{am}\, v}{dv} = \triangle\, \mathrm{am}\, v; \tag{13}$$

слѣдовательно по правилу дифференцированія функцій отъ функцій:

$$\frac{d\sin \mathrm{am}\, v}{dv} = \cos \mathrm{am}\, v . \frac{d\mathrm{am}\, v}{dv} = \cos \mathrm{am}\, v \,\triangle\, \mathrm{am}\, v;$$

$$\frac{d\cos \mathrm{am}\, v}{dv} = -\sin \mathrm{am}\, v . \frac{d\mathrm{am}\, v}{dv} = -\sin \mathrm{am}\, v \,\triangle\, \mathrm{am}\, v;$$

$$\frac{d\triangle \mathrm{am}\, v}{dv} = \frac{d\sqrt{1-k^2 \sin \mathrm{am}\, v}}{dv} =$$

$$= -k^2 \frac{\sin \mathrm{am}\, v \cos \mathrm{am}\, v}{\sqrt{1-k^2\sin^2 \mathrm{am}\, v}} . \frac{d\mathrm{am}\, v}{dv} =$$

$$= -k^2 \sin \mathrm{am}\, v \cos \mathrm{am}\, v,$$

ибо

$$\triangle\, \mathrm{am}\, v = \sqrt{1-k^2 \sin^2 \mathrm{am}\, v}. \tag{14}$$

138. Можно прямо отъ дифференціальнаго уравненія функціи $\sin \mathrm{am}\, v$ перейти къ функціямъ Θ. Полагая $x = \sin \mathrm{am}\, v$, мы уже имѣли это уравненіе въ такомъ видѣ [(5) § 122]:

$$\frac{dx}{dv} = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}; \tag{1}$$

отсюда, возвышая въ квадратъ, получимъ:

$$\left(\frac{dx}{dv}\right)^2 = 1-(1+k^2)x^2 + k^2x^4; \tag{2}$$

— если еще раскроемъ скобки направо; дѣля на x^2 и имѣя въ виду, что

$$\frac{d\log x}{dv} = \frac{1}{x}\frac{dx}{dv}, \tag{3}$$

мы можемъ его такъ представить:

$$\left(\frac{d\log x}{dv}\right)^2 = \frac{1}{x^2} - (1+k^2) + k^2x^2; \tag{4}$$

дифференцируя это уравненіе, и дѣля на удвоенное предыдущее [(3)], будемъ имѣть:

$$\frac{d^2\log x}{dv^2} = -\frac{1}{x^2} + k^2x^2; \tag{5}$$

вводя вмѣсто x его значеніе, получимъ отсюда:

$$\frac{d^2\log\sin\operatorname{am}v}{dv} = -\frac{1}{\sin^2\operatorname{am}v} + k^2\sin^2\operatorname{am}v. \tag{6}$$

Но по первому изъ (2) § 131, (останавливаясь на нижнемъ знакѣ), это можно такъ представить:

$$\frac{d^2\log\sin\operatorname{am}v}{dv^2} = -k^2\sin^2\operatorname{am}(v-K'i) + k^2\sin^2\operatorname{am}v, \tag{7}$$

или придавая тождество

$$0 = c - c:$$

$$\frac{d^2\log\sin\operatorname{am}v}{dv^2} = c - k^2\sin^2\operatorname{am}(v-K'i) - (c - k^2\sin^2\operatorname{am}v). \tag{8}$$

Помножая это на dv и интегрируя отъ v_0, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\log\sin\operatorname{am}v}{dv} - \frac{d\log\sin\operatorname{am}v_0}{dv_0} = \\ &= \int_{v_0}^{v}[c - k^2\sin^2\operatorname{am}(v-K'i)]dv - \int_0^v (c - k^2\sin^2\operatorname{am}v)dv. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Такъ какъ по (10) пред. §:

$$\frac{d\log\sin\operatorname{am} v_0}{dv_0} = \frac{\cos\operatorname{am} v_0 \triangle \operatorname{am} v_0}{\sin\operatorname{am} v_0}, \tag{10}$$

и, слѣдовательно, обратится въ нуль вмѣстѣ съ $\cos\operatorname{am} v_0$, когда положимъ $v_0 = K$, то мы это и сдѣлаемъ, тогда изъ (9) будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\log\sin\operatorname{am} v}{dv} &= \int_K^v (c - k^2\sin^2\operatorname{am}(v - K'i)dv - \\ &- \int_K^v (c - k^2\sin^2\operatorname{am} v)dv, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

или, вводя новую перемѣнную въ первый интегралъ, полагая для этого

$$v - K'i = w, \tag{12}$$

слѣдующее:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\log\sin\operatorname{am} v}{dv} &= \int_{K-K'i}^{w} (c - k^2\sin\operatorname{am} w)dw - \\ &- \int_K^v (c - k^2\sin^2\operatorname{am} v)dv. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Помножая на dv и интегрируя между тѣми же предѣлами, на основаніи того, что $dw = dv$ и

$$\log\sin\operatorname{am} K = \log 1 = 0,$$

мы получимъ слѣдующее:

$$\left.\begin{aligned} \log\sin\operatorname{am} v &= \int_{K-K'i}^{w}\int_{K-K'i}^{w} (c - k^2\sin^2\operatorname{am} w)dw\,dw - \\ &- \int_K^v\int_K^v (c - k^2\sin^2\operatorname{am} v)dv\,dv. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Переходя отъ логариѳма къ числу, получимъ:

$$\sin\operatorname{am} v = \frac{e^{\int_{K-K'i}^{w}\int_{K-K'i}^{w} (c - k^2\sin^2\operatorname{am} w)dw\,dw}}{e^{\int_K^v\int_K^v (c - k^2\sin^2\operatorname{am} v)dv\,dv}}. \tag{15}$$

139. Эта формула есть преобразованіе къ перемѣнной v формулы, получающейся изъ (20) § 9 чрезъ примѣненіе ея къ эллиптическимъ интеграламъ въ Вейерштрассовской канонической формѣ и перестановку значковъ i и j, а также чрезъ замѣну x и y соотвѣтственно чрезъ s и s', именно формулы:

$$\sqrt{\frac{s-e_j}{e_i-e_j}}=\frac{e^{-\int_{e_k}^{s'}\int_{e_k}^{s'}\frac{(s'-c)ds'}{\sqrt{S'}}\cdot\frac{ds'}{\sqrt{S'}}}}{e^{-\int_{e_i}^{s}\int_{e_i}^{s}\frac{(s-c)ds}{\sqrt{S}}\cdot\frac{ds}{\sqrt{S}}}}, \tag{1}$$

гдѣ перемѣнныя s и s' связаны уравненіемъ (2) § 127 [по 11 § 9]:

$$s-e_j=\frac{(e_j-e_i)(e_j-e_k)}{s'-e_j}, \tag{2}$$

причемъ предѣламъ s:

$$e_i,\quad e_j,\quad e_k,\quad \infty \tag{3}$$

отвѣчаютъ такіе предѣлы s':

$$e_k,\quad \infty,\quad e_i,\quad e_j, \tag{4}$$

какъ мы раньше видѣли [§ 77], а аргументы функцій s и s' связаны соотношеніемъ:

$$u+u'=\omega_j. \tag{5}$$

Дѣлая подстановку (3) § 127, т. е. полагая:

$$s'-e_j=(e_k-e_j)x^2, \tag{6}$$

причемъ по (6) § 127 для $s'=e_k$ будетъ $x=1$, мы будемъ имѣть:

$$\int_{e_k}^{s'}\frac{(s'-c)ds}{\sqrt{S'}}=-\sqrt{e_i-e_j}\int_1^x\left(\frac{e_k-e_j}{e_i-e_j}x^2-c'\right)\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \tag{7}$$

гдѣ $c'=\frac{c-e_j}{e_i-e_j}$ [помножая послѣ подстановки изъ (6) § 127 числителя

и знаменателя на $\sqrt{e_i - e_j}$; тогда въ знаменателѣ появится множитель $e_i - e_j$], а это по (4) § 122 такъ представится:

$$\int_{e_k}^{s'} \frac{(s - c)ds'}{\sqrt{S'}} = \sqrt{e_i - e_j} \int_1^x \frac{(c' - k^2x^2)dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}. \tag{8}$$

Здѣсь мы имѣемъ выраженіе интеграла второго рода перваго типа чрезъ перемѣнную x. Помножая это почленно на (6) § 127 и интегрируя по x отъ 1 до x, слѣдовательно по s' отъ e_k до s', мы будемъ имѣть по сокращеніи на $\sqrt{e_i - e_j}$:

$$-\int_{e_k}^{s'}\int_{e_k}^{s'} \frac{(s' - c)ds'}{\sqrt{S'}} \cdot \frac{ds'}{\sqrt{S'}} = \int_1^x\int_1^x \frac{(c' - k^2x^2)dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}. \tag{9}$$

Но

$$v = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \tag{10}$$

и

$$x = \sin\operatorname{am} v, \tag{11}$$

потому формула (8) превратится въ такую:

$$\int_{e_k}^{s'} \frac{(s' - c)ds'}{\sqrt{S'}} = \sqrt{e_i - e_j} \int_K^v (c' - k^2 \sin^2\operatorname{am} v)dv, \tag{12}$$

(ибо при $x = 1$ $v = K$) и представитъ преобразованіе интеграла второго рода перваго типа къ перемѣнной v, — такъ что попутно рѣшена нами и эта задача, — формула же (10) приметъ такой видъ:

$$-\int_{e_k}^{s'}\int_{e_k}^{s'} \frac{(s' - c)ds'}{\sqrt{S'}} \cdot \frac{ds'}{\sqrt{S'}} = \int_K^v\int_K^v (c' - k^2 \sin^2\operatorname{am} v)dv\,dv. \tag{13}$$

Чрезъ аналогичную подстановку къ такому же виду приведется и двойной интегралъ въ знаменателѣ формулы (1), именно чрезъ положеніе

$$s - e_j = (e_k - e_j)x'^2 \tag{14}$$

$$x' = \sin\operatorname{am} v'; \tag{15}$$

но только при этомъ надобно имѣть въ виду, что аргументы v и v' перемѣнныхъ x и x' [формулы (11) и (15)] связаны между собою соотношеніемъ:

$$v + v' = K'i, \tag{16}$$

которое получимъ изъ (5), умножая его на $\sqrt{e_i - e_j}$, и имѣя въ виду (2) § 122 и (17) § 127. Нижнимъ предѣламъ этого интеграла какъ при первомъ, такъ и второмъ интегрированіи есть величина e_i; соотвѣтственное значеніе x' найдется потому изъ уравненія:

$$e_i - e_j = (e_k - e_j)x'^2 \tag{17}$$

и будетъ для $s = e_i$:

$$x' = -\frac{\sqrt{e_i - e_j}}{\sqrt{e_k - e_j}} = -\frac{1}{k}, \tag{18}$$

— по (4) § 122, — гдѣ изъ двухъ знаковъ мы остановились на —, ибо приняли, что когда $x = 1$, $v = K$; но тогда въ силу (16) будетъ $v' = K'i - K$; полагая же въ первой изъ формулъ (2) § 131 для верхняго знака $v = K$, мы будемъ имѣть

$$\sin\mathrm{am}(K - K'i) = \frac{1}{k},$$

слѣдовательно по нечетности $\sin\mathrm{am}\, v$:

$$\sin\mathrm{am}(K'i - K) = -\frac{1}{k}. \tag{19}$$

Вслѣдствіе этого двойной интегралъ знаменателя формулы (1) обратится по выраженіи s чрезъ x въ такой:

$$-\int_{e_i}^{s}\int_{e_i}^{s} \frac{(s-c)ds}{\sqrt{S}} \cdot \frac{ds}{\sqrt{S}} = \int_{-\frac{1}{k}}^{x'}\int_{-\frac{1}{k}}^{x'} \frac{(c' - k^2x')dx'}{\sqrt{(1-x'^2)(1-k^2x'^2)}} \cdot \frac{dx'}{\sqrt{(1-x'^2)(1-k^2x'^2)}}; \tag{20}$$

а по выраженіи x' чрезъ v' въ такой:

$$-\int_{e_i}^{s}\int_{e_i}^{s} \frac{(s-c)ds}{\sqrt{S}} \cdot \frac{ds}{\sqrt{S}} = \int_{-K+K'i}^{v'}\int_{-K+K'i}^{v'} (c' - k^2\sin^2\mathrm{am}\, v')\,dv'\,dv'. \tag{21}$$

Изъ (14) находимъ

$$\sqrt{\frac{s-e_j}{e_k-e_j}}=-x'=-\sin\mathrm{am}\,v', \tag{22}$$

гдѣ изъ двойного знака мы остановились на —, ибо при $v=K$ и слѣдовательно $v'=K'i-K$ должно быть выполнено (18). Внеся изъ (13), (20) и (22) въ (1), получимъ, имѣя въ виду, что по (4) § 123: $\sqrt{\frac{e_k-e_j}{e_i-e_j}}=k$, слѣдующее:

$$-k\sin\mathrm{am}\,v'=\frac{e^{\int_K^v\int_K^v(c'-k^2\sin^2\mathrm{am}\,v)\,dv\cdot dv}}{e^{\int_{-K+K'i}^{v'}\int_{-K+K'i}^{v'}(c'-k^2\sin^2\mathrm{am}\,v)\,dv\cdot dv}}. \tag{23}$$

Если теперь вмѣсто v' введемъ сюда новую перемѣнную, положивъ

$$v'=-w, \tag{24}$$

то выведенная формула обратится въ такую:

$$k\sin\mathrm{am}\,w=\frac{e^{\int_K^v\int_K^v(c-k^2\sin^2\mathrm{am}\,v)\,dv\cdot dv}}{e^{\int_{K-K'i}^{w}\int_{K-K'i}^{w}(c'-k^2\sin^2\mathrm{am}\,w)\,dw\cdot dw}}; \tag{25}$$

внося же изъ (24) въ (16) будемъ имѣть

$$v-w=K'i, \tag{26}$$

что согласно съ (12) пред. §; отсюда $w=v-K'i$, слѣдовательно по первой формулѣ изъ (2) § 131:

$$k\sin\mathrm{am}\,w=\frac{1}{\sin\mathrm{am}\,v}; \tag{27}$$

внося это въ (25) и обращая, получимъ:

$$\sin\operatorname{am} v = \frac{e^{\int_{K-K'i}^{w}\int_{K-K'i}^{w}(c'-k^2\sin^2\operatorname{am} w)dw\,.\,dw}}{e^{\int_{K}^{v}\int_{K}^{v}(c'-k^2\sin^2\operatorname{am} v)dv\,.\,dv}}, \tag{28}$$

что тождественно съ (15) пред. §.

140. Отъ этой формулы и можно перейти къ Θ-функціямъ аналогично тому, какъ то было нами сдѣлано въ главѣ VII, полагая

$$Z_1(v) = \int_0^v (c' - k^2\sin^2\operatorname{am} v)dv + C \tag{1}$$

$$Y_1(v) = \int_0^v Z_1(v)dv + C_1, \tag{2}$$

гдѣ интегрированіе можно начинать отъ нуля, ибо подъинтегральныя функціи остаются конечными для $v = 0$, и

$$\Theta(v) = e^{Y_1(v)}, \tag{3}$$

— если угодно за исходную точку принять дифференціальное уравненіе (1) § 138 функціи $x = \sin\operatorname{am} v$, причемъ развитіе теоріи этой функціи $\Theta(v)$ будетъ совершенно аналогично нашему въ главѣ VII.—Если въ (1) § 138 ввести не перемѣнную v, какъ то было сдѣлано въ пред. §, а перемѣнную u вмѣсто s и перемѣнную u' вмѣсто s', причемъ онѣ будутъ связаны уравненіемъ (5) того же §, то оно приметъ такой видъ:

$$\frac{\sqrt{\wp(u) - e_j}}{\sqrt{\wp(\omega_i) - e_j}} = \frac{e^{\int_{\omega_j-\omega_i}^{u'}\int_{\omega_j-\omega_i}^{u'}[c' - \wp(u')\,du'du'}}{e^{\int_{\omega_i}^{u}\int_{\omega_i}^{u}[c' - \wp(u)]du\,du}}, \tag{4}$$

[гдѣ вмѣсто e_i написано $\wp(\omega_i) = e_i$]. Но по (15) § 84:

$$\int_{\omega_i}^{u}[c' - \wp(u)]du = \zeta(u) - \zeta(\omega_i); \tag{5}$$

$$\int_{\omega_j-\omega_i}^{u'}[c'-\wp(u')]du'=\zeta(u')-\zeta(\omega_j-\omega_i); \tag{6}$$

потому предыдущее обратится въ такое:

$$\frac{\sqrt{\wp(u)-e_j}}{\sqrt{\wp(\omega_i)-e_j}}=\frac{e^{\int_{\omega_j-\omega_i}^{u'}\zeta(u')du'-\zeta(\omega_j-\omega_i)(u'-\omega_j+\omega_i)}}{e^{\int_{\omega_i}^{u}\zeta(u)du-\zeta(\omega_i)(u-\omega_i)}}; \tag{7}$$

это-же по внесеніи вмѣсто u' его выраженія изъ (5) § 139 легко приводится къ такому:

$$\frac{\sqrt{\wp(u)-e_j}}{\sqrt{\wp(\omega_i)-e_j}}=\frac{e^{\int_{\omega_j-\omega_i}^{\omega_j-u}\zeta(u')du'}\cdot e^{[\zeta(\omega_j-\omega_i)+\zeta(\omega_i)](u-\omega_i)}}{e^{\int_{\omega_i}^{u}\zeta(u)du}}. \tag{8}$$

Но по (3) § 93 имѣемъ

$$\zeta(u+\omega_i)-\zeta(u-\omega_i)=2\eta_i, \tag{9}$$

слѣдовательно полагая $u=\omega_j$:

$$\zeta(\omega_j+\omega_i)-\zeta(\omega_j-\omega_i)=2\eta_i \tag{10}$$

и также

$$\zeta(u+\omega_j)-\zeta(u-\omega_j)=2\eta_j, \tag{11}$$

откуда для $u=\omega_i$

$$\zeta(\omega_i+\omega_j)-\zeta(\omega_i-\omega_j)=2\eta_j, \tag{12}$$

или въ виду нечетности функціи $\zeta(u)$:

$$\zeta(\omega_i+\omega_j)+\zeta(\omega_j-\omega_i)=2\eta_j; \tag{13}$$

вычитая отсюда (10), по раздѣленіи на 2, получимъ:

$$\zeta(\omega_j-\omega_i)=\eta_j-\eta_i. \tag{14}$$

Но по (21) § 84:

$$\zeta(\omega_i) = \eta_i; \tag{15}$$

складывая это съ предыдущимъ, получимъ:

$$\zeta(\omega_j - \omega_i) + \zeta(\omega_i) = \eta_j. \tag{16}$$

На основаніи этого (8) упрощается такимъ образомъ:

$$\frac{\sqrt{\wp(u) - e_j}}{\sqrt{\wp(\omega_i) - e_j}} = \frac{e^{\int_{\omega_j-\omega_i}^{\omega_j-u} \zeta(u')\,du'} \cdot e^{\eta_j(u-\omega_i)}}{e^{\int_{\omega_i}^{u} \zeta(u)\,du}}. \tag{17}$$

Если теперь положить

$$Y(u) = \int_{u_0}^{u} \zeta(u)\,du + C, \tag{18}$$

то будетъ

$$\int_{\omega_i}^{u} \zeta(u)\,du = Y(u) - Y(\omega_i); \tag{19}$$

$$\int_{\omega_j-\omega_i}^{\omega_j-u} \zeta(u)\,du = Y(\omega_j - u) - Y(\omega_j - \omega_i), \tag{20}$$

и послѣднее равенство принимаетъ такой видъ:

$$\frac{\sqrt{\wp(u) - e_j}}{\sqrt{\wp(\omega_i) - e_j}} = \frac{e^{Y(\omega_j - u)} \cdot e^{\eta_j u}}{e^{Y(u)}} : \frac{e^{Y(\omega_j - \omega_i)} \cdot e^{\eta_j \omega_i}}{e^{Y(\omega_i)}}; \tag{21}$$

откуда, полагая

$$\sqrt{\wp(\omega_i) - e_j} : \frac{e^{Y(\omega_j - \omega_i)} \cdot e^{\eta_j \omega_i}}{e^{Y(\omega_i)}} = A, \tag{22}$$

получимъ

$$\sqrt{\wp(u) - e_j} = A \frac{e^{Y(\omega_j - u)} \cdot e^{\eta_j u}}{e^{Y(u)}}. \tag{23}$$

Если положить

$$e^{Y(u)} = \Theta(u), \tag{24}$$

то послѣднее равенство обратится въ такое:

$$\sqrt{\wp(u) - e_j} = A \frac{\Theta(\omega_j - u) e^{\eta_j u}}{\Theta(u)}. \tag{25}$$

Коэффиціентъ A опредѣлится изъ условія, что

$$\text{пред. } u\sqrt{\wp(u) - e_j}\Big|_{u=0} = 1 ; \tag{26}$$

помножая (25) на u, и полагая затѣмъ $u = 0$, получимъ, имѣя это въ виду и (18) § 87, слѣдующее:

$$1 = A \frac{\Theta(\omega_j)}{\Theta'(0)} ; \tag{27}$$

внося A отсюда въ (25), получимъ:

$$\sqrt{\wp(u) - e_j} = \frac{\Theta'(0)\Theta(\omega_j - u) e^{\eta_j u}}{\Theta(\omega_i)\Theta(u)}, \tag{28}$$

или еще полагая:

$$\Theta_j(u) = \frac{\Theta'(0)\Theta(\omega_j - u) e^{\eta_j u}}{\Theta(\omega_j)}, \tag{29}$$

— это союзная Θ-функція, — окончательно

$$\sqrt{\wp(u) - e_j} = \frac{\Theta_j(u)}{\Theta(u)}. \tag{30}$$

[Этотъ путь перехода къ Θ-функціямъ указанъ былъ въ статьѣ нашей: „Ueber das Umkehrproblem der elliptischen Integrale“. 2 Note. Math. Annalen Bd. XXV S. 197, а также на русскомъ языкѣ въ Сообщеніяхъ Харьков. Мат. Общ. за 1884, III книжка, статья: Обращеніе эллиптическихъ интеграловъ].

141. Въ § 139 мы преобразовали Вейерштрассовскій интегралъ второго рода къ перемѣнной x съ помощію подстановки (6) того же §;

теперь переходимъ къ подобному преобразованію Якобіевскаго интеграла третьяго рода, въ которомъ предѣлами возьмемъ s и ∞. По (5) § 7 этотъ интегралъ, примѣнительно къ Вейерштрассовской канонической формѣ, будетъ:

$$J_c = \int_s^\infty \frac{1}{2} \frac{\sqrt{S_\alpha}}{s-\alpha} \cdot \frac{ds}{\sqrt{S}}; \tag{1}$$

полагая

$$s - e_i = \frac{e_i - e_j}{x^2}, \tag{2}$$

будемъ имѣть

$$ds = -\frac{2(e_i - e_j)}{x^3} dx; \tag{3}$$

далѣе будетъ:

$$\left.\begin{aligned} S &= 4(s-e_i)(s-e_j)(s-e_k) = \\ &= \frac{e_i - e_j}{x^6}(1-x^2)(1-k^2x^2), \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

помня, что $\dfrac{\sqrt{e_k - e_j}}{\sqrt{e_i - e_j}} = k$; слѣдовательно

$$\frac{ds}{\sqrt{S}} = -\frac{dx}{\sqrt{e_i - e_j}\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}; \tag{5}$$

или, полагая для краткости

$$\triangle(x) = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} \tag{6}$$

$$\frac{ds}{\sqrt{S}} = -\frac{1}{\sqrt{e_i - e_j}} \frac{dx}{\triangle(x)}. \tag{7}$$

Теперь, полагая

$$\alpha - e_j = (e_k - e_j)a^2, \tag{8}$$

будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} S_\alpha &= 4(\alpha - e_i)(\alpha - e_j)(\alpha - e_k) = \\ &= 4(e_i - e_j)(e_k - e_j)^2 a^2 (1 - a^2)(1 - k^2 a^2) = \\ &= 4(e_i - e_j)(e_k - e_j)^2 a^2 [\triangle(a)]^2 ; \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

и слѣдовательно

$$\frac{1}{2}\sqrt{S_\alpha} = (e_k - e_i)\sqrt{e_i - e_j}\, a \triangle(a). \tag{10}$$

Вносяизъ (2), (7) и (10) въ (1), будемъ имѣть:

$$J_c = \int_0^x \frac{\dfrac{e_k - e_i}{e_i - e_j} a \triangle(a) x^2}{1 - \dfrac{e_k - e_j}{e_i - e_j} a^2 x^2} \cdot \frac{dx}{\triangle(x)}, \tag{11}$$

или, такъ какъ $\dfrac{e_k - e_i}{e_i - e_j} = k^2$, окончательно:

$$J_c = \int_0^x \frac{k^2 a \triangle(a) \cdot x^2}{1 - k^2 a^2 x^2} \cdot \frac{dx}{\triangle(x)}. \tag{12}$$

Если примемъ теперь во вниманіе (13), (14) и (15) § 122, а также сдѣлаемъ

$$a = \sin \operatorname{am} w, \tag{13}$$

то дадимъ нашему интегралу такой видъ:

$$J_c = \int_0^v \frac{k^2 \sin \operatorname{am} w \cos \operatorname{am} w \triangle \operatorname{am} w \cdot \sin^2 \operatorname{am} v}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} w \sin^2 \operatorname{am} v} dv, \tag{14}$$

ибо будетъ

$$\triangle(a) = \cos \operatorname{am} w \cdot \triangle \operatorname{am} w. \tag{15}$$

Якоби обозначалъ этотъ интегралъ такъ:

$$\Pi(v, w) = \int_0^v \frac{k^2 \sin \operatorname{am} w \cos \operatorname{am} w \triangle \operatorname{am} w \cdot \sin^2 \operatorname{am} v}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} w \sin^2 \operatorname{am} v} dv. \tag{16}$$

*

(См. Fundamenta nova Theoriae functionum ellipticarum, § 51 [p. 144]). Выраженіе того же интеграла чрезъ перемѣнную u даетъ формула (4) § 89, гдѣ только v имѣетъ другое значеніе, чѣмъ въ (16), именно v той формулы къ w этой стоитъ въ зависимости, выражаемой равенствомъ:

$$v = e_j + \frac{e_i - e_j}{\sin^2 \mathrm{am}\, w}, \tag{17}$$

какъ то слѣдуетъ изъ предыдущаго. Таже формула даетъ выраженіе $\Pi(v, w)$ чрезъ Θ-функцію отъ аргумента

$$u = \frac{v}{\sqrt{e_i - e_j}}. \tag{18}$$

ГЛАВА X.

Разложеніе эллиптическихъ функцій на частныя дроби и въ безконечныя произведенія.

142. Эллиптическія функціи, обращаясь при однозначности въ безконечность для конечныхъ значеній независимой перемѣнной, имѣютъ характеръ дробныхъ функцій; а потому можно искать ихъ разложенія на частныя дроби; Θ-функціи напротивъ имѣютъ характеръ цѣлыхъ функцій, а потому можно искать разложеніе ихъ въ рядъ множителей, число которыхъ здѣсь, какъ тамъ частныхъ дробей, будетъ, понятно, безконечное; тогда и эллиптическія функціи представятся въ видѣ частнаго двухъ безконечныхъ произведеній. И дѣйствительно такія разложенія существуютъ и пригодны для всей плоскости (u), тогда какъ разложенія въ рядъ по степенямъ перемѣнной u пригодны лишь внутри круга сходимости его. Простѣйшій и строгій способъ полученія этихъ разложеній на частныя дроби и въ безконечныя произведенія былъ нами указанъ въ статьѣ нашей: „Разложеніе тригонометрическихъ и эллиптическихъ функцій на частныя дроби и въ безконечныя произведенія“, помѣщенной въ „Сообщеніяхъ Харьковскаго Математическаго Общества“ за 1890 годъ; его мы будемъ держаться и въ этой главѣ, причемъ и здѣсь, какъ и тамъ, начнемъ съ разложенія на частныя дроби и въ безконечныя произведенія, безусловно-сходящіяся, тригонометрическихъ функцій, чтобы потомъ имѣть дальше средство для обращенія разложеній эллиптическихъ функцій на частныя дроби и въ безконечныя произведенія, которыя будутъ первоначально двойныя, въ простыя. Это будутъ разложенія по теоремамъ Миттагъ-Леффлера и Вейерштрасса; но непосредственное полученіе этихъ разложеній на основаніи названныхъ сейчасъ теоремъ не легко вслѣдствіе затрудненій, встрѣчаемыхъ при опредѣленіи цѣлой функціи, которая въ первомъ разложеніи является придаточною, во второмъ внѣшнимъ множителемъ, тогда какъ по нашему способу эти функціи получаются легко сами собою.

143. Разсмотримъ сперва функцію:

$$\operatorname{cosec}^2(z-\alpha)=\frac{1}{\sin^2(z-\alpha)}, \tag{1}$$

отъ комплексной перемѣнной z. Эта функція однозначна, конечна и непрерывна на всей плоскости (z) за исключеніемъ значеній

$$z=\alpha+k\pi, \tag{2}$$

для которыхъ она обращается въ безконечность второго порядка. Въ самомъ дѣлѣ, если положимъ

$$z=\alpha+k\pi+\varepsilon, \tag{3}$$

гдѣ ε безконечно-малая величина, то внося въ (1), будемъ имѣть:

$$\operatorname{cosec}^2(z-\alpha)_{z=\alpha+k\pi+\varepsilon}=\frac{1}{\sin^2\varepsilon}; \tag{4}$$

помножая это на ε^2, будемъ имѣть:

$$\text{пред.}\left.\frac{\varepsilon^2}{\sin^2\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=1; \tag{5}$$

слѣдовательно для значеній вида (3), т. е. безконечно-мало разнящихся отъ (2), функція $\operatorname{cosec}^2(z-\alpha)$ будетъ одного порядка съ $\frac{1}{\varepsilon^2}$ при $\varepsilon=0$, откуда и слѣдуетъ сказанное. Съ помощію разложенія $\sin\varepsilon$ въ рядъ, будемъ далѣе имѣть:

$$\operatorname{cosec}^2\varepsilon=\frac{1}{\sin^2\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon^2\left(1-\frac{\varepsilon^2}{3!}+\frac{\varepsilon^4}{5!}-\ldots\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\left[1-\left(\frac{\varepsilon^2}{3!}-\frac{\varepsilon^4}{5!}+\ldots\right)\right]^{-2}=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\left[1+\frac{\varepsilon^2}{3}+\varepsilon^4\mathfrak{P}(\varepsilon^2)\right]=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{3}+\varepsilon^2\mathfrak{P}(\varepsilon^2),$$

откуда получимъ:

$$\text{пред.}\left[\operatorname{cosec}^2\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon^2}\right]_{\varepsilon=0} = \frac{1}{3}; \tag{7}$$

внося же сюда значеніе ε изъ (3), будемъ имѣть:

$$\text{пред.}\left[\operatorname{cosec}^2(z-\alpha) - \frac{1}{(z-\alpha-k\pi)^2}\right]_{z=\alpha+k\pi} = \frac{1}{3}. \tag{8}$$

Чтобы ислѣдовать значеніе нашей функціи въ точкѣ $z=\infty$, положимъ

$$z-\alpha = x+yi; \tag{9}$$

тогда при помощи соотношеній между тригонометрическими функціями и показательными, получимъ:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{cosec}^2(z-\alpha) &= \frac{1}{\sin^2(z-\alpha)} = -\frac{4}{[e^{(x+yi)i} - e^{-(x+yi)i}]^2} = \\ &= -\frac{4}{[(e^{-y}-e^{+y})\cos x + i(e^{-y}+e^{+y})\sin x]^2};\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

модуль знаменателя этого выраженія =

$$\left.\begin{aligned}&= (e^{-y}-e^{+y})^2\cos^2 x + (e^{-y}+e^{+y})^2\sin^2 x = \\ &= e^{-2y} + e^{+2y} - 2\cos 2x;\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

съ увеличеніемъ x и y до ∞, послѣдній членъ будетъ колебаться въ конечныхъ предѣлахъ -2 и $+2$, тогда какъ изъ первыхъ двухъ, (смотря по знаку y) одинъ будетъ стремиться къ нулю, а другой расти до ∞; слѣдовательно сумма всѣхъ этихъ трехъ членовъ будетъ расти до ∞, и потому модуль $\operatorname{cosec}^2(z-\alpha)$ будемъ стремиться къ нулю. Это же будетъ и при x конечномъ, а y стремящемся къ ∞, какъ нетрудно видѣть. Далѣе наименьшее значеніе функція

$$\varphi(y) = \frac{e^{-2y}+e^{+2y}}{2} \tag{12}$$

будетъ имѣть при $y=0$, какъ извѣстно, и оно будетъ $=1$, а потому при $|y|>0$ будетъ $\varphi(y)>1$, слѣдовательно выраженіе (11) при y конечномъ отличномъ отъ нуля и x стремящемся къ ∞ будетъ конечно

и отлично отъ нуля; а потому и модуль $\operatorname{cosec}^2(z-\alpha)$ будетъ конечная величина. Если же $y=0$, то (11) обратится въ такое:

$$2(1-\cos 2x)=4\sin^2 x\,, \tag{13}$$

и слѣдовательно будетъ

$$\text{модуль } \operatorname{cosec}^2(z-\alpha)=\frac{1}{\sin^2 x}\,, \tag{14}$$

что будетъ $=\infty^2$ при $x=k\pi$, притомъ однако такъ, что будетъ имѣть мѣсто равенство (8).

144. Замѣтивъ это, составимъ выраженіе:

$$f(z)=\operatorname{cosec}^2(z-\alpha)-\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k\frac{1}{(z-\alpha-k\pi)^2}\,; \tag{1}$$

входящій сюда рядъ будетъ безусловно-сходящійся, ибо рядъ модулей его членовъ, т. е.

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k\frac{1}{(x-k\pi)^2+y^2} \tag{2}$$

есть сходящійся рядъ, такъ какъ члены его менѣе членовъ сходящагося ряда:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k\frac{1}{(x-k\pi)^2}=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k\frac{1}{k^2}\cdot\frac{1}{\left(\pi-\frac{x}{k}\right)^2}\,, \tag{3}$$

въ которомъ множитель $\frac{1}{\left(\pi-\frac{x}{k}\right)^2}$ стремится къ $\frac{1}{\pi^2}$ съ увеличеніемъ k до ∞, и потому начиная съ извѣстнаго значенія k остается меньше нѣкотораго конечнаго числа L; рядъ же количествъ $\frac{1}{k^2}$:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k\frac{1}{k^2}\,, \tag{4}$$

есть, какъ извѣстно, сходящійся; слѣдовательно выраженіе (1) представляетъ аналитическую функцію, которая однозначна, конечна и не-

прерывна на всей неограниченной плоскости (z). Повидимому она можетъ обращаться въ ∞ для значеній вида

$$z = \alpha + l\pi; \tag{5}$$

но представивъ ее въ такомъ видѣ:

$$f(z) = \operatorname{cosec}^2(z-\alpha) - \frac{1}{(z-\alpha-l\pi)^2} - \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k \frac{1}{(z-\alpha-k\pi)^2}, \tag{6}$$

[гдѣ ($'$) при $\sum$ показываетъ, что членъ, для котораго $k=l$, взятъ изъ суммы], и полагая здѣсь $z=\alpha+l\pi$, мы по (8) пред. § будемъ имѣть:

$$f(\alpha+l\pi) = \frac{1}{3} - \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{k'} \frac{1}{k'^2\pi^2}, \tag{7}$$

гдѣ $k'=k-l$, и слѣдовательно k' не должно быть $=0$ въ $\sum'$; это же есть величина конечная. Если теперь приемемъ $z=\alpha+x+yi$, гдѣ y будетъ конечно, но не $=0$, а x будетъ стремиться къ ∞, то $\operatorname{cosec}^2(z-\alpha)$ будетъ, какъ то видѣли въ пред. §, оставаться конечною, а сумма въ (1) будетъ стремиться къ нулю, такъ какъ каждый ея членъ будетъ безконечно-малая величина второго порядка. Если x и y оба будутъ расти безпредѣльно, то и $\operatorname{cosec}^2(z-\alpha)$, и сумма въ (1), каждое отдѣльно будетъ стремиться къ нулю по пред. § относительно перваго, и по сейчасъ сказанному относительно суммы. Если же y будетъ $=0$, а x будетъ стремиться къ ∞ чрезъ рядъ вещественныхъ значеній, то всякій разъ, какъ онъ будетъ принимать значенія вида $l\pi$, гдѣ l цѣлое число, наша функція будетъ принимать значеніе $f(\alpha+l\pi)$, опредѣляемое формулою (7), которое конечно. Итакъ $f(z)$, опредѣляемая равенствомъ (1), есть функція однозначная, непрерывная и конечная на всей неограниченной плоскости (z); слѣдовательно есть постоянная:

$$f(z) = C; \tag{8}$$

но это постоянное

$$C = 0, \tag{8'}$$

ибо когда x и y вмѣстѣ стремятся къ ∞, то $f(z)$, какъ видѣли, стремится къ нулю. Отсюда слѣдуетъ во первыхъ, что

$$\operatorname{cosec}^2(z-\alpha) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k \frac{1}{(z-\alpha-k\pi)^2} \tag{9}$$

и во вторыхъ

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{3}, \tag{10}$$

или въ виду четности показателя 2:

$$\sum_{1}^{\infty}{}_k \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{11}$$

Равенство (9) и представляетъ искомое разложенiе на частныя дроби функцiи $\operatorname{cosec}^2(z-\alpha)$. Полагая въ немъ $\alpha = 0$, и $\alpha = \frac{\pi}{2}$, получимъ слѣдующiя два разложенiя на частныя дроби функцiй $\operatorname{cosec}^2 z$ и $\sec^2 z$:

$$\operatorname{cosec}^2 z = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k \frac{1}{(z-k\pi)^2}; \tag{12}$$

$$\sec^2 z = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k \frac{1}{\left(z-(2k+1)\frac{\pi}{2}\right)^2}. \tag{13}$$

145. Написавъ (9) пред. § такимъ образомъ:

$$-\frac{1}{\sin^2(z-\alpha)} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k - \frac{1}{(z-\alpha-k\pi)^2}, \tag{1}$$

помножимъ его на dz и проинтегрируемъ отъ $z = z_0$ по пути не проходящему чрезъ точки $z = \alpha + l\pi$; — это мы въ правѣ сдѣлать, ибо рядъ по доказанному въ пред. § есть безусловно-сходящiйся; тогда будемъ имѣть; такъ какъ $\int -\frac{dz}{\sin^2(z-\alpha)} = \operatorname{cotg}(z-\alpha) + C$, слѣдующее:

$$\operatorname{cotg}(z-\alpha) - \operatorname{cotg}(z_0-\alpha) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k \left\{\frac{1}{z-\alpha-k\pi} - \frac{1}{z_0-\alpha-k\pi}\right\}. \tag{2}$$

Написавъ его такъ:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{cotg}(z-\alpha) = \operatorname{cotg}(z_0-\alpha) - \frac{1}{z_0-\alpha} + \\ + \frac{1}{z-\alpha} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k \left\{\frac{1}{z-\alpha-k\pi} - \frac{1}{z_0-\alpha-k\pi}\right\}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

здѣсь можно будетъ принять $z_0 = \alpha$, ибо

$$\text{пред.}\left[\operatorname{cotg}(z_0-\alpha)-\frac{1}{z_0-\alpha}\right]_{z_0=\alpha}=0, \tag{4}$$

какъ то легко найдется по правиламъ дифференціальнаго исчисленія, а тогда (3) обратится въ такое:

$$\operatorname{cotg}(z-\alpha)=\frac{1}{z-\alpha}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k\left\{\frac{1}{z-\alpha-k\pi}+\frac{1}{k\pi}\right\}. \tag{5}$$

Полагая здѣсь $\alpha = 0$, будемъ имѣть:

$$\operatorname{cotg} z=\frac{1}{z}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k\left\{\frac{1}{z-k\pi}+\frac{1}{k\pi}\right\}. \tag{6}$$

Если во (2) положить $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то будемъ имѣть:

$$-\operatorname{tg} z+\operatorname{tg} z_0=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k\left\{\frac{1}{z-(2k+1)\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{z_0-(2k+1)\frac{\pi}{2}}\right\}; \tag{7}$$

отсюда, полагая $z_0 = 0$ и помножая на -1, получимъ:

$$\operatorname{tg} z=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k\left\{\frac{1}{(2k+1)\frac{\pi}{2}-z}-\frac{1}{(2k+1)\frac{\pi}{2}}\right\}. \tag{8}$$

Такъ какъ

$$\operatorname{cosec} z=\frac{1}{2}\left\{\operatorname{cotg}\frac{z}{2}+\operatorname{tg}\frac{z}{2}\right\}, \tag{9}$$

какъ легко видѣть, то вставляя сюда вмѣсто $\operatorname{cotg}\frac{z}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{z}{2}$ ихъ разложенія по формуламъ (6) и (8) этого §, мы будемъ имѣть:

$$\operatorname{cosec} z=\frac{1}{2}\left\{\frac{2}{z}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k\left(\frac{2}{z-2k\pi}+\frac{2}{2k\pi}\right)-\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k\left(\frac{2}{z-(2k+1)\pi}+\frac{2}{(2k+1)\pi}\right)\right\}=$$

$$=\frac{1}{z}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k\left(\frac{1}{z-2k\pi}+\frac{1}{2k\pi}\right)-\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k\left(\frac{1}{z-(2k+1)\pi}+\frac{1}{(2k+1)\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{z}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k(-1)^k\left(\frac{1}{z-k\pi}+\frac{1}{k\pi}\right);$$

итакъ

$$\operatorname{cosec} z = \frac{1}{z} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k' (-1)^k \left(\frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{k\pi} \right). \tag{10}$$

Перемѣняя здѣсь z на $z - \frac{\pi}{2}$, получимъ:

$$-\sec z = \frac{1}{z - \frac{\pi}{2}} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k' (-1)^k \left(\frac{1}{z - (2k+1)\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{k\pi} \right); \tag{11}$$

полагая $z = 0$ и умножая затѣмъ на -1, мы получимъ:

$$1 = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k' (-1)^k \left(\frac{1}{(2k+1)\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{k\pi} \right); \tag{12}$$

складывая это почленно съ предыдущимъ, что по причинѣ безусловной сходимости обоихъ рядовъ позволительно, мы получимъ:

$$1 - \sec z = \frac{1}{z - \frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\frac{\pi}{2}} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k' (-1)^k \left(\frac{1}{z - (2k+1)\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{(2k+1)\frac{\pi}{2}} \right); \tag{13}$$

или, подводя все подъ одну сумму:

$$1 - \sec z = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k (-1)^k \left(\frac{1}{z - (2k+1)\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{(2k+1)\frac{\pi}{2}} \right); \tag{14}$$

отсюда мы будемъ имѣть:

$$\sec z = 1 + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k (-1)^{k+1} \left(\frac{1}{z - (2k+1)\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{(2k+1)\frac{\pi}{2}} \right). \tag{15}$$

Такимъ образомъ мы имѣемъ разложенія на частныя дроби всѣхъ дробныхъ тригонометрическихъ функцій, разложенія безусловно-сходящіяся, если за членъ считать выраженіе въ скобкахъ подъ $\sum$, ибо по приведеніи обоихъ членовъ къ одному знаменателю и сложеніи получимъ дробь, числитель которой не будетъ содержать k, тогда какъ зна-

менатель будетъ второй степени относительно k, а такіе ряды всегда сходящіеся, что докажется такъ-же, какъ и въ § 144, гдѣ мы имѣли подобный случай.

Дифференцируя равенства (10) и (15) этого §, получимъ еще такія два разложенія:

$$\frac{\cos z}{\sin^2 z}=\frac{1}{z^2}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k(-1)^k\frac{1}{(z-k\pi)^2}=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k(-1)^k\frac{1}{(z-k\pi)^2}, \tag{16}$$

$$\frac{\sin z}{\cos^2 z}=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k(-1)^k\frac{1}{\left(z-(2k+1)\frac{\pi}{2}\right)^2}, \tag{17}$$

которыя намъ понадобятся впослѣдствіи.

Если въ (16) перенести $\frac{1}{z^2}$ налѣво, и положить $z=0$, то въ виду того, что

$$\left.\begin{aligned}\left.\frac{z^2\cos z-\sin^2 z}{\sin^2 z\,.\,z^2}\right|_{z=0}&=\left.\frac{z^2\left(1-\frac{z^2}{1\,.\,2}+\ldots\right)-z^2\left(1-2\frac{z^2}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots\right)}{z^4\left(1-2\frac{z^2}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots\right)}\right|_{z=0}=\\&=\frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1}=-\frac{1}{6},\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

мы получимъ:

$$-\frac{1}{6}=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k(-1)^k\frac{1}{(k\pi)^2}; \tag{19}$$

или

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k(-1)^k\frac{1}{k^2}=-\frac{\pi^2}{6}, \tag{20}$$

что тоже будетъ намъ нужно.

146. Соединяя въ формулахъ (6), (8), (10) и (15) пред. § члены, въ которыхъ множители числа π разнятся лишь знаками, какое группированіе членовъ въ безусловно-сходящихся рядахъ позволительно, (ибо наши суммы безусловно-сходящіеся), мы получимъ слѣдующія,

найденныя еще Эйлеромъ разложенія тригонометрическихъ функцій на частныя дроби, именно:

$$\operatorname{cotg} z = \frac{1}{z} + \sum_{1}^{\infty}{}_k \frac{2z}{z^2 - (k\pi)^2}; \tag{1}$$

$$\operatorname{tg} z = \sum_{0}^{\infty}{}_k \frac{2z}{\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right)^2 - z^2}; \tag{2}$$

$$\operatorname{cosec} z = \frac{1}{z} + \sum_{1}^{\infty}{}_k (-1)^k \frac{2z}{z^2 - (k\pi)^2}; \tag{3}$$

$$\sec z = 1 + \sum_{0}^{\infty}{}_k \left\{ \frac{(-1)^{k+1}}{z - (2k+1)\frac{\pi}{2}} + \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)\frac{\pi}{2}} + \frac{(-1)^k}{z + (2k+1)\frac{\pi}{2}} - \frac{(-1)^k}{(2k+1)\frac{\pi}{2}} \right\} =$$

$$= 1 + \sum_{0}^{\infty}{}_k \left\{ \frac{(-1)^{k+1}(2k+1)\pi}{z^2 - (2k+1)^2 \frac{\pi}{4}} + \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} \right\};$$

приводя къ одному знаменателю и складывая дроби, стоящія въ скобкахъ { }, мы получимъ такое разложеніе для $\sec z$:

$$\sec z = 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{0}^{\infty}{}_k \frac{(-1)^{k+1} z^2}{(2k+1)\left(z^2 - (2k+1)^2 \frac{\pi^2}{4}\right)}. \tag{4}$$

147. Полагая во (2) § 145 $z_0 = 0$, мы будемъ имѣть такое равенство:

$$\operatorname{cotg}(z - \alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k \left(\frac{1}{z - \alpha - k\pi} + \frac{1}{\alpha + k\pi} \right); \tag{1}$$

такъ какъ этотъ рядъ безусловно-сходящійся (см. § 145), то его можно интегрировать отъ $z = 0$, (ибо для этого значенія z всѣ члены ряда конечны), по пути непроходящему чрезъ точки $z = \alpha + l\pi$; тогда мы получимъ такую формулу:

$$\log \frac{\sin(z - \alpha)}{\sin(-\alpha)} = -\operatorname{cotg}\alpha . z + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k \left\{ \log\left(1 - \frac{z}{\alpha + k\pi}\right) + \frac{z}{\alpha + k\pi} \right\}. \tag{2}$$

этотъ рядъ тоже безусловно-сходящійся и въ равной степени, ибо по формулѣ Маклореня съ остаточнымъ членомъ Дарбу для $m=2$, $p=1$ [(12) § 23 Введенія] имѣемъ:

$$\log\left(1-\frac{z}{\alpha+k\pi}\right)+\frac{z}{\alpha+k\pi}=-\left(\frac{z}{\alpha+k\pi}\right)^2\frac{\lambda(1-\theta)}{\left(1-\theta\frac{z}{\alpha+k\pi}\right)^2}, \qquad (3)$$

откуда видно, что

$$\text{мод.}\left\{\log\left(1-\frac{z}{\alpha+k\pi}\right)+\frac{z}{\alpha+k\pi}\right\}<\text{мод.}\left(\frac{z}{\alpha+k\pi}\right)^2.L, \qquad (4)$$

гдѣ L конечная величина, такъ какъ съ увеличеніемъ k до ∞ модуль второго множителя въ (3) стремится къ величинѣ не превосходящей 1; мод. $\left(\frac{z}{\alpha+k\pi}\right)^2$ въ числителѣ не содержитъ k, тогда какъ въ знаменателѣ содержитъ его функцію 2-й степени; отсюда слѣдуетъ, что рядъ, составленный изъ этихъ величинъ, а слѣдовательно и рядъ лѣвой части этого неравенства будутъ сходящіеся; слѣдовательно рядъ (2) будетъ безусловно-сходящійся.

Переходя отъ логариѳма къ числу, выведемъ изъ формулы (2) слѣдующую:

$$\frac{\sin(z-\alpha)}{\sin(-\alpha)}=e^{-\operatorname{cotg}\alpha.z}\prod_{-\infty}^{+\infty}{}_k\left(1-\frac{z}{\alpha+k\pi}\right)e^{\frac{z}{\alpha+k\pi}}. \qquad (5)$$

Эту формулу можно и такъ представить, вынося изъ подъ знака произведенія множитель, отвѣчающій $k=0$ и умножая на $\sin(-\alpha)$:

$$\sin(z-\alpha)=e^{-\left(\operatorname{cots}\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)z}\sin(-\alpha)\left(1-\frac{z}{\alpha}\right)\prod_{-\infty}^{+\infty}{}'_k\left(1-\frac{z}{\alpha+k\pi}\right)e^{\frac{z}{\alpha+k\pi}}; \qquad (6)$$

полагая здѣсь $\alpha=0$, и замѣчая, что

$$\text{пред.}\left(\operatorname{cotg}\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)_{\alpha=0}=0, \qquad (7)$$

$$\text{пред.}\left[\sin(-\alpha)\left(1-\frac{z}{\alpha}\right)\right]_{\alpha=0}=\text{пред.}\left[\frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha}(z-\alpha)\right]_{\alpha=0}=0, \qquad (8)$$

мы получимъ разожение $\sin z$ въ безконечное произведеніе, безусловно-сходящееся:

$$\sin z = z \prod_{-\infty}^{+\infty}{}'_k \left(1 - \frac{z}{k\pi}\right) e^{\frac{z}{k\pi}}. \tag{9}$$

Полагая въ (5) $\alpha = \frac{\pi}{2}$, получимъ разложеніе $\cos z$:

$$\cos z = \prod_{-\infty}^{+\infty}{}_k \left(1 - \frac{z}{(2k+1)\frac{\pi}{2}}\right) e^{\frac{z}{2k+1}}, \tag{10}$$

тоже безусловно-сходящееся. Соединяя на этомъ основаніи члены, въ которыхъ множители при π различаются только знакомъ, получимъ разложенія этихъ функцій въ безконечныя произведенія, найденныя еще Эйлеромъ:

$$\sin z = z \prod_{1}^{\infty}{}_k \left(1 - \frac{z^2}{(k\pi)^2}\right), \tag{11}$$

$$\cos z = \prod_{0}^{\infty}{}_k \left(1 - \frac{z^2}{(2k+1)^2 \frac{\pi^2}{4}}\right). \tag{12}$$

148. Разложенія на частныя дроби тригонометрическихъ функцій дробнаго характера, выведенныя въ § 146, и $\sin x$ и $\cos x$ въ безконечныя произведенія, полученныя въ предыдущемъ §, представляющія ихъ разложенія по теоремамъ Миттагъ-Леффлера и Вейерштрасса соотвѣтственно, даютъ возможность легко усмотрѣть періодичность этихъ функцій. Мы это покажемъ на двухъ изъ этихъ формулъ, отличающихся болѣе общимъ характеромъ, чѣмъ другія, именно на формулахъ (1) и (5) предыдущаго §. Измѣняя въ первой изъ этихъ формулъ z на $z+\pi$, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{cotg}(z-\alpha+\pi) &= -\operatorname{cotg}\alpha + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k \left(\frac{1}{z-\alpha-(k-1)\pi} + \frac{1}{\alpha+k\pi}\right) = \\ = -\operatorname{cotg}\alpha &+ \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k \left(\frac{1}{z-\alpha-(k-1)\pi} + \frac{1}{\alpha+(k-1)\pi} + \frac{1}{\alpha+k\pi} + \frac{1}{\alpha+(k-1)\pi}\right) = \\ = -\operatorname{cotg}\alpha &+ \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k \left(\frac{1}{z-\alpha-(k-1)\pi} + \frac{1}{\alpha+(k-1)\pi}\right) + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k \left(\frac{1}{\alpha+k\pi} + \frac{1}{\alpha+(k-1)\pi}\right), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

раздѣляя сумму на двѣ суммы, что мы имѣемъ право сдѣлать, такъ какъ обѣ безусловно-сходящіяся; но первая вмѣстѣ съ $-\mathrm{cotg}\alpha$ составитъ не что иное, какъ $\mathrm{cotg}(z-\alpha)$, ибо эта группа членовъ получается изъ второй части равенства (1) пред. § чрезъ перемѣну k на $k-1$, что въ виду безконечныхъ предѣловъ суммы сводится къ перемѣнѣ названія текущей величины; вторая же сумма равна нулю, ибо каждый второй членъ скобокъ () въ (1) сокращается съ первымъ предшествующаго члена суммы, и это для всѣхъ значеній k отъ $-\infty$ до $+\infty$. Итакъ равенство (1) настоящаго § приводится на основаніи сейчасъ сказаннаго къ такому:

$$\mathrm{cotg}(z-\alpha+\pi)=\mathrm{cotg}(z-\alpha), \tag{2}$$

что и выражаетъ періодичность функціи $\mathrm{cotg} z$.— Перемѣняя z на $z+\pi$ въ равенствѣ (5) пред. § z на $z+\pi$, будемъ имѣть:

$$\frac{\sin(z+\pi-\alpha)}{\sin(-\alpha)}=e^{-\mathrm{cotg}\alpha(z+\pi)}\prod_{-\infty}^{+\infty}{}_k\left(1-\frac{z+\pi}{\alpha+k\pi}\right)e^{\frac{z+\pi}{\alpha+k\pi}}=$$

$$=e^{-\mathrm{cotg}\alpha(z+\pi)}\prod_{-\infty}^{+\infty}{}_k\frac{\alpha-z+(k-1)\pi}{\alpha+\pi+(k-1)\pi}e^{\frac{z+\pi}{\alpha+k\pi}}=$$

$$=e^{-\mathrm{cotg}\alpha(z+\pi)}\prod_{-\infty}^{+\infty}{}_k\frac{\left(1-\frac{z}{\alpha+(k-1)\pi}\right)}{\left(1+\frac{\pi}{\alpha+(k-1)\pi}\right)}e^{\frac{z+\pi}{\alpha+k\pi}}=$$

$$=e^{-\mathrm{cotg}\alpha(z+\pi)}\prod_{-\infty}^{+\infty}{}_k\frac{\left(1-\frac{z}{\alpha+(k-1)\pi}\right)e^{\frac{z}{\alpha+(k-1)\pi}}}{\left(1+\frac{\pi}{\alpha+(k-1)\pi}\right)e^{\frac{-\pi}{\alpha+(k-1)\pi}}}\cdot e^{\left(\frac{1}{\alpha+k\pi}-\frac{1}{\alpha+(k-1)\pi}\right)(z+\pi)},$$

или

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\sin(z+\pi-\alpha)}{\sin(-\alpha)}=\\&=\frac{e^{-\mathrm{cotg}\alpha.z}\prod_{-\infty}^{+\infty}{}_k\left(1-\frac{z}{\alpha+(k-1)\pi}\right)e^{\frac{z}{\alpha+(k-1)\pi}}}{e^{-\mathrm{cotg}\alpha.(-\pi)}\prod_{-\infty}^{+\infty}{}_k\left(1-\frac{-\pi}{\alpha+(k-1)\pi}\right)e^{\frac{-\pi}{\alpha+(k-1)\pi}}}e^{\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k\left(\frac{1}{\alpha+k\pi}-\frac{1}{\alpha+(k-1)\pi}\right)(z-\pi)},\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

ибо оба безконечныя произведенія безусловно-сходящіяся; но стоящее въ числителѣ получается изъ (5) чрезъ перемѣну k на $k-1$, слѣдовательно представляетъ $\frac{\sin(z-\alpha)}{\sin(-\alpha)}$, стоящее въ знаменателѣ получается чрезъ положеніе $z=-\pi$, слѣдовательно представляетъ $\frac{\sin(-\pi-\alpha)}{\sin(-\alpha)}$; второй множитель $=1$, ибо показатель числа e, какъ сейчасъ видѣли, равенъ нулю тождественно; слѣдовательно равенство (3) принимаетъ такой видъ:

$$\frac{\sin(z+\pi-\alpha)}{\sin(-\alpha)}=\frac{\sin(z-\alpha)}{\sin(-\pi-\alpha)},$$

или, переставляя средніе члены пропорціи:

$$\frac{\sin(z+\pi-\alpha)}{\sin(z-\alpha)}=\frac{\sin(-\alpha)}{\sin(-\pi-\alpha)}=C, \tag{4}$$

— постоянной. Полагая здѣсь $z=\alpha$, получимъ неопредѣленность $\frac{0}{0}$; раскрывая ее по правиламъ Дифференціальнаго Исчисленія, получимъ налѣво въ (4):

$$\left.\frac{\sin(z+\pi-\alpha)}{\sin(z-\alpha)}\right|_{z=\alpha}=\frac{\cos\pi}{\cos 0}=-1;$$

слѣдовательно, внося въ (4), найдемъ

$$C=-1, \tag{5}$$

и потому (4) настоящаго § принимаетъ такой видъ:

$$\sin(z+\pi-\alpha)=-\sin(z-\alpha); \tag{6}$$

перемѣняя z на $z+\pi$, будемъ имѣть на основаніи этого же самаго равенства:

$$\sin(z-\alpha+2\pi)=\sin(z-\alpha), \tag{7}$$

что и выражаетъ періодичность функціи $\sin(z-\alpha)$.

149. Переходимъ теперь къ эллиптическимъ функціямъ; начнемъ съ функціи:

$$\wp(u-v), \tag{1}$$

гдѣ v какая либо постоянная. Полагая въ формулѣ (11) § 76 $u'=u-v$, мы будемъ имѣть для u близкихъ къ $u=v+2\tilde{\omega}$ такое разложеніе для нашей функціи:

$$\wp(u-v)=\frac{1}{(u-v-2\tilde{\omega})^2}+(u-v-2\tilde{\omega})^2\mathfrak{P}[(u-v-2\tilde{\omega})^2], \qquad (2)$$

гдѣ $\tilde{\omega}=m\omega+n\omega'$; слѣдовательно $\wp(u-v)$ въ точкахъ

$$u=v+2\tilde{\omega} \qquad (3)$$

обращается въ безконечность второго порядка. Дѣлая тоже положеніе $u'=u-v$ въ равенствѣ (15) того же §, будемъ имѣть для производной отъ (1) такое разложеніе вблизи тѣхъ же значеній u:

$$\wp'(u-v)=-\frac{2}{(u-v-2\tilde{\omega})^3}+(u-v-2\tilde{\omega})\mathfrak{P}_1[(u-v-2\tilde{\omega})^2]: \qquad (4)$$

отсюда получимъ:

$$\text{пред.}\left(\wp'(u-v)+\frac{2}{(u-v-2\tilde{\omega})^3}\right)_{u=v+2\tilde{\omega}}=0. \qquad (5)$$

Составимъ теперь выраженіе:

$$f'(u)=\wp'(u-v)+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n}\frac{2}{(u-v-w)^3}, \qquad (6)$$

гдѣ

$$w=2m\omega+2n\omega', \qquad (7)$$

и сумма распространяется на всѣ цѣлыя значенія каждаго изъ чиселъ m и n отъ $-\infty$ до $+\infty$. Эта сумма представитъ рядъ безусловно и въ одинаковой степени сходящійся. Дѣйствительно, пусть

$$u-v=x+yi, \qquad (8)$$

$$\left.\begin{aligned}\omega&=a+bi,\\ \omega'&=a'+b'i;\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

тогда будетъ

*

$$\left.\begin{array}{l} \text{мод.}\,\dfrac{2}{(u-v-w)^3}=\dfrac{2}{[(x-2ma-2na')^2+(y-2mb-2nb')^2]^{\frac{3}{2}}}= \\ =\dfrac{1}{[(2ma+2na')^2+(2mb+2nb')^2]^{\frac{3}{2}}}\cdot\dfrac{2}{\left\{1-\dfrac{4x(ma+na')+4y(mb+nb')-x^2-y^2}{(2ma+2na')^2+(2mb+2nb')^2}\right\}^{\frac{3}{2}}}; \end{array}\right\} \quad (10)$$

но численное значеніе второго члена выраженія въ скобкахъ { } будетъ съ увеличеніемъ m и n до безконечности стремиться къ нулю, ибо нѣтъ такихъ цѣлыхъ значеній m и n, чтобы было заразъ:

$$ma+na'=0\,,$$

$$mb+nb'=0\,,$$

кромѣ $m=0$, $n=0$, такъ какъ опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \text{ не} = 0\,;$$

слѣдовательно всегда можно найти такія значенія для m и n, что для этихъ значеній и бо́льшихъ будетъ имѣть мѣсто неравенство:

$$\left|\frac{4x(ma+na')+4y(mb+nb')-x^2-y^2}{(2ma+2na')^2+(2mb+2nb')^2}\right|<\varepsilon^2<1\,, \qquad (11)$$

(гдѣ $\varepsilon>0$); для всѣхъ такихъ значеній будетъ по (10)

$$\text{мод.}\left(\frac{2}{(u-v-w)^3}\right)<\frac{L}{[(2ma+2na')^2+(2mb+2nb')^2]^{\frac{3}{2}}}\,; \qquad (12)$$

гдѣ L конечное число, удовлетворяющее неравенству:

$$\frac{2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\leq L; \qquad (13)$$

отсюда слѣдуетъ, что рядъ модулей членовъ нашего ряда (6) будетъ сходящійся, если бедетъ сходящимся рядъ:

$$\sum_{m,n\,-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{[(2ma+2na')^2+(2mb+2nb')^2]^{\frac{3}{2}}} \qquad (14)$$

(гдѣ нѣтъ члена для $m=0$, $n=0$); ибо рядъ модулей членовъ ряда (6) можно разбить на двѣ части, изъ которыхъ одна будетъ состоять

изъ конечнаго числа членовъ, другая изъ безконечнаго числа членовъ, въ которыхъ m и n имѣютъ значенія, удовлетворяющія неравенству (11); сумма первыхъ очевидно будетъ конечная, какъ составленная изъ конечнаго числа конечныхъ величинъ; вторая же сумма будетъ состоять изъ членовъ меньшихъ соотвѣтственно членовъ ряда (14). Но этотъ рядъ (14) представляетъ частный случай ряда въ (1) § 34 Введенія, когда именно будетъ

$$\varphi = [(2ma + 2na')^2 + (2mb + 2nb')^2]^{\frac{3}{2}}, \tag{15}$$

а $\psi = 0$; измѣреніе однородной функціи φ болѣе 2, ибо равно 3; а потому, какъ доказано въ упомянутомъ §, этотъ рядъ (14), а слѣдовательно и рядъ модулей членовъ суммы:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n} \frac{2}{(u-v-w)^3} \tag{16}$$

будутъ сходящіеся ряды; и слѣдовательно этотъ рядъ (16) будетъ безусловно-сходящимся рядомъ, и потому выраженіе (1) представитъ аналитическую функцію.

150. Эта аналитическая функція $f'(u)$ [(1) пред. §] есть двоякопеGріодическая съ періодами 2ω и $2\omega'$, въ чемъ легко убѣдиться (хотя для далѣе слѣдующаго вывода это не требуется). Дѣйствительно, перемѣняя u на $u + 2\omega$ въ (1) пред. §, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} f'(u + 2\omega) &= \wp'(u + 2\omega - v) + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n} \frac{2}{(u - v + 2\omega - w)^3} = \\ &= \wp'(u - v) + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n} \frac{2}{[u - v - 2(m-1)\omega - 2n\omega']^3}; \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

но $m - 1$ пробѣгаетъ при измѣненіи m отъ $-\infty$ до $+\infty$ тотъ же самый рядъ значеній; слѣдовательно послѣдняя сумма тождественна съ суммою въ (1) пред. §; слѣдовательно:

$$f'(u + 2\omega) = \wp'(u - v) + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n} \frac{2}{(u-v-w)^3}, \tag{2}$$

т. е.

$$f'(u+2\omega) = f'(u). \tag{3}$$

Также точно докажется и слѣдующее равенство

$$f'(u+2\omega')=f'(u), \tag{4}$$

а изъ (3) и (4) и слѣдуетъ двоякая періодичность нашей функціи. Изъ (3) и (4) чрезъ повтореніе найдемъ, что вообще:

$$f'(u+2\tilde{\omega})=f'(u), \tag{5}$$

гдѣ $\tilde{\omega}$ имѣетъ прежнее значеніе.

Эта функція однозначна, какъ составленная изъ однозначной функціи $\wp'(u)$ и изъ суммы (16) пред. §, содержащей лишь раціональныя дѣйствія. Но она и конечна на всей неограниченной плоскости (u). Дѣйствительно, выводя изъ суммы членъ, въ которомъ $m=p$, $n=q$, и обозначая это обстоятельство штрихомъ при суммѣ, мы можемъ нашу функцію такъ представить:

$$\left.\begin{aligned} f'(u)=\wp'(u-v)+\frac{2}{(u-v-2p\omega-2q\omega')^3}+\\ +\sum_{m,n}{}'^{+\infty}_{-\infty}\frac{2}{(u-v-w)^3}; \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

полагая теперь

$$u=v+2p\omega+2q\omega', \tag{7}$$

мы по 5 пред. § будемъ имѣть:

$$f'(v+2p\omega+2q\omega')=-\sum_{m',n'}{}'^{+\infty}_{-\infty}\frac{2}{(2m'\omega+2n'\omega')^3}, \tag{8}$$

полагая

$$m-p=m', \qquad n-q=n';$$

но послѣдняя сумма въ (8) будетъ $=0$ тождественно, ибо ея члены будутъ попарно равны, но съ противнымъ знакомъ, такъ что членъ, для котораго $m'=+\mu$, $n'=+\nu$, сократится съ членомъ, для котораго $m'=-\mu$, $n'=-\nu$. Слѣдовательно

$$f'(v+2p\omega+2q\omega')=0. \tag{9}$$

Такимъ образомъ единственныя значенія, для которыхъ функція $f'(u)$ могла бы обратиться въ ∞, на самомъ дѣлѣ обращаютъ ее въ

нуль; слѣдовательно она вездѣ конечна; но однозначная, непрерывная и вездѣ конечная функція есть постоянная; слѣдовательно

$$f'(u) = C; \tag{10}$$

изъ (9)-же слѣдуетъ, что эта постоянная $C = 0$; слѣдовательно

$$f'(u) = 0, \tag{11}$$

а отсюда по (1) пред. § получаемъ:

$$\wp'(u-v) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n} \frac{-2}{(u-v-w)^3}. \tag{12}$$

151. Этотъ рядъ знакомъ лишь отличается отъ (16) § 149; слѣдовательно есть, какъ и тотъ, безусловно и въ равной степени сходящійся; а потому можетъ быть интегрированъ. Итакъ интегрируя обѣ части (12) пред. § отъ $u = 0$, (что возможно, ибо всѣ члены конечны для $u = 0$,) по пути не проходящему чрезъ точки:

$$u = v + 2\tilde{\omega}, \tag{1}$$

мы будетъ имѣть:

$$\wp(u-v) - \wp(-v) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n} \left(\frac{1}{(u-v-w)^2} - \frac{1}{(v+w)^2}\right), \tag{2}$$

откуда, въ виду четности функціи $\wp(u)$, получимъ такое разложеніе на частныя дроби функціи $\wp(u-v)$:

$$\wp(u-v) = \wp(v) + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n} \left(\frac{1}{(u-v-w)^2} - \frac{1}{(v+w)^2}\right). \tag{3}$$

Это можно написать и такимъ образомъ, выдѣливъ изъ суммы членъ ($m = 0$, $n = 0$):

$$\left.\begin{aligned} \wp(u-v) = \wp(v) - \frac{1}{v^2} + \frac{1}{(u-v)^2} + \\ + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n} \left(\frac{1}{(u-v-w)^2} - \frac{1}{(v+w)^2}\right), \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

полагая здѣсь $v=0$, и имѣя въ виду, что

$$\text{пред.}\left(\wp(v)-\frac{1}{v^2}\right)_{v=0}=0 \tag{5}$$

по (5) § 76, мы получимъ отсюда разложеніе функціи $\wp(u)$ Вейерштрасса:

$$\wp(u)=\frac{1}{u^2}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}\left(\frac{1}{(u-w)^2}-\frac{1}{w^2}\right). \tag{6}$$

Полагая здѣсь $u=\omega_i$, и вводя обозначеніе

$$w_i=w-\omega_i\,, \tag{7}$$

мы получимъ:

$$e_i=\wp(\omega_i)=\frac{1}{\omega_i^2}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}\left(\frac{1}{w_i^2}-\frac{1}{w^2}\right). \tag{8}$$

Смотря по значенію i будетъ здѣсь:

$$\left.\begin{aligned} w_1&=(2m-1)\omega+2n\omega'\,;\\ w_2&=(2m-1)\omega+(2n-1)\omega'\,;\\ w_3&=2m\omega+(2n-1)\omega'. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Полагая въ (3) $v=\pm\,\omega_i$, будемъ имѣть:

$$\wp(u\mp\omega_i)=e_i+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n}\left(\frac{1}{(u-w_i)^2}-\frac{1}{w_i^2}\right), \tag{10}$$

гдѣ

$$w_i=w\pm\omega_i. \tag{11}$$

Но какой бы знакъ мы ни взяли здѣсь, сумма во второй части будетъ таже самая, ибо перемѣна знака предъ ω_i въ (11) одного на другой отвѣчаетъ измѣненію одного изъ чиселъ m и n, или обоихъ, въ число на единицу большее, или меньшее, а это сводится къ перемѣнѣ обозначенія текущей величины; потому изъ (10) будетъ слѣдовать:

$$\wp(u+\omega_i)=\wp(u-\omega_i)\,, \tag{12}$$

или, измѣняя u на $u+\omega_{,}$:

$$\wp(u+2\omega_{,})=\wp(u), \tag{13}$$

что показываетъ періодичность нашей функціи $\wp(u)$, которая будетъ двоякая, ибо третій періодъ есть линейная функція двухъ другихъ: $\omega_2=\omega''=\omega+\omega'$. Вотъ какимъ образомъ разложеніе на частныя дроби (10) выказываетъ двоякую періодичность функціи $\wp(u)$.

152. Рядъ (3) пред. § есть безусловно и въ равной степени сходящійся. Дѣйствительно, общему члену его можно дать такой видъ:

$$\frac{1}{(u-v-w)^2}-\frac{1}{(v+w)^2}=\frac{2u}{(v+w)^3}\cdot\frac{1-\dfrac{u}{2(v+w)}}{\left(1-\dfrac{u}{v+w}\right)^2}; \tag{1}$$

но модуль второго множителя для значеній m и n бо́льшихъ нѣкоторыхъ конечныхъ чиселъ остается ниже нѣкотораго конечнаго числа L. Въ самомъ дѣлѣ, если

$$v=\alpha+\beta i, \tag{2}$$

то, такъ какъ по (8) § 149 $u=v+x+yi$, будетъ

$$\text{мод.}\, u<\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}; \tag{3}$$

а потому будетъ

$$\text{мод.}\,\frac{1-\dfrac{u}{2(v+w)}}{\left(1-\dfrac{u}{v+w}\right)^2}<\frac{1+\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2\sqrt{(2ma+2na'+\alpha)^2+(2mb+2nb'+\beta)^2}}}{\left(1-\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\sqrt{(2ma+2na'+\alpha)^2+(2mb+2nb'+\beta)^2}}\right)^2}; \tag{4}$$

если v не $=2\varpi$, что предполагаемъ, то не можетъ быть заразъ

$$\left.\begin{aligned}2ma+2na'+\alpha=0,\\ 2mb+2nb'+\beta=0,\end{aligned}\right\}$$

а потому съ увеличеніемъ m и n до безконечности вторые члены числителя и знаменателя во второй части неравенства будутъ убывать до нуля, эта вторая часть будетъ стремиться къ единицѣ, а потому всег-

да найдутся такія значенія m и n, что для этихъ значеній и всѣхъ бо́льшихъ будетъ имѣть мѣсто неравенство

$$\text{мод.}\frac{1-\dfrac{u}{2(v+w)}}{\left(1-\dfrac{u}{v+w}\right)^2}<L, \tag{5}$$

гдѣ L конечное положительное число, бо́льшое единицы. Для такихъ значеній m и n будетъ по (1) настоящ. §:

$$\text{мод.}\left(\frac{1}{(u-v-w)^2}-\frac{1}{(v+w)^2}\right)<\text{мод.}\frac{1}{(v+w)^3}\cdot 2u\cdot L; \tag{6}$$

рядъ же

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}\ \text{мод.}\frac{1}{(v+w)^3}, \tag{7}$$

лишь постояннымъ множителемъ отличается отъ ряда модулей членовъ суммы, входящей въ (6) § 149, сходимость котораго была доказана въ томъ § для всякаго u, — для частнаго значенія u, именно $u=0$; слѣдовательно этотъ рядъ есть сходящійся, какъ и тотъ, а отсюда и слѣдуетъ, что рядъ (3) пред. § есть безусловно и въ равной степени сходящійся, что и требовалось доказать.

153. Вычитая равенство (3) § 151 изъ тождества: $c'=c'$, получимъ:

$$c'-\wp(u-v)=c'-\wp(v)+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n}\left(\frac{-1}{(u-v-w)^2}+\frac{1}{(v+w)^2}\right); \tag{1}$$

помножая это на du и интегрируя отъ $u=0$, — что возможно, такъ какъ этотъ рядъ по сейчасъ доказанному есть безусловно и въ равной степени сходящійся, и всѣ члены его для $u=0$ остаются конечными, — по пути, разумѣется, не проходящему чрезъ точки $u=v+2\tilde{\omega}$, мы будемъ имѣть:

$$\int_0^u[c'-\wp(u-v)]du=[c'-\wp(v)]u+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n}\left(\frac{1}{u-v-w}+\frac{1}{v+w}+\frac{u}{(v+w)^2}\right). \tag{2}$$

Но

$$\left.\begin{aligned}\int_0^u [c'-\wp(u-v)]du = \int_{-v}^{u-v}[c'-\wp(u')]du' = \zeta(u-v)-\zeta(-v) = \\ = \zeta(u-v)+\zeta(v),\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

— такъ какъ $\zeta(-v) = -\zeta(v)$; далѣе

$$c' - \wp(v) = \zeta'(v); \quad (4)$$

внося это во (2), получимъ:

$$\zeta(u-v)+\zeta(v)=\zeta'(v)u+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n}\left(\frac{1}{u-v-w}+\frac{1}{v+w}+\frac{u}{(v+w)^2}\right). \quad (5)$$

Это можно и такъ представить, выдѣляя изъ суммы членъ ($m=0$, $n=0$):

$$\left.\begin{aligned}\zeta(u-v) = -\zeta(v)+\frac{1}{v}+\left(\zeta'(v)+\frac{1}{v^2}\right)u+ \\ +\frac{1}{u-v}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}\left(\frac{1}{u-v-w}+\frac{1}{v+w}+\frac{u}{(v+w)^2}\right);\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

полагая здѣсь $v=0$, и имѣя въ виду, что

$$\text{пред.}\left(\zeta(v)-\frac{1}{v}\right)_{v=0}=0, \quad (7)$$

$$\text{пред.}\left(\zeta'(v)+\frac{1}{v^2}\right)_{v=0} = \text{пред.}\left(c'-\wp(v)+\frac{1}{v^2}\right)=c', \quad (8)$$

получимъ разложеніе функціи $\zeta(u)$ на частныя дроби:

$$\zeta(u)=c'u+\frac{1}{u}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}\left(\frac{1}{u-w}+\frac{1}{w}+\frac{u}{w^2}\right). \quad (9)$$

Полагая здѣсь $u=\omega_i$, по (11) пред. § будемъ имѣть:

$$\eta_i=\zeta(\omega_i)=c'\omega_i+\frac{1}{\omega_i}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}\left(\frac{-1}{w_i}+\frac{1}{w}+\frac{\omega_i}{w^2}\right). \quad (10)$$

Полагая въ (5) $v = \pm\omega_i$, будемъ имѣть:

$$\zeta(u \mp \omega_i) \pm \eta_i = \zeta'(\pm\omega_i)u + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n}\left(\frac{1}{u-w_i} + \frac{1}{w_i} + \frac{u}{w_i^2}\right), \qquad (11)$$

гдѣ $w_i = w \pm \omega_i$. Но

$$\zeta'(\pm\omega_i) = c' - \wp(\pm\omega_i) = c' - e_i; \qquad (12)$$

потому предыдущее разложенie можно и такъ написать:

$$\zeta(u \mp \omega_i) \pm \eta_i = (c' - e_i)u + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n}\left(\frac{1}{u-w_i} + \frac{1}{w_i} + \frac{u}{w_i^2}\right). \qquad (13)$$

Вторая часть остается тождественно таже самая, возьмемъ-ли мы верхнiй или нижнiй знакъ предъ ω_i въ выраженiи ω_i; слѣдовательно

$$\zeta(u + \omega_i) - \eta_i = \zeta(u - \omega_i) + \eta_i; \qquad (14)$$

или

$$\zeta(u + \omega_i) - \zeta(u - \omega_i) = 2\eta_i; \qquad (15)$$

а перемѣняя здѣсь u на $u + \omega_i$, получимъ:

$$\zeta(u + 2\omega_i) = \zeta(u) + 2\eta_i, \qquad (16)$$

что выражаетъ перiодичность второго рода функцiи $\zeta(u)$; η_i есть модуль этой перiодичности; формула (5) этого § даетъ его разложенie на частныя дроби.

154. Предыдущiе ряды безусловно и въ равной степени сходящiеся; достаточно опять доказать это для ряда (3) пред. §, какъ болѣе общаго изъ нихъ. Общiй членъ этого ряда по приведенiя къ одному знаменателю и сложенiи членовъ его такъ представится:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{u-v-w} + \frac{1}{v+w} + \frac{u}{(v+w)^2} = \frac{u^2}{(u+v)^2(u-v-w)} = \\ &\qquad = \frac{1}{(v+w)^3}\cdot\frac{-u^2}{1-\dfrac{u}{v+w}}; \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

слѣдовательно

$$\text{мод.}\left\{\frac{1}{u-v-w}+\frac{1}{v+w}+\frac{u}{(v+w)^2}\right\}=\text{мод.}\left(\frac{1}{(v+w)^2}\right)\text{мод.}\left(\frac{-u}{1-\frac{u}{v+w}}\right); \quad (2)$$

но легко видѣть, что

$$\text{мод.}\left(\frac{-u^2}{1-\frac{u}{v+w}}\right)<\frac{(\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{\alpha^2+\beta^2})^2}{1-\frac{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\sqrt{(2ma+2na'+\alpha)^2+(2mb+2nb'+\beta)^2}}}; \quad (3)$$

здѣсь съ увеличеніемъ m и n до ∞, вторая часть стремится къ ея числителю; слѣдовательно всегда можно найти такія значенія m и n, что для этихъ значеній и большихъ этихъ будетъ

$$\text{мод.}\left(\frac{-u^2}{1-\frac{u}{v+w}}\right)<L, \quad (4)$$

гдѣ L конечная величина; но тогда по (2) будетъ

$$\text{мод.}\left\{\frac{1}{u-v-w}+\frac{1}{v+w}+\frac{u}{(v+w)^2}\right\}<\text{мод.}\left(\frac{1}{(v+w)^3}\right).L; \quad (5)$$

рядъ же изъ количествъ направо здѣсь стоящихъ лишь постояннымъ множителемъ отличается отъ ряда (7) § 152, сходимость котораго тамъ доказана; а отсюда слѣдуетъ сходимость его, а слѣдовательно по (5) и ряда модулей занимающаго насъ ряда (5) пред. §; слѣдовательно этотъ послѣдній есть безусловно и въ равной степени сходящійся.

155. Но такой рядъ можно интегрировать; помноживъ (5) § 153 на du и интегрируя отъ $u=0$, такъ какъ всѣ члены его для этого значенія u остаются конечными, по пути, непроходящему чрезъ точки:

$$u=v+2\tilde{\omega}, \quad (1)$$

мы будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^u \zeta(v-u)du+\zeta(v)u=\zeta'(v)\frac{u^2}{2}+\\&+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n}\left\{\log\left(1-\frac{u}{v+w}\right)+\frac{u}{v+w}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{(v+w)^2}\right\};\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

но

$$\int_0^u \zeta(u-v)du = \int_{-v}^{u-v} \zeta(u')du' = Y(u-v) - Y(-v)\,; \tag{3}$$

внося это въ предыдущее, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} &Y(u-v) - Y(-v) + \zeta(v)u = \\ &= \zeta'(u)\frac{u^2}{2} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n}\left\{\log\left(1-\frac{u}{v+w}\right) + \frac{u}{v+w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{(v+w)^2}\right\}.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Беря обѣ части этого равенства показателемъ степени числа $e = 2{,}71828182865\ldots$, по (1) § 91 получимъ отсюда:

$$\frac{\Theta(u-v)}{\Theta(-v)}e^{\zeta(v)u} = e^{\zeta'(v)\frac{u^2}{2}}\prod_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n}\left(1-\frac{u}{v+w}\right)e^{\frac{u}{v+w}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{(v+w)^2}}. \tag{5}$$

Выдѣляя здѣсь изъ подъ знака П произведенія множитель, для котораго $m=0$, $n=0$, и помножая обѣ части этого равенства затѣмъ на

$$-ve^{-\zeta(v)u},$$

мы будемъ имѣть:

$$\frac{-v}{\Theta(-v)}\Theta(u-v) = E(v)(u-v)\prod_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}\left(1-\frac{u}{v+w}\right)e^{\frac{u}{v+w}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{(v+w)^2}}, \tag{6}$$

гдѣ

$$E(v) = e^{\left(\zeta'(v)+\frac{1}{v^2}\right)\frac{u^2}{2} - \left(\zeta(v)-\frac{1}{v}\right)u}\,; \tag{7}$$

если положить $v=0$, то на основаніи (7) и (8) § 153 получимъ:

$$E(0) = e^{c'\frac{u^2}{2}}\,; \tag{8}$$

кромѣ того будетъ

$$\text{пред.}\left.\frac{-v}{\Theta(-v)}\right|_{v=0} = \frac{1}{\Theta'(0)}, \tag{9}$$

и потому для $v=0$ (6) переходитъ въ такое:

$$\frac{\Theta(u)}{\Theta'(0)}=e^{c'\frac{u^2}{2}}u\prod_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}\left(1-\frac{u}{w}\right)e^{\frac{u}{w}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}}; \tag{10}$$

такимъ образомъ мы получили разложенiе основной Θ-функцiи на множители. Полагая въ (5) $v=\pm\omega_i$, и имѣя въ виду (12) § 153, а также что $\zeta(\pm\omega_i)=\pm\eta_i$, мы будемъ имѣть:

$$\frac{\Theta(u\mp\omega_i)}{\Theta(\mp\omega_i)}e^{\pm\eta_i u}=e^{(c'-e_i)\frac{u^2}{2}}\prod_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n}\left(1-\frac{u}{w_i}\right)e^{\frac{u}{w_i}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{w_i^2}}, \tag{11}$$

гдѣ $w_i=w\pm\omega_i$. Но по (4) § 98 лѣвая часть этого равенства есть не что иное, какъ союзная $\frac{\Theta_i(u)}{\Theta'(0)}$; слѣдовательно мы имѣемъ въ (11) ея разложенiе на множители:

$$\frac{\Theta_i(u)}{\Theta'(0)}=e^{(c'-e_i)\frac{u^2}{2}}\prod_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n}\left(1-\frac{u}{w_i}\right)e^{\frac{u}{w_i}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{w_i^2}}. \tag{12}$$

Вторая часть въ (11) не зависитъ отъ знака предъ ω_i въ выраженiи w_i; слѣдовательно мы имѣемъ оттуда:

$$\frac{\Theta(u+\omega_i)}{\Theta(+\omega_i)}e^{-\eta_i u}=\frac{\Theta(u-\omega_i)}{\Theta(-\omega_i)}e^{\eta_i u}, \tag{13}$$

откуда, имѣя въ виду нечетность $\Theta(u)$, слѣдуетъ:

$$\Theta(u+\omega_i)=-\Theta(u-\omega_i)e^{2\eta_i u}; \tag{14}$$

перемѣняя здѣсь u на $u+\omega_i$, будемъ имѣть:

$$\Theta(u+2\omega_i)=-\Theta(u)e^{2\eta_i(u+\omega_i)}; \tag{15}$$

вотъ какимъ образомъ вытекаетъ это функцiональное уравненiе основной $\Theta(u)$ изъ ея разложенiя на множители.

156. Полученныя разложенiя $\Theta(u)$ и ея союзной суть разложенiя по теоремѣ Вейерштрасса. Они безусловно и въ одинаковой степени

сходящіяся; для доказательства нужно изслѣдовать сходимость ряда, выражающаго ихъ логариѳмъ; это достаточно сдѣлать для разложенія (5) пред. §, логариѳмъ котораго выражается рядомъ (4) того же §. Общій членъ суммы въ сейчасъ упомянутой формулѣ (4), по формулѣ

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - x^3\lambda\frac{(1-\theta)^2}{(1-\theta x)^3}, \tag{1}$$

такъ преобразуется:

$$\log\left(1-\frac{u}{v+w}\right)+\frac{u}{v+w}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{(v+w)^2} = -\frac{1}{(v+w)^3}\cdot\frac{\lambda u^3(1-\theta)^2}{\left(1-\theta\frac{u}{v+w}\right)^3}; \tag{2}$$

модуль этого выраженія будетъ:

$$\left.\begin{aligned}&\text{мод.}\left\{\log\left(1-\frac{u}{v+w}\right)+\frac{u}{v+w}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{(v+w)^2}\right\}=\\&=\text{мод.}\left(\frac{-1}{v+w}\right)^3\cdot\text{мод.}\frac{\lambda u^3(1-\theta)^2}{\left(1-\theta\frac{u}{v+w}\right)^3};\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

но

$$\text{мод.}\frac{\lambda u^3(1-\theta)^2}{\left(1-\theta\frac{u}{v+w}\right)^3} < \frac{(\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{\alpha^2+\beta^2})^3}{\left(1-\frac{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\sqrt{(2ma+2na'+\alpha)^2+(2m+2na'+\beta)^2}}\right)^3}; \tag{4}$$

(мод. $\lambda \leq 1$); вторая часть этого неравенства лишь конечнымъ множителемъ $(\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{\alpha^2+\beta^2})^{-3}$ отличается отъ третьей степени второй части неравенства (3) § 154; слѣдовательно, имѣя въ виду сказанное тамъ, заключаемъ, что всегда можно найти такія значенія m и n, что для этихъ значеній ихъ и всѣхъ бо́льшихъ будетъ

$$\text{мод.}\left(\frac{\lambda u^3(1-\theta)^2}{\left(1-\theta\frac{u}{v+w}\right)^3}\right) < L_1, \tag{5}$$

гдѣ L_1 конечная величина; и слѣдовательно по (3) настоящаго §:

$$\text{мод.}\left\{\log\left(1-\frac{u}{v+w}\right)+\frac{u}{v+w}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{(v+w)^2}\right\} < \text{мод.}\left(\frac{1}{v+w}\right)^3 . L_1, \tag{6}$$

рядъ же изъ послѣднихъ количествъ есть сходящійся, какъ мы видѣли въ § 154; а отсюда слѣдуетъ сходимость ряда изъ количествъ лѣвой части этого неравенства, слѣдовательно безусловная сходимость ряда (4) пред. §, и безконечнаго произведенія (5) того же §, а также, прочихъ изъ него выведенныхъ.

157. Если въ (10) и (12) § 155 положить $c'=0$, то будемъ имѣть функціи, обозначаемыя Вейерштрассомъ буквою σ такимъ образомъ:

$$\sigma(u)=u\prod_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}\left(1-\frac{u}{w}\right)e^{\frac{u}{w}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}}; \tag{1}$$

$$\sigma_i(u)=e^{-\frac{1}{2}e_iu^2}\prod_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n}\left(1-\frac{u}{w_i}\right)e^{\frac{u}{w_i}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{w_i^2}}; \tag{2}$$

(гдѣ $w_i=w+\omega_i$), и потому извѣстныя подъ названіемъ *сигма-функцій* (σ-Function). Изъ (1) и (2) слѣдуетъ, что

$$\sigma'(0)=\sigma_i(0)=1. \tag{3}$$

Соотношеніе между $\Theta_i(u)$ и $\Theta(u)$ [(4) § 198], перейдетъ въ соотношеніе между $\sigma_i(u)$ и $\sigma(u)$:

$$\sigma_i(u)=\pm\frac{\sigma(u\pm\omega_i)e^{\mp\eta_i u}}{\sigma(\omega_i)}. \tag{4}$$

Сравнивая (1) и (2) этого § съ (10) и (12) § 155, получимъ такія соотношеія между общей $\Theta(u)$ и $\sigma(u)$, и ихъ союзными, полагая при этомъ:

$$\Theta'(0)=e^{c''}, \tag{5}$$

именно:

$$\Theta(u)=e^{\frac{1}{2}c'u^2+c''}\sigma(u); \tag{6}$$

$$\Theta_i(u)=e^{\frac{1}{2}c'u^2+c''}\sigma_i(u). \tag{7}$$

Отсюда видно, что всѣ формулы, въ которыя входятъ отношенія Θ-функцій, общнѣе всѣ однородныя формулы относительно этихъ величинъ для однихъ и тѣхъ же значеній аргумента, переходятъ въ такія же формулы съ $\sigma(u)$ и $\sigma_i(u)$. Таковы напримѣръ выраженія $\sqrt{\wp(u)-e_i}$ чрезъ Θ-функціи; мы будемъ имѣть точно также:

$$\sqrt{\wp(u)-e_i}=\frac{\sigma_i(u)}{\sigma(u)}; \tag{8}$$

соотношеніе (3) § 108 перейдемъ въ такое:

$$(e_2-e_3)\sigma_1(u)+(e_3-e_1)\sigma_2(u)+(e_1-e_2)\sigma_3(u)=0. \tag{9}$$

Прочія формулы §§ 101—124 перейдутъ въ формулы съ σ совершенно такого же вида, если примемъ тамъ $c'=0$, $c''=0$; читатель найдетъ эти формулы у Schwartz'а и Halphen'а. Нужно однако замѣтить, что величины η_i будутъ въ Вейерштрассовскихъ формулахъ имѣть другія значенія; отличая Вейерштрассовскія отъ нашихъ чертою сверху η, мы будемъ имѣть:

$$\bar{\eta}_i=\frac{1}{2}\int_{-\omega_i}^{+\omega_i}[-\wp(u)]du, \tag{10}$$

тогда какъ мы имѣемъ по § 83:

$$\eta_i=\frac{1}{2}\int_{-\omega_i}^{+\omega_i}[c'-\wp(u)]du; \tag{11}$$

отсюда слѣдуетъ, что

$$\eta_i=c'\omega_i+\bar{\eta}_i. \tag{12}$$

Въ качествѣ частнаго вида Θ-функцій функціи $\sigma(u)$ и $\sigma_i(u)$ будутъ удовлетворять такимъ же функціональнымъ уравненіямъ:

$$\sigma(u+2\omega_i)=-e^{2\bar{\eta}_i(u+\omega_i)}\sigma(u); \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_i(u+2\omega_i)&=-e^{2\bar{\eta}_i(u+\omega_i)}\sigma_i(u);\\ \sigma_i(u+2\omega_j)&=+e^{2\bar{\eta}_j(u+\omega_j)}\sigma_i(u).\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

158. Опредѣленіе $\sigma(u)$ при помощи интеграла получится изъ опредѣленія $\Theta(u)$ формулою (1) § 91. Функція $\zeta(u)$ чрезъ положеніе $c'=0$ въ формулѣ (3) § 91 перейдетъ въ такую:

$$\zeta_0(u)=\frac{1}{2}\int_{-u}^{+u}-\wp(u)du\,, \tag{1}$$

и функція $Y(u)$ по (2) того же § перейдетъ въ функцію $Y_0(u)$:

$$Y_0(u)=\int_{u_0}^{u}\zeta_0(u)du+C; \tag{2}$$

слѣдовательно (1) § 91 перейдетъ для $c'=0$ въ такое:

$$\Theta_0(u)=e^{Y_0(u)}=e^{\int_{u_0}^{u}\frac{1}{2}\int_{-u}^{+u}-\wp(u)du\,du+C}, \tag{3}$$

гдѣ постоянную C остается опредѣлить изъ условія, что $\sigma'(0)=1$; тогда будетъ $\Theta_0(u)=\sigma(u)$. Для этого будемъ искать отношеніе $\frac{\Theta_0(u)}{u}$; его можно такъ представить:

$$\frac{\Theta_0(u)}{u}=\Theta_0(u)e^{-\log u}; \tag{4}$$

а $-\log u$ можно выразить двойнымъ интеграломъ; въ самомъ дѣлѣ:

$$\frac{1}{2}\int_{-u}^{+u}\frac{du}{u^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{u}\right)_{-u}^{+u\,*)}=-\frac{1}{u}; \tag{5}$$

помножая на du и интегрируя отъ $u=u_0$, будемъ имѣть:

$$\int_{u_0}^{u}\frac{1}{2}\int_{-u}^{+u}\frac{du}{u^2}\,du=-\log u+\log u_0\,, \tag{6}$$

откуда и получимъ:

$$-\log u=\int_{u_0}^{u}\frac{1}{2}\int_{-u}^{+u}\frac{du}{u^2}\,du-\log u_0; \tag{7}$$

*) Интегрируя по пути непроходящему чрезъ $u=0$.

*

внося это въ (4), а также и значеніе $\Theta_0(u)$ изъ (3), будемъ имѣть:

$$\frac{\Theta_0(u)}{u} = e^{\int_{u_0}^{u} \frac{1}{2}\int_{-u}^{+u}\left(\frac{1}{u^2} - \wp(u)\right) du\, du + C'}, \tag{8}$$

гдѣ $C' = C - \log u_0$. Но функція

$$\frac{1}{u^2} - \wp(u) = -u^2 \mathfrak{P}(u^2) \tag{9}$$

по (6) § 76 для значеній и близкихъ къ $u = 0$; слѣдовательно ее можно интегрировать отъ нуля, и тогда, въ виду четности ея, мы будемъ имѣть:

$$\frac{1}{2}\int_{-u}^{+u}\left(\frac{1}{u^2} - \wp(u)\right) du = \int_{0}^{u}\left(\frac{1}{u^2} - \wp(u)\right) du\,; \tag{10}$$

эта функція тоже остается конечною вблизи $u = 0$, и именно $= 0$ при $u = 0$, какъ то слѣдуетъ изъ (9); а потому ее можно интегрировать отъ $u = 0$; и слѣдовательно въ (8) можно принять $u_0 = 0$; тогда эта формула обратится въ такую:

$$\frac{\Theta_0(u)}{u} = e^{\int_{0}^{u}\int_{0}^{u}\left(\frac{1}{u^2} - \wp(u)\right) du\, du + C'}. \tag{11}$$

Полагая $u = 0$, согласно условію должны имѣть:

$$\Theta_0'(0) = e^{C'} = 1\,; \tag{12}$$

отсюда слѣдуетъ

$$C' = 0\,, \tag{13}$$

и $\Theta_0(u)$ обратится въ $\sigma(u)$. Внося это значеніе C' въ (11), получимъ оттуда такое выраженіе для $\sigma(u)$:

$$\sigma(u) = u\, e^{\int_{0}^{u}\int_{0}^{u}\left(\frac{1}{u^2} - \wp(u)\right) du\, du}. \tag{14}$$

Сличая это съ (1) § 157 будемъ имѣть:

$$e^{\int_0^u\int_0^u\left(\frac{1}{u^2}-\wp(u)\right)du\,du}=\prod_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}\left(1-\frac{u}{w}\right)e^{\frac{u}{w}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}}. \tag{15}$$

Беря логариѳмическую производную отъ (14), будемъ имѣть:

$$\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}=\frac{1}{u}+\int_0^u\left(\frac{1}{u^2}-\wp(u)\right)du\,; \tag{16}$$

съ другой стороны, предполагая, что въ (3) C имѣетъ такое значенie, какое оно должно имѣть, чтобы было $\Theta_0(u)=\sigma(u)$, мы по (2) и (3) будемъ имѣть:

$$\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}=\zeta_0(u)\,; \tag{17}$$

сличая съ (16), находимъ:

$$\zeta_0(u)=\frac{1}{u}+\int_0^u\left(\frac{1}{u^2}-\wp(u)\right)du. \tag{18}$$

Эта формула *) можетъ быть получена прямо изъ (1) настоящ. §, придавая къ нему тождество слѣдующее изъ (5):

$$0=\frac{1}{u}+\frac{1}{2}\int_{-u}^{+u}\frac{du}{u^2}, \tag{19}$$

и сумму интеграловъ преобразовывая на основанiи (10).—

159. Три функцiи

$$\sqrt{\wp(u)-e_i}=\frac{\Theta_i(u)}{\Theta(u)}=\frac{\sigma_i(u)}{\sigma(u)} \tag{1}$$

обращаются въ ∞^1 въ тѣхъ же точкахъ:

$$u=2\bar{\omega}\,, \tag{2}$$

*) Эта формула (18) замѣчена Halphen'омъ.

какъ и функціи $\wp(u)$ и $\zeta(u)$. Изъ (8) § 116 слѣдуетъ, что

$$\sqrt{\wp(u+2\tilde{\omega})-e_i}=(-1)^{\lambda_i}\sqrt{\wp(u)-e_i}, \tag{3}$$

гдѣ λ_i имѣетъ одно изъ слѣдующихъ трехъ значеній, смотря по значенію i:

$$\lambda_1=n; \qquad \lambda_2=m+n; \qquad \lambda_3=m. \tag{4}$$

Мы имѣли для значеній u близкихъ къ нулю:

$$\wp(u)=\frac{1}{u^2}+u^2\mathfrak{P}(u^2); \tag{5}$$

отсюда для тѣхъ же значеній u будемъ имѣть:

$$\sqrt{\wp(u)-e_i}=\left(\frac{1}{u^2}-e_i+u^2\mathfrak{P}(u^2)\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{u}\left(1-e_iu^2+u^4\mathfrak{P}(u^2)\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{u}\left(1-\frac{e_i}{2}u^2+u^4\mathfrak{P}_1(u^2)\right)=$$

$$=\frac{1}{u}-\frac{e_i}{2}u+u^3\mathfrak{P}_1(u^2);$$

итакъ для значеній u близкихъ къ нулю:

$$\sqrt{\wp(u)-e_i}=\frac{1}{u}-\frac{e_i}{2}u+u^3\mathfrak{P}_1(u^2). \tag{6}$$

Дифференцируя это равенство разъ, другой, получимъ:

$$(\sqrt{\wp(u)-e_i})'=-\frac{1}{u^2}-\frac{e_i}{2}+u^2\mathfrak{P}_2(u^2); \tag{7}$$

$$(\sqrt{\wp(u)-e_i})''=\frac{2}{u^3}+u\mathfrak{P}_3(u^2); \tag{8}$$

изъ (6) и этихъ двухъ равенствъ получимъ во первыхъ:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{пред.}\left\{u\sqrt{\wp(u)-e_i}\right\}_{u=0}=+1\,;\\
&\text{пред.}\left\{u^2(\sqrt{\wp(u)-e_i})'\right\}_{u=0}=-1\,;\\
&\text{пред.}\left\{u^3(\sqrt{\wp(u)-e_i})''\right\}_{u=0}=+2\,;
\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

во вторыхъ (что намъ понадобится въ слѣдующемъ §):

$$\left.\begin{aligned}
&\text{пред.}\left\{\sqrt{\wp(u)-e_i}-\frac{1}{u}\right\}_{u=0}=0\,;\\
&\text{пред.}\left\{(\sqrt{\wp(u)-e_i})'+\frac{1}{u^2}\right\}_{u=0}=-\frac{e_i}{2}\,;\\
&\text{пред.}\left\{(\sqrt{\wp(u)-e_i})''-\frac{2}{u^3}\right\}_{u=0}=0\,.
\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

Полагая

$$u=2\tilde{\omega}+u'\,,\tag{11}$$

будемъ по (3) имѣть:

$$\sqrt{\wp(u)-e_i}=(-1)^{\lambda_i}\sqrt{\wp(u')-e_i}\,;\tag{12}$$

дифференцируя это разъ, другой, получимъ:

$$(\sqrt{\wp(u)-e_i})'=(-1)^{\lambda_i}(\sqrt{\wp(u')-e_i})'\,;\tag{13}$$

$$(\sqrt{\wp(u)-e_i})''=(-1)^{\lambda_i}(\sqrt{\wp(u')-e_i})''\,,\tag{14}$$

такъ какъ $du=du'$ по (11). Отсюда по (6), (7) и (8) соотвѣтственно получимъ слѣдующія разложенія этихъ функцій вблизи $u=2\tilde{\omega}$:

$$\left.\begin{aligned}
&\sqrt{\wp(u)-e_i}=(-1)^{\lambda_i}\frac{1}{u'}+(-1)^{\lambda_i+1}\frac{e_i}{2}u'+u'^3\mathfrak{P}_1(u'^2)\,,\\
&(\sqrt{\wp(u)-e_i})'=(-1)^{\lambda_i+1}\frac{1}{u'^2}+(-1)^{\lambda_i+1}\frac{e_i}{2}+u'^2\mathfrak{P}_2(u'^2),\\
&(\sqrt{\wp(u)-e_i})''=(-1)^{\lambda_i}\frac{2}{u'^3}+u'^2\mathfrak{P}_3(u'^2)\,,
\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

или, такъ какъ $u' = u - 2\tilde{\omega}$ по (11):

$$\left.\begin{aligned}
\sqrt{\wp(u)-e_i} &= (-1)^{\lambda_i}\frac{1}{u-2\tilde{\omega}} + (-1)^{\lambda_i+1}\frac{e_i}{2}(u-2\tilde{\omega}) + (u-2\tilde{\omega})^3\mathfrak{P}_1[(u-2\tilde{\omega})^2],\\
\sqrt{\wp(u)-e_i})' &= (-1)^{\lambda_i+1}\frac{1}{(u-2\tilde{\omega})^2} + (-1)^{\lambda_i+1}\frac{e_i}{2} + (u-2\tilde{\omega})^2\mathfrak{P}_2[(u-2\tilde{\omega})^2],\\
(\sqrt{\wp(u)-e_i})'' &= (-1)^{\lambda_i}\frac{2}{(u-2\tilde{\omega})^3} + (u-2\tilde{\omega})\mathfrak{P}_3[(u-2\tilde{\omega})].
\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Отсюда легко получаются слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{пред.}\left\{\sqrt{\wp(u)-e_i} + (-1)^{\lambda_i+1}\frac{1}{u-2\tilde{\omega}}\right\}_{u=2\tilde{\omega}} = 0;\\
&\text{пред.}\left\{(\sqrt{\wp(u)-e_i})' + (-1)^{\lambda_i}\frac{1}{(u-2\tilde{\omega})^2}\right\}_{u=2\tilde{\omega}} = (-1)^{\lambda_i+1}\frac{e_i}{2};\\
&\text{пред.}\left\{(\sqrt{\wp(u)-e_i})'' + (-1)^{\lambda_i+1}\frac{2}{(u-2\tilde{\omega})^3}\right\}_{u=2\tilde{\omega}} = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

160. Замѣтивъ это, составимъ теперь выраженіе:

$$f''(u) = (\sqrt{\wp(u)-e_i})'' + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n}(-1)^{\lambda_i+1}\frac{2}{(u-w)^3}. \quad (1)$$

Входящій сюда рядъ есть безусловно-сходящійся; въ самомъ дѣлѣ, его члены лишь знаками отличаются отъ членовъ ряда (15) § 149, когда тамъ положимъ $v = 0$; слѣдовательно рядъ модулей его будетъ тождественъ съ рядомъ модулей сейчасъ упомянутаго ряда для $v = 0$; сходимость же послѣдняго доказана для всякаго v *), слѣдовательно и для $v = 0$. Поэтому выраженіе (1) опредѣляетъ аналитическую функцію. Легко провѣрить, что она будетъ имѣть тѣже періоды, какъ и $\sqrt{\wp(u)-e_i}$, но для нашей цѣли это излишне. Эта функція, очевидно однозначная и непрерывная, будетъ вездѣ конечна; въ самомъ дѣлѣ, единственныя значенія, для которыхъ она могла бы обратиться въ ∞, суть $u = 2\tilde{\omega}$; но для нихъ по послѣднему изъ (17) она обращается въ нуль. Для $u = 0$ это прямо видно, ибо по послѣднему изъ (10) она приводится къ суммѣ

*) Разумѣется, исключая $v = 2\tilde{\omega}$.

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}(-1)^{\lambda_i+1}\frac{2}{w^3}, \tag{2}$$

которая тождественно $=0$, ибо каждый членъ $(m=\mu,\ n=\nu)$ сокращается съ членомъ $(m=-\mu,\ n=-\nu)$, такъ какъ множитель $(-1)^{\lambda_i}$ остается тотъ же самый, когда оба m и n мѣняются на противные (а -1 можно взять за скобки). Для $u=2p\omega+2q\omega'$ эта функція приведется къ той же самой суммѣ, если положить $m-p=m'$, $n-q=n'$, помноженной на $+1$ или -1, какъ легко видѣть. Отсюда слѣдуетъ, что $f''(u)$, оставаясь вездѣ конечною и будучи однозначна и непрерывна, есть постоянное и именно нуль, ибо

$$f''(2p\omega+2q\omega')=0 \tag{3}$$

по сейчасъ доказанному. Итакъ

$$f''(u)=0; \tag{4}$$

слѣдовательно

$$(\sqrt{\wp(u)-e_i})''=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n}(-1)^{\lambda_i}\frac{2}{(u-w)^3}. \tag{5}$$

Перенося членъ $(m=0,\ n=0)$, т. е. $\frac{2}{w^3}$, налѣво, мы можемъ этому равенству дать такой видъ:

$$(\sqrt{\wp(u)-e_i})''-\frac{2}{u^3}=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}(-1)^{\lambda_i}\frac{2}{(u-w)^3}; \tag{6}$$

обѣ части его конечны, и именно $=0$ для $u=0$, — лѣвая по первому изъ (10) пред. §; сверхъ того этотъ рядъ, какъ выше видѣли, есть безусловно-сходящійся, а потому его можно интегрировать отъ $u=0$. Имѣя въ виду второе изъ (10) пред. § мы получимъ тогда слѣдующее:

$$(\sqrt{\wp(u)-e_i})'+\frac{1}{u^2}+\frac{e_i}{2}=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}(-1)^{\lambda_i}\left\{\frac{-1}{(u-w)^2}+\frac{1}{w^2}\right\}. \tag{7}$$

Полученный здѣсь рядъ есть безусловно-сходящійся, ибо рядъ модулей членовъ его тотъ же самый, что и ряда представляющаго разложеніе функціи $\wp(u)$ [(6) § 151]; притомъ обѣ части его [первая по второму изъ (10) пред. §] конечны при $u=0$, именно $=0$; потому

его можно интегрировать отъ $u=0$; тогда, имѣя въ виду сейчасъ упомянутую формулу пред. §, получимъ:

$$\sqrt{\wp(u)-e_i}-\frac{1}{u}+\frac{e_i}{2}u=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}(-1)^{\lambda_i}\left\{\frac{1}{u-w}+\frac{1}{w}+\frac{u}{w^2}\right\}, \qquad (8)$$

откуда найдемъ:

$$\sqrt{\wp(u)-e_i}=-\frac{e_i}{2}u+\frac{1}{u}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}(-1)^{\lambda_i}\left\{\frac{1}{u-w}+\frac{1}{w}+\frac{u}{w^2}\right\}. \qquad (9)$$

Разложеніе это тоже безусловно-сходящееся, ибо члены его знакомъ отличаются отъ членовъ ряда въ (9) § 152, слѣдовательно имѣютъ тѣже модули.

161. Изъ этихъ формулъ легко получить другія, которыя могутъ быть полезны въ разныхъ случаяхъ. Мы имѣемъ:

$$(\sqrt{\wp(u)-e_i})'=\frac{\wp'(u)}{2\sqrt{\wp(u)-e_i}}=-\sqrt{\wp(u)-e_j}\cdot\sqrt{\wp(u)-e_k}, \qquad (1)$$

подставляя выраженіе $\wp'(u)$ по формулѣ (a) § 74 (подстрочное примѣчаніе), которое можетъ быть и такъ написано:

$$\wp'(u)=-2\sqrt{\wp(u)-e_i}\cdot\sqrt{\wp(u)-e_j}\cdot\sqrt{\wp(u)-e_k}; \qquad (2)$$

внося изъ (1) въ (7) пред. § выраженіе $(\sqrt{\wp(u)-e_i})'$ мы получимъ оттуда:

$$\sqrt{\wp(u)-e_j}\cdot\sqrt{\wp(u)-e_k}=\frac{e_i}{2}+\frac{1}{u^2}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}(-1)^{\lambda_i}\left\{\frac{1}{(u-w)^2}-\frac{1}{w^2}\right\}, \qquad (3)$$

— разложеніе стоящей влѣво функціи по теоремѣ Миттагъ-Леффлера.— Полагая въ (9) пред. § $u=\omega_j$, а въ только что выведенной формулѣ (3) настоящаго § $u=\omega_i$, мы получимъ такія формулы:

$$\sqrt{e_j-e_i}=-\frac{e_i}{2}\omega_j+\frac{1}{\omega_j}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}(-1)^{\lambda_i}\left\{\frac{-1}{w-\omega_j}+\frac{1}{w}+\frac{\omega_j}{w^2}\right\}, \qquad (4)$$

$$\sqrt{e_i-e_j}\cdot\sqrt{e_i-e_k}=\frac{e_i}{2}+\frac{1}{\omega_i^2}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}(-1)^{\lambda_i}\left\{\frac{1}{(w-\omega_i)^2}-\frac{1}{w^2}\right\}. \qquad (5)$$

Полагая $u=\omega_j$ и $u=\omega_k$ въ (3) настоящаго §, налѣво будемъ имѣть нуль; рѣшая полученныя такимъ образомъ уравненія по e_i, получимъ еще два слѣдующія выраженія его въ дополненіе къ выведенному въ § 151 [формула (8)]:

$$e_i = -2\left[\frac{1}{\omega_j^2} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}(-1)^{\lambda_i}\left\{\frac{1}{(w-\omega_j)^2} - \frac{1}{w^2}\right\}\right]; \tag{6}$$

$$e_i = -2\left[\frac{1}{\omega_k^2} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}(-1)^{\lambda_i}\left\{\frac{1}{(w-\omega_k)^2} - \frac{1}{w^2}\right\}\right]. \tag{7}$$

162. Перемѣняя въ (5) § 160 u на $u-v$, будемъ имѣть:

$$(\sqrt{\wp(u-v)-e_i})'' = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n}(-1)^{\lambda_i}\frac{2}{(u-v-w)^3}; \tag{1}$$

члены этого ряда только знакомъ отличаются отъ членовъ ряда (16) § 149, слѣдовательно будутъ имѣть тѣже модули; рядъ же модулей того ряда (16) § 149, какъ доказано въ этомъ § 149, есть сходящійся рядъ и представляетъ аналитическую функцію. Его можно интегрировать поэтому отъ $u=0$; тогда мы получимъ:

$$(\sqrt{\wp(u-v)-e_i})' - (\sqrt{\wp(-v)-e_i})' = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n}(-1)^{\lambda_i}\left\{\frac{-1}{(u-v-w)^2} + \frac{1}{(v+w)^2}\right\}. \tag{2}$$

Члены этого ряда лишь знакомъ отличаются отъ членовъ ряда (3) § 151, а потому имѣютъ тѣхъ же модулей; слѣдовательно этотъ рядъ также безусловно-сходящійся, и потому опять можно интегрировать отъ нуля. Такимъ образомъ будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} &\sqrt{\wp(u-v)-e_i} - \sqrt{\wp(-v)-e_i} - (\sqrt{\wp(-v)-e_i})'u = \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n}(-1)^{\lambda_i}\left\{\frac{1}{u-v-w} + \frac{1}{v+w} + \frac{u}{(v+w)^2}\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Члены этого ряда знакомъ лишь отличаются отъ членовъ ряда въ (5) § 153, а потому имѣютъ тѣхъ же модулей; сходимость же послѣдняго нами доказана въ § 154; слѣдовательно рядъ въ (3) наст. § есть безусловно-сходящійся.—Отсюда, полагая $v=\mp\omega_i$, и замѣчая, что

$$\sqrt{\wp(\pm\omega_i)-e_i} = 0 \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned}(\sqrt{\wp(-v)-e_i})'_{v=\mp\omega_i} &= -\sqrt{e_i-e_j}\cdot\sqrt{e_i-e_k} = {}^{*)}\\ &= \sqrt{e_j-e_i}\cdot\sqrt{e_k-e_i}\,,\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

мы получимъ:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{\wp(u\mp\omega_i)-e_i} &= \sqrt{e_j-e_i}\cdot\sqrt{e_k-e_i}\cdot u+\\ &+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n}(-1)^{\lambda_i}\left\{\frac{1}{u-w_i}+\frac{1}{w_i}+\frac{u}{w_i^2}\right\},\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

гдѣ $w_i = w \mp \omega_i$.

Полагая $v = \mp\omega_j$, и замѣчая, что

$$\sqrt{\wp(\pm\omega_j)-e_i} = \pm\sqrt{e_j-e_i}\,, \tag{7}$$

$$(\sqrt{\wp(\pm\omega_j)-e_i})' = -\sqrt{\wp(\pm\omega_j)-e_j}\sqrt{\wp(\pm\omega_j)-e_k} = 0\,, \tag{8}$$

мы получимъ:

$$\sqrt{\wp(u\pm\omega_j)-e_i} = \pm\sqrt{e_j-e_i}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n}(-1)^{\lambda_i}\left\{\frac{1}{u-w_j}+\frac{1}{w_j}+\frac{u}{w_j^2}\right\}, \tag{9}$$

гдѣ $w_j = w \mp \omega_j$.

Изъ (3) можно получить и (9) § 160, представивъ его такъ, выдѣляя изъ суммы членъ, для котораго $m=0$, $n=0$, и замѣчая, что $\sqrt{\wp(u)-e_i} = \dfrac{\Theta_i(u)}{\Theta(u)}$ есть нечетная функція, и слѣдовательно производная ея четная:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{\wp(u-v)-e_i} &= -\left(\sqrt{\wp(v)-e_i}-\frac{1}{v}\right)+\left((\sqrt{\wp(v)-e_i})'+\frac{1}{v^2}\right)u+\\ &+\frac{1}{u-v}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}(-1)^{\lambda_i}\left\{\frac{1}{u-v-w}+\frac{1}{v+w}+\frac{u}{(v+w)^2}\right\};\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

полагая здѣсь $v=0$, по (9) § 159 получимъ:

$$\sqrt{\wp(u)-e_i} = -\frac{e_i}{2}u+\frac{1}{u}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}(-1)^{\lambda_i}\left\{\frac{1}{u-w}+\frac{1}{w}+\frac{u}{w^2}\right\}. \tag{11}$$

*) По (1) пред. §.

163. Разложеніе на частныя дроби функцій $\frac{1}{\sqrt{\wp(u)-e_j}}$ и $\frac{\sqrt{\wp(u)-e_i}}{\sqrt{\wp(u)-e_k}}$ легко выводится изъ предыдущаго при помощи формулъ (1) и (2) § 115. Изъ средней изъ (1) этого § 115 слѣдуетъ:

$$\frac{1}{\sqrt{\wp(u)-e_j}}=\frac{1}{\sqrt{e_i-e_j}\cdot\sqrt{e_k-e_j}}\sqrt{\wp(u\pm\omega_j)-e_j}\,; \tag{1}$$

внося сюда разложеніе $\sqrt{\wp(u\pm\omega_j)-e_j}$, получающееся изъ (6) пред. § чрезъ перестановку i и j, мы будемъ имѣть искомое разложеніе:

$$\frac{1}{\sqrt{\wp(u)-e_j}}=u+\frac{1}{\sqrt{e_i-e_j}\cdot\sqrt{e_k-e_j}}\sum_{m,n\,-\infty}^{+\infty}(-1)^{\lambda_j}\left\{\frac{1}{u-w_j}+\frac{1}{w_j}+\frac{u}{w_j^2}\right\}; \tag{2}$$

здѣсь $w_j=w\pm\omega_j$. Далѣе, изъ третьей изъ формулъ (1) § 115 слѣдуетъ, что

$$\frac{\sqrt{\wp(u)-e_i}}{\sqrt{\wp(u)-e_k}}=\pm\frac{1}{\sqrt{e_k-e_j}}\sqrt{\wp(u\pm\omega_k)-e_j}\,; \tag{3}$$

внося сюда разложеніе $\sqrt{\wp(u\pm\omega_k)-e_j}$, получающееся изъ (9) пред. § чрезъ замѣну j чрезъ k, а i чрезъ j, мы будемъ имѣть:

$$\frac{\sqrt{\wp(u)-e_i}}{\sqrt{\wp(u)-e_k}}=1\pm\frac{1}{\sqrt{e_k-e_j}}\sum_{m,n\,-\infty}^{+\infty}(-1)^{\lambda_j}\left\{\frac{1}{u-w_k}+\frac{1}{w_k}+\frac{u}{w_k^2}\right\} \tag{4}$$

гдѣ $w_k=w\mp\omega_k$, и сообразно съ тѣмъ, берется-ли здѣсь верхній знакъ или нижній, берется таковой же и предъ $\frac{1}{\sqrt{e_k-e_j}}$.

164. Теперь на основаніи найденныхъ разложеній и формулъ (1) § 125 легко получить разложенія на частныя дроби и функцій амплитуды

$$v=\sqrt{e_i-e_j}\,u\,, \tag{1}$$

именно

$$\operatorname{sin am}(v,k)\,,\qquad \operatorname{cos am}(v,k)\qquad\text{и}\qquad \Delta\operatorname{am}(v,k)\,. \tag{2}$$

Что касается первой изъ этихъ трехъ функцій, то на основаніи первой изъ помянутыхъ сейчасъ формулъ (1) § 125 для полученія ея разложенія стоитъ только (2) пред. § положить на $\sqrt{e_i - e_j}$, и мы будемъ имѣть искомое разложеніе:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{sinam}(\sqrt{e_i - e_j}\cdot u, k) = \sqrt{e_i - e_j}\cdot u + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{e_k - e_j}} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n} (-1)^{\lambda_j} \left\{ \frac{1}{u - w_j} + \frac{1}{w_j} + \frac{u}{w_j^2} \right\}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Для полученія разложенія $\operatorname{cosam}(v, k)$ нужно по второй изъ (1) § 125 перемѣнить въ (4) пред. § k на j и на оборотъ, а для полученія разложенія $\Delta \operatorname{am}(v, k)$ надобно по третьей изъ (1) § 125 перемѣнить i на k; k на j, и j на i, тогда будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{cosam}(\sqrt{e_i - e_j}\cdot u, k) = 1 + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{e_j - e_k}} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n} (-1)^{\lambda_k} \left\{ \frac{1}{u - w_j} + \frac{1}{w_j} + \frac{u}{w_j^2} \right\}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Delta \operatorname{am}(\sqrt{e_i - e_j}\, u, k) = 1 + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{e_j - e_i}} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n} (-1)^{\lambda_i} \left\{ \frac{1}{u - w_j} + \frac{1}{w_j} + \frac{u}{w_j^2} \right\}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Если пожелаемъ ввести въ формулы (3) — (5) вмѣсто величинъ e_i, ω_i мультипликаторъ λ, модуль k и величины K и $K'i$, то стоитъ только принять во вниманіе, что по (4) § 125:

$$\sqrt{e_i - e_j} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}; \quad \text{слѣд.} \quad \sqrt{e_j - e_i} = -\frac{i}{\sqrt{\lambda}}, \tag{6}$$

и по (4) § 123:

$$\sqrt{e_j - e_k} = k\sqrt{e_j - e_i} = -ik\sqrt{e_i - e_j} = -\frac{i}{\sqrt{\lambda}}k, \tag{7}$$

а также, что

$$\sqrt{e_k - e_i} = -i\sqrt{e_j - e_k} = \mp \frac{k}{\sqrt{\lambda}}; \tag{8}$$

тогда формулы (3) — (5) примутъ такой видъ:

$$\sin\mathrm{am}(v,k) = v + \frac{1}{k}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n}(-1)^{\lambda_j}\left\{\frac{1}{v-W_j} + \frac{1}{W_j} + \frac{v}{W_j^2}\right\}; \tag{9}$$

$$\cos\mathrm{am}(v,k) = 1 + \frac{i}{k}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n}(-1)^{\lambda_k}\left\{\frac{1}{v-W_j} + \frac{1}{W_j} + \frac{v}{W_j^2}\right\}; \tag{10}$$

$$\triangle\mathrm{am}(v,k) = 1 + i\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n}(-1)^{\lambda_i}\left\{\frac{1}{v-W_i} + \frac{1}{W_j} + \frac{v}{W_j^2}\right\}; \tag{11}$$

гдѣ по (16) и (17) § 127, если $w_j = 2m\omega_i + (2n-1)\omega_j$,

$$W_j = \frac{w_j}{\sqrt{\lambda}} = w_j\sqrt{e_i - e_i} = 2mK + (2n-1)K'i; \tag{12}$$

далѣе

$$\lambda_i = n, \quad \lambda_j = m, \quad \lambda_k = m + n, \tag{13}$$

ибо по (16), (17) и (17) и (18) § 127 i указываетъ на K, j на $K'i$, а k на $K + K'i$.

ГЛАВА XI.

Преобразованіе двойныхъ разложеній на частныя дроби и въ безконечныя произведенія въ простыя.

165. Переходя къ преобразованію двойныхъ разложеній, полученныхъ въ предыдущей главѣ, въ простыя, начнемъ съ функціи $\wp(u-v)$. Разложеніе этой функціи по формулѣ (3) § 151 имѣетъ видъ:

$$\wp(u-v)=\wp(v)+S, \tag{1}$$

гдѣ по постановкѣ вмѣсто w его значенія будетъ

$$S=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n}\left(\frac{1}{(u-v-2m\omega-2n\omega')^2}-\frac{1}{(v+2m\omega+2n\omega')^2}\right). \tag{2}$$

Такъ какъ этотъ рядъ безусловно-сходящійся, то мы можемъ суммировать въ любомъ порядкѣ, напримѣръ сперва по m, потомъ по n, или наоборотъ. Въ первомъ случаѣ эту сумму можно такъ представить:

$$S=\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\left(\frac{1}{\left(\frac{u-v-2n\omega'}{2\omega}\pi-m\pi\right)^2}-\frac{1}{\left(\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi+m\pi\right)^2}\right); \tag{3}$$

здѣсь сумму по m можно раздѣлить на двѣ, ибо обѣ будутъ безусловно-сходящіяся, и тогда по (12) § 144 будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}S&=\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\left\{\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\frac{1}{\left(\frac{u-v-2n\omega'}{2\omega}\pi-m\pi\right)^2}-\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\frac{1}{\left(\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi+m\pi\right)^2}\right\}=\\&=\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\left\{\operatorname{cosec}^2\left(\frac{u-v-2n\omega'}{2\omega}\pi\right)-\operatorname{cosec}^2\left(\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi\right)\right\}.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Здѣсь опять можно сумму по n разбить на двѣ, такъ что будетъ

$$S=\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\left\{\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \operatorname{cosec}^2\left(\frac{n-v-2n\omega'}{2\omega}\pi\right)-\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \operatorname{cosec}^2\left(\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi\right)\right\}, \tag{5}$$

ибо обѣ суммы безусловно-сходящіяся. Въ самомъ дѣлѣ, по извѣстной формулѣ имѣемъ:

$$\operatorname{cosec}^2\left(\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi\right)=-\frac{4}{\left(e^{\left(\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi\right)i}-e^{-\left(\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi\right)i}\right)^2}; \tag{6}$$

если $\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right)>0$, то для части, гдѣ $n>0$, это выраженіе можно такъ представить:

$$\operatorname{cosec}^2\left(\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi\right)=\frac{-4.e^{2\left(\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi\right)i}}{\left(1-e^{2\left(\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi\right)i}\right)^2}; \tag{7}$$

слѣдовательно

$$\text{мод.}\left(\operatorname{cosec}^2\left(\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi\right)\right)<\frac{\text{мод.}\left(-4e^{2\frac{v\pi}{2\omega}i}\right).e^{-2n\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right)\pi}}{\left[1-\left(\text{мод.}\left(e^{2\frac{v\pi}{2\omega}i}\right)\right)e^{-2n\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right)\pi}\right]^2}; \tag{8}$$

но $e^{-2n\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right)\pi}$ съ увеличеніемъ n стремится къ нулю, а потому всегда можно найти такое значеніе n, начиная съ котораго постоянно будетъ:

$$\frac{\text{мод.}\left(-4e^{2\frac{v\pi}{2\omega}i}\right)}{1-\text{мод.}\left(e^{2\frac{v\pi}{2\omega}i}\right)e^{-2n\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right)\pi}}<L, \tag{9}$$

гдѣ L конечная опредѣленная величина; слѣдовательно по (9) неравенство (8) приметъ такой видъ:

$$\text{мод.}\left(\operatorname{cosec}^2\left(\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi\right)\right)<Le^{-2n\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right)\pi}, \tag{10}$$

т. е. модули членовъ второй суммы въ (5) для части, гдѣ $n > 0$, начиная съ нѣкотораго опредѣленнаго будутъ менѣе соотвѣтственныхъ членовъ убывающей геометрической прогрессіи; слѣдовательно эта половина ряда модулей членовъ второй суммы въ (5) будетъ сходящейся. Также докажется сходимость и другой, гдѣ $n < 0$; а отсюда же и будетъ слѣдовать безусловная сходимость второй суммы въ (5). Также докажется и безусловная сходимость первой суммы той же формулы, ибо она отличается отъ второй только тѣмъ, что вмѣсто v стоитъ $u-v$, и вмѣсто n стоитъ $-n$, но $-n$ пробѣгаетъ, въ обратномъ лишь порядкѣ, тотъ же рядъ значеній отъ $-\infty$ до $+\infty$, какъ и n. —Внеся теперь выраженіе S изъ (5) въ (1), мы получимъ оттуда:

$$\left.\begin{aligned} \wp(u-v)-\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \sum_{n}{}_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{cosec}^2\left(\frac{u-v-2n\omega'}{2\omega}\pi\right) = \\ = \wp(v)-\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \sum_{n}{}_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{cosec}^2\left(\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi\right). \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Это равенство говоритъ, что разность каждой части равенства есть постоянная величина, ибо функція

$$\wp(u)-\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \sum_{n}{}_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{cosec}^2\left(\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi\right) \tag{12}$$

получаетъ равныя значенія для двухъ совершенно произвольно взятыхъ значеній u. Итакъ

$$\wp(u)-\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \sum_{n}{}_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{cosec}^2\left(\frac{u+2n\omega'}{2\omega}\pi\right) = C, \tag{13}$$

откуда

$$\wp(u) = C + \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \sum_{n}{}_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{cosec}^2\left(\frac{u+2n\omega'}{2\omega}\pi\right). \tag{14}$$

Чтобы опредѣлить C, надобно въ (13) дать u какое либо частное значеніе, напримѣръ положить $u=0$; но въ послѣднемъ случаѣ надобно его такъ представить, выдѣливъ изъ $\sum_n$ членъ, для котораго $n=0$:

$$\wp(u)-\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \operatorname{cosec}^2\frac{u\pi}{2\omega}-\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 {\sum_{n}}'{}_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{cosec}^2\left(\frac{u+2n\omega'}{2\omega}\pi\right) = C. \tag{15}$$

Очевидно что

$$\wp(u)-\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\operatorname{cosec}^2\frac{u\pi}{2\omega}=\wp(u)-\frac{1}{u^2}-\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\left[\operatorname{cosec}^2\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)-\frac{1}{\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2}\right];\quad(16)$$

но по (8) § 76 и (7) § 143 имѣемъ:

$$\text{пред.}\left(\wp(u)-\frac{1}{u^2}\right)_{u=0}=0;\qquad(17)$$

$$\text{пред.}\left(\operatorname{cosec}^2\frac{u\pi}{2\omega}-\frac{1}{\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2}\right)_{u=0}=\frac{1}{3};\qquad(18)$$

слѣдовательно на основанiи (16):

$$\text{пред.}\left\{\wp(u)-\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\operatorname{cosec}^2\frac{u\pi}{2\omega}\right\}_{u=0}=-\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2;\qquad(19)$$

потому, полагая въ (15) $u=0$, получимъ:

$$C=-\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\left\{\frac{1}{3}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_n\operatorname{cosec}^2\left(\frac{2n\omega'}{2\omega}\pi\right)\right\}.\qquad(20)$$

Вотъ какое значенiе имѣетъ постоянное C въ (14).—Точно также, начавъ суммированiе по n, мы придемъ къ формулѣ:

$$\wp(u)=C'+\left(\frac{\pi}{2\omega'}\right)^2\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\operatorname{cosec}^2\left(\frac{u-2m\omega}{2\omega'}\pi\right),\qquad(21)$$

гдѣ постоянная C' опредѣляется равенствомъ:

$$C'=-\left(\frac{\pi}{2\omega'}\right)^2\left\{\frac{1}{3}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_m\operatorname{cosec}^2\left(\frac{2m\omega}{2\omega'}\pi\right)\right\}.\qquad(22)$$

Черезъ § мы получимъ болѣе краткiя выраженiя этихъ постоянныхъ.

166. Формула (5) § 153 даетъ:

$$\zeta(u-v)=-\zeta(v)+\zeta'(v)u+S_1,\qquad(1)$$

*

гдѣ по внесеніи вмѣсто w его значенія будетъ:

$$S_1 = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n}\left(\frac{1}{u-v-2m\omega-2n\omega'}+\frac{1}{v+2m\omega+2n\omega'}+\frac{u}{(v+2m\omega+2n\omega')^2}\right). \quad (2)$$

Такъ какъ этотъ рядъ безусловно-сходящійся, то мы можемъ и здѣсь суммировать сперва по m, потомъ по n, или наоборотъ. Въ первомъ случаѣ сумму S_1 мы можемъ такъ представить:

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\left\{\frac{1}{u-v-2m\omega-2n\omega'}+\frac{1}{v+2m\omega+2n\omega'}+\frac{u}{(v+2m\omega+2n\omega')^2}\right\}= \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\left\{\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\left(\frac{1}{u-v-2n\omega'-2m\omega}+\frac{1}{v+2n\omega'+2m\omega}\right)+u\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\left(\frac{1}{v+2n\omega'+2m\omega}\right)^2\right\}, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

разбивая сумму по m на двѣ, ибо каждая представляетъ безусловно-сходящійся рядъ, и найдутся онѣ по формуламъ (6) § 145 и (12) § 144. Дѣйствительно, вторая изъ этихъ суммъ, какъ мы уже видѣли въ пред. §:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \frac{1}{(v+2n\omega'+2m\omega)^2} = \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \operatorname{cosec}^2\left(\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi\right); \quad (4)$$

первая же послѣдовательно такъ преобразуется:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\left(\frac{1}{u-v-2n\omega'-2m\omega}+\frac{1}{v+2n\omega'+2m\omega}\right)= \\ &=\frac{1}{u-v-2n\omega'}+\frac{1}{v+2n\omega'}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_m\left(\frac{1}{u-v-2n\omega'-m\omega}+\frac{1}{v+2n\omega'+2m\omega}\right)= \\ &=\frac{\pi}{2\omega}\left\{\frac{1}{\frac{u-v-2n\omega'}{2\omega}\pi}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_m\left(\frac{1}{\frac{u-v-2n\omega'}{2\omega}\pi-m\pi}+\frac{1}{m\pi}\right)+\right. \\ &\qquad \left.+\frac{1}{\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_m\left(\frac{1}{\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi-m\pi}-\frac{1}{m\pi}\right)\right\}= \\ &=\frac{\pi}{2\omega}\left\{\operatorname{cotg}\left(\frac{u-v-2n\omega'}{2\omega}\pi\right)+\operatorname{cotg}\left(\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi\right)\right\}, \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

ибо прибавивъ и отнявъ въ скобкахъ () подъ $\sum'_m$ во второй строчкѣ $\frac{1}{m\pi}$, мы можемъ разбить сумму на двѣ, такъ какъ обѣ будутъ безу-

словно-сходящіяся, конечное выраженіе которыхъ находится по (6) § 145. Внося изъ (4) и (5) въ (3) будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} S_1 = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \Big\{ \Big(\frac{\pi}{2\omega}\Big)^2 u \operatorname{cosec}^2 \Big(\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi\Big) + \\ + \frac{\pi}{2\omega}\Big[\operatorname{cotg}\Big(\frac{u-v-2n\omega'}{2\omega}\pi\Big) + \operatorname{cotg}\Big(\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi\Big)\Big]\Big\} = \\ = \Big(\frac{\pi}{2\omega}\Big)^2 u \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \operatorname{cosec}^2\Big(\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi\Big) + \\ + \frac{\pi}{2\omega}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \Big\{\operatorname{cotg}\Big(\frac{u-v-2n\omega'}{2\omega}\pi\Big) + \operatorname{cotg}\Big(\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi\Big)\Big\}, \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

ибо первая сумма по пред. § есть безусловно-сходящаяся, равно какъ и вся сумма S_1.—Внося изъ (6) въ (1), будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} \zeta(u-v) = -\zeta(v) + \Big[\zeta'(v) + \Big(\frac{\pi}{2\omega}\Big)^2 \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \operatorname{cosec}^2\Big(\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi\Big)\Big] u + \\ + \frac{\pi}{2\omega}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \Big\{\operatorname{cotg}\Big(\frac{u-v-2n\omega'}{2\omega}\pi\Big) + \operatorname{cotg}\Big(\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi\Big)\Big\}; \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

но $\zeta'(v) = c' - \wp(v)$; потому на основаніи (13) пред. § будетъ:

$$\zeta'(v) + \Big(\frac{\pi}{2\omega}\Big)^2 \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \operatorname{cosec}^2\Big(\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi\Big) = c' - C, \quad (8)$$

и предыдущее равенство обратится въ такое:

$$\left.\begin{aligned} \zeta(u-v) = -\zeta(v) + (c'-C)u + \\ + \frac{\pi}{2\omega}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \Big\{\operatorname{cotg}\Big(\frac{u-v-2n\omega'}{2\omega}\pi\Big) + \operatorname{cotg}\Big(\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi\Big)\Big\}. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Прежде чѣмъ идти далѣе, замѣтимъ, что это равенство легко получается и такимъ образомъ: вычитая изъ тождества $c' = c'$ равенство (14) пред. § по перемѣнѣ въ немъ u на $u-v$, мы будемъ имѣть:

$$c' - \wp(u-v) = c' - C + \Big(\frac{\pi}{2\omega}\Big)^2 \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n - \operatorname{cosec}^2\Big(\frac{u-v-2n\omega'}{2\omega}\pi\Big); \quad (10)$$

помножая это равенство на du и интегрируя отъ $u=0$, что возможно, такъ какъ этотъ рядъ безусловно-сходящійся, мы получимъ:

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^u [c'-\wp(u-v)]du=(c'-C)u+\\&+\frac{\pi}{2\omega}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\left\{\operatorname{cotg}\left(\frac{u-v-2n\omega'}{2\omega}\pi\right)+\operatorname{cotg}\left(\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi\right)\right\};\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

но $\int_0^u [c'-\wp(u-v)]du=\zeta(u-v)-\zeta(-v)$; по внесеніи этого въ (11), и получимъ оттуда (9).

Точно также получится и формула:

$$\left.\begin{aligned}&\zeta(u-v)=-\zeta(v)+(c'-C')u+\\&+\frac{\pi}{2\omega'}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\left\{\operatorname{cotg}\left(\frac{u-v-2m\omega}{2\omega'}\pi\right)+\operatorname{cotg}\left(\frac{v+2m\omega}{2\omega'}\pi\right)\right\}.\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

167. Формулу (9) пред. § можно такъ представить по вынесеніи члена, для котораго $u=0$ изъ подъ $\sum_m$:

$$\left.\begin{aligned}&\zeta(u-v)=-\zeta(v)+(c'-C)[(u-v)+v]+\frac{\pi}{2\omega}\left\{\operatorname{cotg}\left(\frac{u-v}{2\omega}\pi\right)+\operatorname{cotg}\left(\frac{v\pi}{2\omega}\right)+\right.\\&\left.+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_n\left\{\operatorname{cotg}\left(\frac{u-v-2n\omega'}{2\omega}\pi\right)+\operatorname{cotg}\left(\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi\right)\right\}\right\},\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

но

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{-\infty}^{\infty}{}'_n\left\{\operatorname{cotg}\left(\frac{u-v-2n\omega'}{2\omega}\pi\right)+\operatorname{cotg}\left(\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi\right)\right\}=\\&=\sum_1^{\infty}{}_n\left\{\left[\operatorname{cotg}\left(\frac{u-v-2n\omega'}{2\omega}\pi\right)-i\right]+\left[\operatorname{cotg}\left(\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi\right)+i\right]\right\}+\\&+\sum_1^{\infty}{}_n\left\{\left[\operatorname{cotg}\left(\frac{u-v+2n\omega'}{2\omega}\pi\right)+i\right]+\left[\operatorname{cotg}\left(\frac{v-2n\omega'}{2\omega}\pi\right)-i\right]\right\}=\\&=\sum_1^{\infty}{}_n\left[\operatorname{cotg}\left(\frac{u-v-2n\omega'}{2\omega}\pi\right)-i\right]+\sum_1^{\infty}{}_n\left[\operatorname{cotg}\left(\frac{u-v+2n\omega'}{2\omega}\pi\right)+i\right]+\\&+\sum_1^{\infty}{}_n\left[\operatorname{cotg}\left(\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi\right)+i\right]+\sum_1^{\infty}{}_n\left[\operatorname{cotg}\left(\frac{v-2n\omega'}{2\omega}\pi\right)-i\right],\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

ибо каждая сумма безусловно-сходящаяся.

Дѣйствительно, въ послѣдней

$$\left.\begin{aligned}&\cot g\left(\frac{v-2n\omega'}{2\omega}\pi\right)-i=i\,\frac{e^{\frac{v-2n\omega'}{2\omega}\pi i}+e^{-\frac{v-2n\omega'}{2\omega}\pi i}}{e^{\frac{v-2n\omega'}{2\omega}\pi i}-e^{-\frac{v-2n\omega'}{2\omega}\pi i}}-i=\\&=\frac{2ie^{-\frac{v-2n\omega'}{2\omega}\pi i}}{e^{\frac{v-2n\omega'}{2\omega}\pi i}-e^{-\frac{v-2n\omega'}{2\omega}\pi i}}=\frac{2ie^{-2\frac{v-2n\omega'}{2\omega}\pi i}}{1-e^{-2\frac{v-2n\omega'}{2\omega}\pi i}};\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

слѣдовательно

$$\text{мод.}\left(\cot g\left(\frac{v-2n\omega'}{2\omega}\pi\right)-i\right)<\frac{\text{мод.}\left(2ie^{-\frac{2v}{2\omega}\pi i}\right)e^{-2n\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right)\pi}}{1-\text{мод.}\left(e^{-\frac{2v}{2\omega}\pi i}\right)e^{-2n\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right)\pi}}; \tag{4}$$

но для достаточно-большихъ значенiй n

$$\frac{\text{мод.}\left(2ie^{-\frac{2v}{2\omega}\pi i}\right)}{1-\text{мод.}\left(e^{-\frac{2v}{2\omega}\pi i}\right)e^{-2n\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right)\pi}}<L, \tag{5}$$

гдѣ L нѣкоторая конечная величина; слѣдовательно для тѣхъ же значенiй n будетъ:

$$\text{мод.}\left(\cot g\left(\frac{v-2n\omega'}{2\omega}\pi\right)-i\right)<L\,e^{-2n\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right)\pi}, \tag{6}$$

т. е. меньше соотвѣтственнаго члена убывающей геометрической прогрессiи, откуда и слѣдуетъ безусловная сходимость послѣдней суммы во второй части (2). Первая сумма получается изъ нея чрезъ перемѣну v на $u-v$; слѣдовательно доказанное справедливо и для нея.

Точно также

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{cotg}\Big(\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi\Big)+i &= \frac{2ie^{\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi i}}{e^{\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi i}-e^{-\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi i}}= \\ &= \frac{-2ie^{2\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi i}}{1-e^{2\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi i}}; \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

слѣдовательно

$$\text{мод.}\left(\operatorname{cotg}\Big(\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi\Big)+i\right)<\frac{\text{мод.}\left(-2ie^{\frac{2v}{2\omega}\pi i}\right)e^{-2n\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right)\pi}}{1-\text{мод.}\left(e^{+\frac{2v}{2\omega}\pi i}\right)e^{-2n\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right)\pi}}; \tag{8}$$

но опять для достаточно большихъ значенiй n будетъ

$$\frac{\text{мод.}\left(-2ie^{\frac{2v}{2\omega}\pi i}\right)}{1-\text{мод.}\left(e^{\frac{2v}{2\omega}\pi i}\right)e^{-2n\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right)\pi}}<L_1, \tag{9}$$

гдѣ L_1 нѣкоторая конечная величина; слѣдовательно по (8) будетъ

$$\text{мод.}\left(\operatorname{cotg}\Big(\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi\Big)+i\right)<L_1e^{-2n\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right)\pi} \tag{10}$$

т. е. меньше соотвѣтственнаго члена убывающей геометрической прогрессiи; откуда слѣдуетъ безусловная сходимость третьей суммы во второй части равенства (2), а также и второй, которая получается изъ нея чрезъ перемѣну v на $u-v$. Доказавъ такимъ образомъ справедливость равенства (2), внесемъ слѣдующее изъ него разложенiе на части суммы въ (1), въ это равенство (1); тогда изъ него легко выведемъ такое:

$$\left.\begin{aligned}
&\zeta(u-v)-(c'-C)(u-v)-\frac{\pi}{2\omega}\Big\{\operatorname{cotg}\Big(\frac{u-v}{2\omega}\pi\Big)+\\
&+\sum_1^\infty{}_n\Big[\operatorname{cotg}\Big(\frac{u-v-2n\omega'}{2\omega}\pi\Big)-i\Big]+\sum_1^\infty{}_n\Big[\operatorname{cotg}\Big(\frac{u-v+2n\omega'}{2\omega}\pi\Big)+i\Big]\Big\}=\\
&=-\zeta(v)+(c'-C)v+\frac{\pi}{2\omega}\Big\{\operatorname{cotg}\Big(\frac{v}{2\omega}\pi\Big)+\\
&+\sum_1^\infty{}_n\Big[\operatorname{cotg}\Big(\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi\Big)+i\Big]+\sum_1^\infty{}_n\Big[\operatorname{cotg}\Big(\frac{v-2n\omega'}{2\omega}\pi\Big)-i\Big]\Big\}=\\
&=\zeta(-v)-(c'-C)(-v)-\frac{\pi}{2\omega}\Big\{\operatorname{cotg}\Big(\frac{-v}{2\omega}\pi\Big)+\\
&+\sum_1^\infty{}_n\Big[\operatorname{cotg}\Big(\frac{-v-2n\omega'}{2\omega}\pi\Big)-i\Big]+\sum_1^\infty{}_n\Big[\operatorname{cotg}\Big(\frac{-v+2n\omega'}{2\omega}\pi\Big)+i\Big]\Big\}.
\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

Такъ какъ послѣднее получается изъ перваго чрезъ перемѣну $u-v$ на $-v$, то это равенство говоритъ намъ, что

$$\left.\begin{aligned}
&\zeta(u)-(c'-C)\,u-\frac{\pi}{2\omega}\Big\{\operatorname{cotg}\frac{u\pi}{2\omega}+\\
&+\sum_1^\infty{}_n\Big[\operatorname{cotg}\Big(\frac{u-2n\omega'}{2\omega}\pi\Big)-i\Big]+\sum_1^\infty{}_n\Big[\operatorname{cotg}\Big(\frac{u+2n\omega'}{2\omega}\pi\Big)+i\Big]\Big\}=C',
\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

гдѣ C' постоянное. Оно найдется, давая u какое либо частное значеніе, напримѣръ $u=0$; сдѣлавъ это будемъ имѣть:

$$C'=\text{пред.}\Big\{\zeta(u)-\frac{\pi}{2\omega}\operatorname{cotg}\frac{u\pi}{2\omega}\Big\}_{u=0},\tag{13}$$

ибо одна сумма сократится съ другою для этого значенія u. Но

$$\zeta(u)-\frac{\pi}{2\omega}\operatorname{cotg}\frac{u\pi}{2\omega}=\zeta(u)-\frac{1}{u}-\frac{\pi}{2\omega}\left(\operatorname{cotg}\frac{u\pi}{2\omega}-\frac{1}{\frac{u\pi}{2\omega}}\right),\tag{14}$$

а по (7) § 153

$$\text{пред.}\Big(\zeta(u)-\frac{1}{u}\Big)_{u=0}=0\,,\tag{15}$$

и по (4) § 145

$$\text{пред.}\left(\operatorname{cotg}\frac{u\pi}{2\omega}-\frac{1}{\frac{u\pi}{2\omega}}\right)=0\,, \tag{16}$$

и потому

$$C'=\text{пред.}\left\{\zeta(u)-\frac{\pi}{2\omega}\operatorname{cotg}\frac{u\pi}{2\omega}\right\}_{u=0}=0. \tag{17}$$

Въ силу этого изъ (12) получаемъ:

$$\left.\begin{aligned}\zeta(u)=(c'-C)u+\frac{\pi}{2\omega}\Big\{\operatorname{cotg}\frac{u\pi}{2\omega}+\\+\sum_1^\infty{}_n\left[\operatorname{cotg}\left(\frac{u-2n\omega'}{2\omega}\pi\right)-i\right]+\sum_1^\infty{}_n\left[\operatorname{cotg}\left(\frac{u+2n\omega'}{2\omega}\pi\right)+i\right]\Big\}.\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Полагая здѣсь $u=\omega$, будемъ имѣть:

$$\zeta(\omega)=\eta=(c'-C)\omega\,, \tag{19}$$

ибо $\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2}=0$, а суммы одна съ другою, какъ легко видѣть, сократятся почленно. Изъ (19) получаемъ

$$c'-C=\frac{\eta}{\omega}; \tag{20}$$

внося это въ (18), получаемъ:

$$\left.\begin{aligned}\zeta(u)=\frac{\eta}{\omega}u+\frac{\pi}{2\omega}\Big\{\operatorname{cotg}\frac{u\pi}{2\omega}+\\+\sum_1^\infty{}_n\left[\operatorname{cotg}\left(\frac{u-2n\omega'}{2\omega}\pi\right)-i\right]+\sum_1^\infty{}_n\left[\operatorname{cotg}\left(\frac{u+2n\omega'}{2\omega}\pi\right)+i\right]\Big\}.\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Изъ (20) находимъ:

$$C=c'-\frac{\eta}{\omega}=\frac{c'\omega-\eta}{\omega}=-\frac{\bar{\eta}}{\omega}\,, \tag{22}$$

по (12) § 157. Сравнивая это съ (20) § 165, получаемъ:

$$\frac{\bar{\eta}}{\omega}=\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\left\{\frac{1}{3}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_n \operatorname{cosec}^2\left(\frac{2n\omega'}{2\omega}\pi\right)\right\}, \tag{23}$$

или вслѣдствіе четности сумманда:

$$\bar{\eta}=\frac{\pi^2}{2\omega}\left\{\frac{1}{6}+\sum_1^{\infty}{}_n \operatorname{cosec}^2\left(\frac{n\omega'}{\omega}\pi\right)\right\} \tag{24}$$

[см. Schwartz, (4) на стр. 8].

Также точно, начавъ въ (1) § 166 суммированіе по n, мы придемъ къ такимъ формуламъ:

$$\left.\begin{aligned}\zeta(u)=\frac{\eta'}{\omega'}u+\frac{\pi}{2\omega'}\Bigg\{&\operatorname{cotg}\frac{u\pi}{2\omega'}+\\ +\sum_1^{\infty}{}_m\left[\operatorname{cotg}\left(\frac{u-2m\omega}{2\omega'}\pi\right)+i\right]&+\sum_1^{\infty}{}_m\left[\operatorname{cotg}\left(\frac{u+2m\omega}{2\omega'}\pi\right)-i\right]\Bigg\};\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

$\left(\text{ибо теперь } \Re\left(\frac{\omega}{\omega' i}\right)<0, \text{ такъ какъ } \frac{\omega}{\omega' i}=\frac{1}{-\frac{\omega'}{\omega i}}=-\frac{1}{\frac{\omega'}{\omega i}}\right);$

$$c'-C'=\frac{\eta'}{\omega'}, \tag{26}$$

откуда

$$c'=\frac{c'\omega'-\eta'}{\omega'}=-\frac{\bar{\eta}'}{\omega'}, \tag{27}$$

и наконецъ

$$\frac{\bar{\eta}'}{\omega'}=\left(\frac{\pi}{2\omega'}\right)^2\left\{\frac{1}{3}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_m \operatorname{cosec}^2\left(\frac{2m\omega}{2\omega'}\pi\right)\right\}, \tag{28}$$

откуда

$$\bar{\eta}'=\frac{\pi^2}{2\omega'}\left\{\frac{1}{6}+\sum_1^{\infty}{}_m \operatorname{cosec}^2\left(\frac{m\omega}{\omega'}\pi\right)\right\}. \tag{29}$$

168. Съ помощію (21) пред. § легко повѣряется Лежандровское соотношеніе. Эту формулу можно такъ написать:

$$\left.\begin{aligned}\zeta(u)=\frac{\eta}{\omega}u+\frac{\pi}{2\omega}\Big\{\operatorname{cotg}\frac{u\pi}{2\omega}+\\ +\text{пред.}\sum_{1}^{\nu}{}_{n}\Big[\operatorname{cotg}\Big(\frac{u-2n\omega'}{2\omega}\pi\Big)+\operatorname{cotg}\Big(\frac{u+2n\omega'}{2\omega}\pi\Big)\Big]_{\nu=\infty}\Big\};\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

полагая $u=\omega'$, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}\zeta(\omega')=\eta'=\frac{\eta}{\omega}\omega'+\frac{\pi}{2\omega}\Big\{\operatorname{cotg}\frac{\omega'\pi}{2\omega}+\\ +\text{пред.}\sum_{1}^{\nu}{}_{n}\Big[-\operatorname{cotg}\Big(\frac{(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\Big)+\operatorname{cotg}\Big(\frac{(2n+1)\omega'}{2\omega}\pi\Big)\Big]_{\nu=\infty}\Big\},\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

откуда, перенося первый членъ налѣво, сокращая и помножая на ω, получимъ:

$$\eta'\omega-\eta\omega'=\frac{\pi}{2}\,\text{пред.}\left(\operatorname{cotg}\frac{(2\nu+1)\omega'}{2\omega}\pi\right)_{\nu=\infty};\qquad(3)$$

но

$$\operatorname{cotg}\Big(\frac{(2\nu+1)\omega'}{2\omega}\pi\Big)=i\,\frac{e^{(2\nu+1)\frac{\omega'}{\omega}\frac{\pi}{2}i}+e^{-(2\nu+1)\frac{\omega'}{\omega}\frac{\pi}{2}i}}{e^{(2\nu+1)\frac{\omega'}{\omega}\frac{\pi}{2}i}-e^{-(2\nu+1)\frac{\omega'}{\omega}\frac{\pi}{2}i}};\qquad(4)$$

это выраженіе будетъ стремиться къ $+i$ когда $\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right)<0$, и къ $-i$, когда $\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right)>0$; слѣдовательно

$$\eta'\omega-\eta\omega'=\pm\frac{\pi}{2}i,\qquad(5)$$

гдѣ верхній знакъ относится къ первому случаю, а нижній ко второму, (см. *Biermann*, Theorie der analytischen Functionen. S. 339).

169. на основаніи (22) и (27) § 167 формулы (14) и (21) § 165 принимаютъ слѣдущій видъ:

$$\wp(u)=-\frac{\bar\eta}{\omega}+\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n}\operatorname{cosec}^2\Big(\frac{u-2n\omega'}{2\omega}\pi\Big);\qquad(1)$$

$$\wp(u)=-\frac{\bar\eta'}{\omega'}+\left(\frac{\pi}{2\omega'}\right)^2\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m}\operatorname{cosec}^2\Big(\frac{u-2m\omega}{2\omega'}\pi\Big).\qquad(2)$$

Перемѣняя здѣсь u на $u-v$, получимъ:

$$\wp(u-v) = -\frac{\bar\eta}{\omega} + \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \operatorname{cosec}^2\left(\frac{u-v-2n\omega'}{2\omega}\pi\right); \tag{3}$$

$$\wp(u-v) = -\frac{\bar\eta'}{\omega'} + \left(\frac{\pi}{2\omega'}\right)^2 \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \operatorname{cosec}^2\left(\frac{u-v-2m\omega}{2\omega'}\pi\right). \tag{4}$$

Полагая здѣсь по очереди $v = -\omega,\ -\omega'',\ -\omega'$, мы получимъ:

$$\left.\begin{aligned}\wp(u+\omega) &= -\frac{\bar\eta}{\omega} + \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \sec^2\left(\frac{u-2n\omega'}{2\omega}\pi\right) = \\ &= -\frac{\bar\eta'}{\omega'} + \left(\frac{\pi}{2\omega'}\right)^2 \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \operatorname{cosec}^2\left(\frac{u-(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi\right);\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned}\wp(u+\omega'') &= -\frac{\bar\eta}{\omega} + \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \sec^2\left(\frac{u-(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\right) = \\ &= -\frac{\bar\eta'}{\omega'} + \left(\frac{\pi}{2\omega'}\right)^2 \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \sec^2\left(\frac{u-(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi\right);\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned}\wp(u+\omega') &= -\frac{\bar\eta}{\omega} + \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \operatorname{cosec}^2\left(\frac{u-(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\right) = \\ &= -\frac{\bar\eta'}{\omega'} + \left(\frac{\pi}{2\omega'}\right)^2 \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \sec^2\left(\frac{u-2m\omega}{2\omega'}\pi\right).\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Полагая здѣсь $u = 0$ будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}e_1 = \wp(\omega) &= -\frac{\bar\eta}{\omega} + \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \sec^2\left(\frac{2n\omega'}{2\omega}\pi\right) = \\ &= -\frac{\bar\eta'}{\omega'} + \left(\frac{\pi}{2\omega'}\right)^2 \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \operatorname{cosec}^2\left(\frac{(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi\right);\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned}e_2 = \wp(\omega'') &= -\frac{\bar\eta}{\omega} + \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \sec^2\left(\frac{(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\right) = \\ &= -\frac{\bar\eta'}{\omega'} + \left(\frac{\pi}{2\omega'}\right)^2 \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \sec^2\left(\frac{(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi\right);\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$e_3 = \wp(\omega') = -\frac{\bar\eta}{\omega} + \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \operatorname{cosec}^2\left(\frac{(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\right) = -\frac{\bar\eta'}{\omega'} + \left(\frac{\pi}{2\omega'}\right)^2 \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \sec^2\left(\frac{2m\omega}{2\omega'}\pi\right). \qquad (10)$$

Эти формулы выражаютъ величины e_1, e_2, e_3 чрезъ величины ω, ω' и $\bar\eta$, $\bar\eta'$; но послѣднія по формуламъ (24) и (29) § 167 выражаются чрезъ первыя; потому исключивъ $\bar\eta$, $\bar\eta'$ на основаніи упомянутыхъ равенствъ, получимъ выраженія e_1, e_2, e_3 чрезъ одни ω и ω'. Это исключеніе доставитъ намъ слѣдующія формулы:

$$e_1 = \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \left\{\frac{2}{3} - 8\sum_1^{\infty}{}_n \operatorname{cotg}^2\left(\frac{2n\omega'}{\omega}\pi\right)\right\} = \left(\frac{\pi}{2\omega'}\right)^2 \left\{-\frac{1}{3} + 2\sum_1^{\infty}{}_m (-1)^{m-1} \operatorname{cosec}^2\left(\frac{m\omega}{2\omega'}\pi\right)\right\}; \qquad (11)$$

$$e_2 = \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \left\{-\frac{1}{3} + 2\sum_1^{\infty}{}_n \left(\sec^2\left(\frac{(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\right) - \operatorname{cosec}^2\left(\frac{2n\omega'}{2\omega}\pi\right)\right)\right\} = \left(\frac{\pi}{2\omega'}\right)^2 \left\{-\frac{1}{3} + 2\sum_1^{\infty}{}_m \left(\sec^2\left(\frac{(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi\right) - \operatorname{cosec}^2\left(\frac{2m\omega}{2\omega'}\pi\right)\right)\right\}; \qquad (12)$$

$$e_3 = \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \left\{-\frac{1}{3} + 2\sum_1^{\infty}{}_n (-1)^{n-1} \operatorname{cosec}^2\left(\frac{n\omega'}{2\omega}\pi\right)\right\} = \left(\frac{\pi}{2\omega'}\right)^2 \left\{\frac{2}{3} - 8\sum_1^{\infty}{}_n \operatorname{cotg}^2\left(\frac{2m\omega}{\omega'}\pi\right)\right\}. \qquad (13)$$

170. Внеся въ (9) § 166 вмѣсто $c' - C$ его значеніе изъ (20) § 167, мы можемъ его такъ представить:

$$\zeta(u-v) + \zeta(v) = \frac{\eta}{\omega}u + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \frac{\pi}{2\omega}\left[\operatorname{cotg}\left(\frac{u-v-2n\omega'}{2\omega}\pi\right) + \operatorname{cotg}\left(\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi\right)\right]; \qquad (1)$$

помноживъ его на du и проинтегрировавъ отъ $u = 0$ по пути, непроходящему чрезъ $u = 2\tilde\omega$, мы получимъ, имѣя въ виду, что по (3) § 155 и (1) § 91:

$$\int_0^u \zeta(u-v)du = Y(u-v) - Y(-v) = \log\frac{\Theta(u-v)}{\Theta(-v)}, \qquad (2)$$

слѣдующее равенство:

$$\log\frac{\Theta(u-v)}{\Theta(-v)}+\zeta(v)u=\frac{\eta}{\omega}\frac{u^2}{2}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\left\{\log\frac{\sin\left(\frac{u-v-2n\omega'}{2\omega}\pi\right)}{\sin\left(\frac{-v-2n\omega'}{2\omega}\pi\right)}+\frac{\pi}{2\omega}\operatorname{cotg}\left(\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\right)\right\}; \quad (3)$$

переходя же отъ логариѳма къ числу, мы получимъ:

$$\frac{\Theta(u-v)}{\Theta(-v)}e^{\zeta(v)u}=e^{\frac{\eta}{\omega}\frac{u^2}{2}}\prod_{-\infty}^{+\infty}{}_n\frac{\sin\left(\frac{2n\omega'+v-u}{2\omega}\pi\right)}{\sin\left(\frac{2n\omega'+v}{2\omega}\pi\right)}e^{\frac{\pi u}{2\omega}\operatorname{cotg}\left(\frac{2n\omega'+v}{2\omega}\right)}. \quad (4)$$

Точно также изъ (12) § 166, по внесеніи въ него вмѣсто $c'-C'$ его значенія изъ 26 § 167, мы получимъ такую формулу:

$$\frac{\Theta(u-v)}{\Theta(-v)}e^{\zeta(v)u}=e^{\frac{\eta'}{\omega'}\frac{u^2}{2}}\prod_{-\infty}^{+\infty}{}_m\frac{\sin\left(\frac{2m\omega+v-u}{2\omega'}\pi\right)}{\sin\left(\frac{2m\omega+v}{2\omega'}\pi\right)}e^{\frac{\pi u}{2\omega'}\operatorname{cotg}\left(\frac{2m+v}{2\omega'}\pi\right)}. \quad (5)$$

Обѣ эти формулы представляютъ преобразованіе формулы (5) § 155 чрезъ приведеніе двойного произведенія въ простое, собирая для (4) множители сперва по значеніямъ m, потомъ по n, для (5) наоборотъ, сперва по n, потомъ по m.

171. Дѣйствительно, подставляя вмѣсто w его значеніе во входящее туда двойное безконечное произведеніе, можно послѣднее такъ представить:

$$\left.\begin{aligned}&\prod_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n}\left(1-\frac{u}{v+w}\right)e^{\frac{u}{v+w}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{(v+w)^2}}=\\&=\prod_{-\infty}^{+\infty}{}_n e^{\frac{u^2}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\frac{1}{(v+2m\omega+2n\omega')^2}}\prod_{-\infty}^{+\infty}{}_m\left(1-\frac{u}{v+2m\omega+2n\omega'}\right)e^{\frac{u}{v-2m\omega+2n\omega'}},\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

вынося множитель съ u^2 изъ подъ Π_m, ибо рядъ $\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\frac{1}{(v+2m\omega+2n\omega')^2}$ есть безусловно-сходящійся, и по формулѣ (12) § 144 будетъ:

$$\left.\begin{aligned}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \frac{1}{(v+2n\omega'+2m\omega)^2} &= \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \frac{1}{\left(\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi+m\pi\right)^2} = \\ &= \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \operatorname{cosec}^2\left(\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi\right),\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

(ибо $-m$ пробѣгаетъ тотъ же рядъ значеній, какъ тамъ k). Затѣмъ общій членъ произведенія въ (1), именно произведеніе по m, можетъ быть такъ преобразовано:

$$\left.\begin{aligned}&\prod_{-\infty}^{+\infty}{}_m\left(1-\frac{u}{v+2m\omega+2n\omega'}\right)e^{\frac{u}{v+2m\omega+2n\omega'}} = \\ &= \prod_{-\infty}^{+\infty}{}_m \frac{2m\omega-(u-v-2n\omega')}{2m\omega+v+2n\omega'}\, e^{\frac{u}{v+2m\omega+2n\omega'}} = \\ &= -\frac{u-v-2n\omega'}{v+2n\omega'}\, e^{\frac{u}{v+2n\omega'}} \prod_{-\infty}^{+\infty}{}' \frac{\left(1-\frac{u-v-2n\omega'}{2m\omega}\right)e^{\frac{u-v-2n\omega'}{2m\omega}}}{\left(1+\frac{v+2n\omega'}{2m\omega}\right)e^{-\frac{v+2n\omega}{2m\omega}}} \cdot e^{u\left\{\frac{1}{v+2n\omega'+2m\omega}-\frac{1}{2m\omega}\right\}};\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

здѣсь послѣдніе два множителя отдѣльно образуютъ безусловно-сходящееся произведеніе, ибо таковъ рядъ:

$$\frac{1}{v+2n\omega'}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_m\left\{\frac{1}{v+2n\omega'+2m\omega}-\frac{1}{2m\omega}\right\}, \quad (4)$$

и по формулѣ (6) § 145, къ которой онъ приведется, полагая $m=-k$, будетъ

$$\frac{1}{v+2n\omega'}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_m\left\{\frac{1}{v+2n\omega'+2m\omega}-\frac{1}{2m\omega}\right\}=\frac{\pi}{2\omega}\operatorname{cotg}\left(\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi\right); \quad (5)$$

затѣмъ по (9) § 147 будетъ:

$$(u-v-2n\omega')\prod_{-\infty}^{+\infty}{}'_m\left(1-\frac{u-v-2n\omega'}{2m\omega}\right)e^{\frac{u-v-2n\omega'}{2m\omega}}=\frac{\pi}{2\omega}\sin\left(\frac{u-v-2n\omega'}{2\omega}\pi\right); \quad (6)$$

и

$$(v+2n\omega')\prod_{-\infty}^{+\infty}{}'_m\left(1+\frac{v+2n\omega'}{2m\omega}\right)e^{-\frac{v+2n\omega'}{2m\omega}}=\frac{\pi}{2\omega}\sin\left(\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi\right). \tag{7}$$

На основаніи послѣднихъ трехъ равенствъ, равенство (3) преобразуется въ такое:

$$\left.\begin{aligned}&\prod_{-\infty}^{+\infty}{}_m\left(1-\frac{u}{v+2m\omega+2n\omega'}\right)e^{\frac{u}{v+2m\omega+2n\omega'}}=\\&=\frac{\sin\left(\frac{2n\omega'+v-u}{2\omega}\pi\right)}{\sin\left(\frac{2n\omega'+v}{2\omega}\pi\right)}e^{\frac{\pi u}{2\omega}\operatorname{cotg}\left(\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi\right)}.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Внося отсюда и изъ (2) въ (1), будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}&\prod_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n}\left(1-\frac{u}{v+w}\right)e^{\frac{u}{v+w}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{(v+w)^2}}=\\&=e^{\frac{u^2}{2}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\operatorname{cosec}^2\left(\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi\right)}\prod_{-\infty}^{+\infty}{}_m\frac{\sin\left(\frac{2n\omega'+v-u}{2\omega}\pi\right)}{\sin\left(\frac{2n\omega'+v}{2\omega}\pi\right)}e^{\frac{\pi u}{2\omega}\operatorname{cotg}\left(\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi\right)}.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Внося это въ (5) § 155 и имѣя въ виду, что по (14) § 165 и (20) § 167, такъ какъ $\zeta'(v)=c'-\wp(u)$, будетъ

$$\zeta'(v)+\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\operatorname{cosec}^2\left(\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi\right)=c'-C=\frac{\eta}{\omega}, \tag{10}$$

мы и получимъ формулу (4) пред. §. Также точно получится формула (5) того же §, если начать собирать множители сперва по значеніямъ m.

172. Формулы (4) и (5) § 170 допускаютъ еще одно преобразованіе на основаніи формулъ (21) и (25) § 167 соотвѣтственно. Въ первой изъ этихъ формулъ, т. е. (4) § 170, экспоненціальный множитель подъ знакомъ произведенія, тамъ гдѣ $n>0$, можетъ быть такъ представленъ:

$$e^{-\frac{\pi u}{2\omega}i}\cdot e^{\frac{\pi u}{2\omega}\left[\operatorname{cotg}\left(\frac{2n\omega'+v}{2\omega}\pi\right)+i\right]}, \tag{1}$$

а гдѣ $n < 0$, такъ:

$$e^{+\frac{\pi u}{2\omega}i} \cdot e^{\frac{\pi u}{2\omega}\left[\operatorname{cotg}\left(\frac{v-2n\omega'}{2\omega}\pi\right)-i\right]}, \tag{2}$$

гдѣ уже $n > 0$; но какъ ряды

$$\sum_{1}^{\infty}{}_n \left[\operatorname{cotg}\left(\frac{v \pm 2n\omega'}{2\omega}\pi\right) \pm i\right] \tag{3}$$

безусловно-сходящіеся по § 170, то множители съ этими показателями могутъ быть вынесены за знакъ произведенія; перенося затѣмъ полученный такимъ, образомъ внѣшній множитель:

$$e^{\frac{\pi u}{2\omega}\left\{\operatorname{cotg}\frac{u\pi}{2\omega}+\sum_{1}^{\infty}{}_n\left[\operatorname{cotg}\left(\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi\right)+i\right]+\sum_{1}^{\infty}{}_n\left[\operatorname{cotg}\left(\frac{v-2n\omega'}{2\omega}\pi\right)-i\right]\right\}} \tag{4}$$

въ лѣвую часть равенства, мы по (21) § 167 получимъ такую формулу:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\Theta(u-v)}{\Theta(-v)}e^{+\frac{\eta}{\omega}vu} = \\ &= e^{\frac{\eta}{\omega}\frac{u^2}{2}}\frac{\sin\left(\frac{v-u}{2\omega}\pi\right)}{\sin\left(\frac{v}{2\omega}\pi\right)}\prod_{1}^{\infty}{}_n\frac{\sin\left(\frac{2n\omega'+v-u}{2\omega}\pi\right)}{\sin\left(\frac{2n\omega'+v}{2\omega}\pi\right)}e^{-\frac{\pi u}{2\omega}i}\prod_{1}^{\infty}{}_n\frac{\sin\left(\frac{2n\omega'-v+u}{2\omega}\pi\right)}{\sin\left(\frac{2n\omega'-v}{2\omega}\pi\right)}e^{+\frac{\pi u}{2\omega}i}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

(Во второмъ произведеніи мы помножили числителя и знаменателя на -1). Точно также изъ (5) § 170 при помощи (25) § 167 получимъ:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\Theta(u-v)}{\Theta(-v)}e^{+\frac{\eta'}{\omega'}vu} = \\ &= e^{\frac{\eta'}{\omega'}\frac{u^2}{2}}\frac{\sin\left(\frac{v-u}{2\omega'}\pi\right)}{\sin\left(\frac{v}{2\omega'}\pi\right)}\prod_{1}^{\infty}{}_m\frac{\sin\left(\frac{2m\omega+v-u}{2\omega'}\pi\right)}{\sin\left(\frac{2m\omega+v}{2\omega'}\pi\right)}e^{+\frac{\pi u}{2\omega'}i}\prod_{1}^{\infty}{}_m\frac{\sin\left(\frac{2m\omega-v+u}{2\omega'}\pi\right)}{\sin\left(\frac{2m\omega-v}{2\omega'}\pi\right)}e^{-\frac{\pi u}{2\omega'}i}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Эти формулы (5) и (6) получатся также, и притомъ всего скорѣе, интегрируя равенства (21) и (25) § 167, предварительно перемѣнивъ въ нихъ u на $u-v$, и перенося членъ $-\frac{\eta}{\omega}v$, соотвѣтственно $-\frac{\eta'}{\omega'}v$, налѣво.

173. Отсюда, давая v частныя значенія, получимъ разложенія основной и союзныхъ Θ-функцій, которыя будутъ представлять аналогичное преобразованіе двойныхъ безконечныхъ произведеній, въ которыя разлагаются эти функціи по формуламъ (10) и (12) § 155. Помножая (5) и (6) пред. § на $-v$, и полагая $v=0$, получимъ:

$$\frac{\Theta(u)}{\Theta'(0)}=\frac{2\omega}{\pi}e^{\frac{\eta}{\omega}\frac{u^2}{2}}\sin\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)\prod_1^\infty{}_n\frac{\sin\left(\frac{2n\omega'-u}{2\omega}\pi\right)}{\sin\left(\frac{2n\omega'}{2\omega}\pi\right)}e^{-\frac{\pi u}{2\omega}i}\prod_1^\infty{}_n\frac{\sin\left(\frac{2n\omega'+u}{2\omega}\pi\right)}{\sin\left(\frac{2n\omega'}{2\omega}\pi\right)}e^{\frac{\pi u}{2\omega}i}= \quad (1)$$

$$=\frac{2\omega'}{\pi}e^{\frac{\eta'}{\omega'}\frac{u^2}{2}}\sin\left(\frac{u\pi}{2\omega'}\right)\prod_1^\infty{}_m\frac{\sin\left(\frac{2m\omega-u}{2\omega'}\pi\right)}{\sin\left(\frac{2m\omega}{2\omega'}\pi\right)}e^{\frac{\pi u}{2\omega'}i}\prod_1^\infty{}_m\frac{\sin\left(\frac{2m\omega+u}{2\omega'}\pi\right)}{\sin\left(\frac{2m\omega}{2\omega'}\pi\right)}e^{-\frac{\pi u}{2\omega'}i}. \quad (2)$$

Полагая $v=-\omega$ въ (5), получимъ:

$$\frac{\Theta(u+\omega)}{\Theta(\omega)}e^{-\eta u}=e^{\frac{\eta}{\omega}\frac{u^2}{2}}\cos\frac{u\pi}{2\omega}\prod_1^\infty{}_n\frac{\cos\left(\frac{2n\omega'+u}{2\omega}\pi\right)}{\cos\left(\frac{2n\omega'}{2\omega}\pi\right)}e^{-\frac{\pi u}{2\omega}i}\prod_1^\infty{}_n\frac{\cos\left(\frac{2n\omega'+u}{2\omega}\pi\right)}{\cos\left(\frac{2n\omega'}{2\omega}\pi\right)}e^{\frac{\pi u}{2\omega}i},$$

или по (3) § 98:

$$\frac{\Theta_1(u)}{\Theta'(0)}=e^{\frac{\eta}{\omega}\frac{u^2}{2}}\cos\frac{u\pi}{2\omega}\prod_1^\infty{}_n\frac{\cos\left(\frac{2n\omega'-u}{2\omega}\pi\right)}{\cos\left(\frac{2n\omega'}{2\omega}\pi\right)}e^{-\frac{\pi u}{2\omega}i}\prod_1^\infty{}_n\frac{\cos\left(\frac{2n\omega'+u}{2\omega}\pi\right)}{\cos\left(\frac{2n\omega'}{2\omega}\pi\right)}e^{\frac{\pi u}{2\omega}i}. \quad (3)$$

Дѣлая тоже положеніе въ (6), получимъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\Theta(u+\omega)}{\Theta(\omega)}e^{-\frac{\eta'}{\omega'}\omega u}&=e^{\frac{\eta'}{\omega'}\frac{u^2}{2}}\frac{\sin\left(\frac{\omega+u}{2\omega'}\pi\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2\omega'}\pi\right)}\prod_1^\infty{}_m\frac{\sin\left(\frac{(2m-1)\omega-u}{2\omega'}\pi\right)}{\sin\left(\frac{(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi\right)}e^{\frac{\pi u}{2\omega'}i}\times\\&\times\prod_1^\infty{}_m\frac{\sin\left(\frac{(2m+1)\omega+u}{2\omega'}\pi\right)}{\sin\left(\frac{(2m+1)\omega}{2\omega'}\pi\right)}e^{-\frac{\pi u}{2\omega'}i};\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

но лѣвую часть можно такъ представить:

$$\frac{\Theta(u+\omega)}{\Theta(\omega)}e^{-\frac{\eta'}{\omega'}\omega u}=\frac{\Theta(u+\omega)}{\Theta(\omega)}e^{-\eta u}\cdot e^{(\eta\omega'-\eta'\omega)\frac{u}{\omega'}}=\frac{\Theta_1(u)}{\Theta'(0)}e^{\frac{\pi u}{2\omega'}i}; \quad (5)$$

ибо по (13) § 95 при $\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right) > 0$ имѣемъ: $\eta\omega' - \eta'\omega = \frac{\pi}{2}i$; внося изъ (5) въ (4) и помножая все на $e^{-\frac{\pi u}{2\omega'}i}$, мы получимъ, подводя $\frac{\sin\left(\frac{\omega+u}{2\omega'}\pi\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2\omega'}\pi\right)} e^{-\frac{\pi u}{2\omega'}i}$ подъ второе произведеніе, гдѣ этого множителя теперь нехватаетъ, слѣдующее:

$$\frac{\Theta_1(u)}{\Theta'(0)} = e^{\frac{\eta'}{\omega'}\frac{u^2}{2}} \prod_1^\infty{}_m \frac{\sin\left(\frac{(2m-1)\omega-u}{2\omega'}\pi\right)}{\sin\left(\frac{(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi\right)} e^{\frac{\pi u}{2\omega'}i} \prod_1^\infty{}_m \frac{\sin\left(\frac{(2m-1)\omega+u}{2\omega'}\pi\right)}{\sin\frac{(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi} e^{-\frac{\pi u}{2\omega'}i}. \quad (6)$$

Такимъ же точно образомъ, полагая въ (5) и (6) пред. § послѣдовательно $v = -\omega''$, $v = -\omega'$, и имѣя въ виду, что, по (15) § 95 для $\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right) > 0$ будетъ: $\eta''\omega - \eta\omega'' = \frac{\pi}{2}i$, а по (14) того же §: $\eta''\omega' - \eta'\omega'' = \frac{\pi}{2}i$, мы получимъ слѣдующія четыре формулы:

$$\frac{\Theta_2(u)}{\Theta'(0)} = e^{\frac{\eta}{\omega}\frac{u^2}{2}} \prod_1^\infty \frac{\cos\left(\frac{(2n-1)\omega'-u}{2\omega}\pi\right)}{\cos\left(\frac{(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\right)} e^{-\frac{\pi u}{2\omega}i} \prod_1^\infty{}_n \frac{\cos\left(\frac{(2n-1)\omega'+u}{2\omega}\pi\right)}{\cos\left(\frac{(2n-2)\omega'}{2\omega}\pi\right)} e^{+\frac{\pi u}{2\omega}i}; \quad (7)$$

$$= e^{\frac{\eta'}{\omega'}\frac{u^2}{2}} \prod_1^\infty{}_m \frac{\cos\left(\frac{(2m-1)\omega-u}{2\omega'}\pi\right)}{\cos\left(\frac{(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi\right)} e^{+\frac{\pi u}{2\omega'}i} \prod_1^\infty{}_m \frac{\cos\left(\frac{(2m-1)\omega+u}{2\omega'}\pi\right)}{\cos\left(\frac{(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi\right)} e^{-\frac{\pi u}{2\omega'}i}; \quad (8)$$

$$\frac{\Theta_3(u)}{\Theta'(0)} = e^{\frac{\eta}{\omega}\frac{u^2}{2}} \prod_1^\infty{}_n \frac{\sin\left(\frac{(2n-1)\omega'-u}{2\omega}\pi\right)}{\sin\left(\frac{(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\right)} e^{-\frac{\pi u}{2\omega}i} \prod_1^\infty{}_n \frac{\sin\left(\frac{(2n-1)\omega'+u}{2\omega}\pi\right)}{\sin\left(\frac{(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\right)} e^{+\frac{\pi u}{2\omega}i}; \quad (9)$$

$$= e^{\frac{\eta'}{\omega'}\frac{u^2}{2}} \cos\frac{u\pi}{2\omega'} \prod_1^\infty{}_m \frac{\cos\left(\frac{2m\omega-u}{2\omega'}\pi\right)}{\cos\left(\frac{2m\omega}{2\omega'}\pi\right)} e^{+\frac{\pi u}{2\omega'}i} \prod_1^\infty{}_m \frac{\cos\left(\frac{2m\omega+u}{2\omega'}\pi\right)}{\cos\left(\frac{2m\omega}{2\omega'}\pi\right)} e^{-\frac{\pi u}{2\omega'}i}. \quad (10)$$

Формулы (1) и (2) представляютъ преобразованіе въ простое двойнаго безконечнаго произведенія (10) § 155, а (5), (6)—(10) преобразованіе такое же (12) того же § для $i = 1, 2, 3$, ибо (5) и (6) пред. § суть такія же преобразованія (5) § 155. Члены $c' - e_i = c' - \wp(\omega_i)$ и

$\zeta'(\omega_i)$ исчезнутъ изъ этихъ формулъ на основаніи (10) § 171 и другого ему аналогичнаго, получающагося, когда начинаемъ собирать множителей по n, а затѣмъ по m. Разложенія функцій:

$$\sigma(u) \quad \text{и} \quad \sigma_i(u)$$

въ простыя произведенія будутъ такія же, только η и η' замѣнятся соотвѣтственно чрезъ $\bar{\eta}$ и $\bar{\eta}'$, да изъ лѣвой части уйдетъ множитель $\dfrac{1}{\Theta'(0)}$, ибо, когда $\Theta(u)$ переходитъ въ $\sigma(u)$, то дѣлается $\Theta'(0)=1$. На этомъ основаніи мы не будемъ выписывать этихъ формулъ.

174. Предыдущія формулы отвѣчаютъ формулѣ (7) на стр. 8 у Schwartz'a; но заслуживаютъ вниманія и формулы, получающіяся непосредственно изъ (4) и (5) § 170, полагая тамъ $v=-\omega$, $-\omega''$ и $-\omega'$, именно слѣдующія:

$$\frac{\Theta_1(u)}{\Theta'(0)}=e^{\frac{\eta}{\omega}\frac{u^2}{2}}\prod_{-\infty}^{+\infty}{}_n\frac{\cos\left(\frac{u-2n\omega'}{2\omega}\pi\right)}{\cos\left(-\frac{2n\omega'}{2\omega}\pi\right)}e^{-\frac{\pi u}{2\omega}\operatorname{tg}\left(\frac{2n\omega'}{2\omega}\pi\right)}; \tag{1}$$

$$=e^{\frac{\eta'}{\omega'}\frac{u^2}{2}}\prod_{-\infty}^{+\infty}{}_m\frac{\sin\left(\frac{u-(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi\right)}{\sin\left(-\frac{(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi\right)}e^{\frac{\pi u}{2\omega'}\operatorname{cotg}\left(\frac{(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi\right)}; \tag{2}$$

$$\frac{\Theta_2(u)}{\Theta'(0)}=e^{\frac{\eta}{\omega}\frac{u^2}{2}}\prod_{-\infty}^{+\infty}{}_n\frac{\cos\left(\frac{u-(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\right)}{\cos\left(-\frac{(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\right)}e^{-\frac{\pi u}{2\omega}\operatorname{tg}\left(\frac{(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\right)}; \tag{3}$$

$$=e^{\frac{\eta'}{\omega'}\frac{u^2}{2}}\prod_{-\infty}^{+\infty}{}_m\frac{\cos\left(\frac{u-(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi\right)}{\cos\left(-\frac{(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi\right)}e^{-\frac{\pi u}{2\omega'}\operatorname{tg}\left(\frac{(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi\right)}; \tag{4}$$

$$\frac{\Theta_3(u)}{\Theta'(0)}=e^{\frac{\eta}{\omega}\frac{u^2}{2}}\prod_{-\infty}^{+\infty}{}_n\frac{\sin\left(\frac{u-(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\right)}{\sin\left(-\frac{(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\right)}e^{\frac{\pi u}{2\omega}\operatorname{cotg}\left(\frac{(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\right)}; \tag{5}$$

$$=e^{\frac{\eta'}{\omega'}\frac{u^2}{2}}\prod_{-\infty}^{+\infty}{}_m\frac{\cos\left(\frac{u-2m\omega}{2\omega'}\pi\right)}{\cos\left(-\frac{2m\omega}{2\omega'}\pi\right)}e^{-\frac{\pi u}{2\omega'}\operatorname{tg}\left(\frac{2m\omega}{2\omega'}\pi\right)}. \tag{6}$$

Соотвѣтственныя формулы для основной Θ-функціи получатся изъ (4) и (5) § 170 помноживъ предварительно на $-ve^{-\frac{\pi}{2\omega}\operatorname{cotg}\frac{v\pi}{2\omega}}$, и полагая затѣмъ $v=0$, и будутъ, такъ какъ:

$$\text{пред.}\left(\frac{-v}{\Theta(-v)}\right)_{v=0}=\frac{1}{\Theta'(0)};\quad \text{пред.}\left(\zeta(v)-\frac{\pi}{2\omega}\operatorname{cotg}\frac{v\pi}{2\omega}\right)_{v=0}=0,$$

— по (17) § 167, и пред. $\left(\dfrac{v}{\sin\frac{v\pi}{2\omega}}\right)_{v=0}=\dfrac{2\omega}{\pi}$, слѣдующія:

$$\frac{\Theta(u)}{\Theta'(0)}=e^{\frac{\eta}{\omega}\frac{u^2}{2}}\frac{2\omega}{\pi}\sin\frac{u\pi}{2\omega}\prod_{-\infty}^{+\infty}{}_n'\frac{\sin\left(\frac{2n\omega'-u}{2\omega}\pi\right)}{\sin\left(\frac{2n\omega'}{2\omega}\pi\right)}e^{\frac{\pi u}{2\omega}\operatorname{cotg}\left(\frac{2n\omega'}{2\omega}\pi\right)};\tag{7}$$

$$=e^{\frac{\eta'}{\omega'}\frac{u^2}{2}}\frac{2\omega'}{\pi}\sin\frac{u\pi}{2\omega'}\prod_{-\infty}^{+\infty}{}_m'\frac{\sin\left(\frac{2m\omega-u}{2\omega'}\pi\right)}{\sin\left(\frac{2m\omega}{2\omega'}\pi\right)}e^{\frac{\pi u}{2\omega'}\operatorname{cotg}\left(\frac{2m\omega}{2\omega'}\pi\right)}.\tag{8}$$

Слѣды формулы (7) находятся у Бирмана на стр. 338.

175. Переходимъ теперь къ разложеніямъ въ двойные ряды частныхъ дробей функцій $\sqrt{\wp(u)-e_i}$ и проч., найденныхъ въ §§ 160 и слѣдующихъ; чтобы ихъ преобразовать въ простые, необходимо отдѣльно ихъ разсматривать для каждаго значенія i, такъ какъ λ_i имѣетъ значеніе, зависящее отъ i. Чтобы сократить эту работу, мы сдѣлаемъ это преобразованіе двойного ряда въ простой только для ряда (2) § 162; преобразованія другихъ двойныхъ рядовъ въ простые можно будетъ тогда получить отсюда при помощи интегрированія и вставленія вмѣсто v частныхъ значеній. Полагая въ упомянутой формулѣ (2) § 162 $i=1$, мы будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}&(\sqrt{\wp(u-v)-e_1})'-(\sqrt{\wp(-v)-e_1})'=\\&=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n}(-1)^n\left\{\frac{-1}{(u-v-w)^2}+\frac{1}{(v+w)^2}\right\};\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

суммируя сперва по m, подставивъ вмѣсто w его значеніе, по (12) § 144 получимъ:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n}(-1)^n\left\{\frac{-1}{(u-v-2n\omega'-2m\omega)^2}+\frac{1}{(v+2n\omega'+2n\omega)^2}\right\}=\\
&=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n(-1)^n\left\{\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\frac{-1}{(u-v-2n\omega'-2m\omega)^2}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\frac{1}{(v+2n\omega'+2m\omega)^2}\right\}=\\
&=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n(-1)^n\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\left\{-\operatorname{cosec}^2\left(\frac{u-v-2n\omega'}{2\omega}\pi\right)+\operatorname{cosec}^2\left(\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi\right)\right\}=\\
&=\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\left\{-\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n(-1)^n\operatorname{cosec}^2\left(\frac{u-v-2n\omega'}{2\omega}\pi\right)+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n(-1)^n\operatorname{cosec}^2\left(\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi\right)\right\};
\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

— такъ какъ оба ряда безусловно-сходящіеся, ибо члены ихъ только знаками отличаются отъ членовъ рядовъ въ (5) § 165, безусловная сходимость которыхъ тамъ была доказана. Внося изъ (2) въ (1), придемъ къ заключенію, что

$$(\sqrt{\wp(u-v)-e_1})' = C-\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n(-1)^n\operatorname{cosec}^2\left(\frac{u-v-2n\omega'}{2\omega}\pi\right); \tag{3}$$

чтобы опредѣлить постоянное C, положимъ $u-v=\omega'$; тогда лѣвая часть по (2) § 161 для $i=1$ обратится въ нуль, и мы будемъ имѣть:

$$0=C-\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n(-1)^n\operatorname{cosec}^2\left(\frac{(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\right); \tag{4}$$

но

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n(-1)^n\operatorname{cosec}^2\left(\frac{(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\right)=\sum_{1}^{\infty}{}_n(-1)^n\operatorname{cosec}^2\left(\frac{(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\right)+\\
&\qquad+\sum_{1}^{\infty}{}_n(-1)^{n-1}\operatorname{cosec}^2\left(\frac{(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\right)=0;
\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

слѣдовательно и

$$C=0. \tag{6}$$

Внося это значеніе въ (3), будемъ имѣть:

$$(\sqrt{\wp(u-v)-e_1})' = -\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n(-1)^n\operatorname{cosec}^2\left(\frac{u-v-2n\omega'}{2\omega}\pi\right). \tag{7}$$

Интегрируя отъ $u = 0$, получимъ отсюда:

$$\left.\begin{aligned}&\sqrt{\wp(u-v)-e_1}-\sqrt{\wp(-v)-e_1}=\\&=\frac{\pi}{2\omega}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n(-1)^n\left\{\cot g\left(\frac{u-v-2n\omega'}{2\omega}\pi\right)+\cot g\left(\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi\right)\right\}=\\&=\frac{\pi}{2\omega}\left\{\cot g\left(\frac{u-v}{2\omega}\pi\right)+\cot g\frac{v\pi}{2\omega}+\right.\\&\left.+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_n(-1)^n\left\{\left(\cot g\left(\frac{u-v-2n\omega'}{2\omega}\pi\right)\mp i\right)+\left(\cot g\left(\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi\right)\pm i\right)\right\}\right\};\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

гдѣ верхній знакъ предъ i для части, гдѣ $n>0$, и нижній, гдѣ $n<0$. Ряды

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_n(-1)^n\left(\cot g\left(\frac{u-v-2n\omega'}{2\omega}\pi\right)\mp i\right)\quad\text{и}\quad\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_n(-1)^n\left(\cot g\left(\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi\right)\pm i\right)\quad(9)$$

лишь знаками своихъ членовъ отличаясь отъ рядовъ (2) § 167, будутъ, какъ тѣ, безусловно-сходящіеся; а потому изъ (8) выводимъ:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{\wp(u-v)-e_1}=C+\frac{\pi}{2\omega}&\left\{\cot g\left(\frac{u-v}{2\omega}\pi\right)+\right.\\&\left.+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_n(-1)^n\left(\cot g\left(\frac{u-v-2n\omega'}{2\omega}\pi\right)\mp i\right)\right\};\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

полагая здѣсь $u - v = \omega$, получимъ, написавъ отдѣльно части ряда, гдѣ $n>0$, и гдѣ $n<0$:

$$0=C+\frac{\pi}{2\omega}\left\{\sum_{1}^{\infty}{}_n(-1)^n\left[\operatorname{tg}\left(\frac{2n\omega'}{2\omega}\pi\right)-i\right]-\sum_{1}^{\infty}{}_n(-1)^n\left[\operatorname{tg}\left(\frac{2n\omega'}{2\omega}\pi\right)-i\right]\right\},\quad(11)$$

откуда слѣдуетъ, что

$$C=0;$$

на основаніи этого изъ (10) получимъ окончательно:

$$\sqrt{\wp(u-v)-e_1}=\frac{\pi}{2\omega}\left\{\cot g\left(\frac{u-v}{2\omega}\pi\right)+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_n(-1)^n\left(\cot g\left(\frac{u-v-2n\omega'}{2\omega}\pi\right)\mp i\right)\right\},\quad(12)$$

гдѣ, повторяемъ, верхній знакъ берется въ части суммы, гдѣ $n > 0$, нижній гдѣ $n < 0$. Прибавивъ въ скобкахъ $\{\ \}$ и отнявъ i, можно будетъ $\operatorname{cotg}\left(\frac{u-v}{2\omega}\pi\right) + i$, какъ получающееся изъ общаго члена суммы, полагая $n = 0$, внести подъ знакъ суммы, и тогда разложеніе (12) приметъ такой видъ:

$$\sqrt{\wp(u-v)-e_1} = \frac{\pi}{2\omega}\left\{-i + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n (-1)^n \left(\operatorname{cotg}\left(\frac{u-v-2n\omega'}{2\omega}\pi\right) \mp i\right)\right\}. \quad (13)$$

176. Начавъ въ (1) пред. § суммированіе съ n, по (16) § 145 будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n} (-1)^n \left\{\frac{-1}{(u-v-2m\omega-2n\omega')^2} + \frac{1}{(v+2m\omega+2n\omega')^2}\right\} = \\
&= \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_m \left\{-\frac{(-1)^n}{(u-v-2m\omega-2n\omega')^2} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \frac{(-1)^n}{(v+2m\omega+2n\omega')^2}\right\} = \\
&= \left(\frac{\pi}{2\omega'}\right)^2 \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \left\{-\frac{\cos\left(\frac{u-v-2m\omega}{2\omega'}\pi\right)}{\sin^2\left(\frac{u-v-2m\omega}{2\omega'}\pi\right)} - \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \left(-\frac{\cos\left(\frac{v+2m\omega}{2\omega'}\pi\right)}{\sin^2\left(\frac{v+2m\omega}{2\omega'}\pi\right)}\right)\right\} = \\
&= \left(\frac{\pi}{2\omega'}\right)^2 \left\{\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \left(-\frac{\cos\left(\frac{u-v-2m\omega}{2\omega'}\pi\right)}{\sin^2\left(\frac{u-v-2m\omega}{2\omega'}\pi\right)}\right) - \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \left(-\frac{\cos\left(\frac{v+2m\omega}{2\omega'}\pi\right)}{\sin^2\left(\frac{v+2m\omega}{2\omega'}\pi\right)}\right)\right\},
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

— такъ какъ обѣ суммы безусловно-сходящіяся, въ чемъ легко убѣдиться подобно тому, какъ въ § 167. Внося это въ (1) пред. §, придемъ къ заключенію, что

$$\left(\sqrt{\wp(u-v)-e_1}\right)' + \frac{\pi}{2\omega'} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \frac{\cos\left(\frac{u-v-2m\omega}{2\omega'}\pi\right)}{\sin^2\left(\frac{u-v-2m\omega}{2\omega'}\pi\right)} = C; \quad (2)$$

полагая здѣсь $u - v = \omega''$, будемъ имѣть:

$$0 + \left(\frac{\pi}{2\omega'}\right)^2 \left\{\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \frac{\sin\left(\frac{(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi\right)}{\cos^2\left(\frac{(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi\right)}\right\} = C, \quad (3)$$

откуда слѣдуетъ, такъ какъ въ суммѣ членъ, въ которомъ $m=\mu$, сокращается съ членомъ, въ которомъ $m=-\mu+1$, что $C=0$. Внося это значеніе C во (2), будемъ имѣть оттуда:

$$(\sqrt{\wp(u-v)-e_1})'=-\left(\frac{\pi}{2\omega'}\right)^2\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\left(\frac{u-v-2m\omega}{2\omega'}\pi\right)}{\sin^2\left(\frac{u-v-2m\omega}{2\omega'}\pi\right)}. \tag{4}$$

Интегрируя это отъ $u=0$, получимъ:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{\wp(u-v)-e_1}&=\sqrt{\wp(-v)-e_1}+\\+\frac{\pi}{2\omega'}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m&\left\{\operatorname{cosec}\left(\frac{u-v-2m\omega}{2\omega'}\pi\right)+\operatorname{cosec}\left(\frac{v+2m\omega}{2\omega'}\pi\right)\right\}.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Но ряды:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\operatorname{cosec}\left(\frac{u-v-2m\omega}{2\omega'}\pi\right)\quad\text{и}\quad\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\operatorname{cosec}\left(\frac{v+2m\omega}{2\omega'}\pi\right) \tag{6}$$

суть безусловно-сходящіеся, ибо ряды модулей ихъ членовъ будутъ сходящіеся (такъ какъ послѣдніе суть корни квадратные изъ модулей членовъ рядовъ § 165); а потому изъ (5) будетъ слѣдовать:

$$\sqrt{\wp(u-v)-e_1}=C+\frac{\pi}{2\omega'}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\operatorname{cosec}\left(\frac{u-v-2m\omega}{2\omega'}\pi\right); \tag{7}$$

полагая $u-v=\omega$, будемъ имѣть:

$$0=C-\frac{\pi}{2\omega'}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\operatorname{cosec}\left(\frac{(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi\right); \tag{8}$$

но какъ въ суммѣ члены по два, какъ выше, сокращаются, то отсюда слѣдуетъ, что $C=0$, и изъ (7) получаемъ:

$$\sqrt{\wp(u-v)-e_1}=\frac{\pi}{2\omega'}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\operatorname{cosec}\left(\frac{u-v-2m\omega}{2\omega'}\pi\right). \tag{9}$$

177. Такимъ же образомъ для $i=2$ получимъ:

$$\sqrt{\wp(\wp-v)-e_2}=C+\frac{\pi}{2\omega}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n(-1)^n\operatorname{cosec}\left(\frac{u-v-2n\omega'}{2\omega}\pi\right); \tag{1}$$

полагая $u-v=\omega''$, будемъ имѣть:

$$0=C-\frac{\pi}{2\omega}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n(-1)^n\sec\left(\frac{(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\right); \tag{2}$$

по причинѣ четности $\sec x$ и здѣсь въ суммѣ членъ въ которомъ $n=\nu$ сократится съ членомъ, въ которомъ $n=-\nu+1$, и потому отсюда будетъ слѣдовать $C=0$, почему (1) обратится въ такое:

$$\sqrt{\wp(u-v)-e_2}=\frac{\pi}{2\omega}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n(-1)^n\operatorname{cosec}\left(\frac{u-v-2n\omega'}{2\omega}\pi\right). \tag{3}$$

Точно также найдемъ:

$$\sqrt{\wp(u-v)-e_2}=\frac{\pi}{2\omega'}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m(-1)^m\operatorname{cosec}\left(\frac{u-v-2m\omega}{2\omega'}\pi\right); \tag{4}$$

и аналогично тому, какъ въ пред. § для $i=3$:

$$\sqrt{\wp(u-v)-e_3}=\frac{\pi}{2\omega}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\operatorname{cosec}\left(\frac{u-v-2n\omega'}{2\omega}\pi\right); \tag{5}$$

$$\sqrt{\wp(u-v)-e_3}=\frac{\pi}{2\omega'}\left\{+i+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m(-1)^m\left(\operatorname{cotg}\left(\frac{u-v-2m\omega}{2\omega'}\pi\right)\pm i\right)\right\}, \tag{6}$$

гдѣ верхній знакъ берется для $m>0$, и нижній для $m\leq 0$.

178. Полагая $v=0$ въ (13) § 175, (9) § 176 и (3)—(6) пред. §, мы получимъ слѣдующія формулы:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{\wp(u)-e_1}&=\frac{\pi}{2\omega}\left\{-i+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n(-1)^n\left(\operatorname{cotg}\left(\frac{u-2n\omega'}{2\omega}\pi\right)\mp i\right)\right\}=\\&=\frac{\pi}{2\omega'}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\operatorname{cosec}\left(\frac{u-2m\omega}{2\omega'}\pi\right).\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{\wp(u)-e_2}&=\frac{\pi}{2\omega}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n(-1)^n\operatorname{cosec}\left(\frac{u-2n\omega'}{2\omega}\pi\right)=\\&=\frac{\pi}{2\omega'}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n(-1)^m\operatorname{cosec}\left(\frac{u-2m\omega}{2\omega'}\pi\right);\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{\wp(u)-e_3}&=\frac{\pi}{2\omega}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\operatorname{cosec}\left(\frac{u-2n\omega'}{2\omega}\pi\right)=\\&=\frac{\pi}{2\omega'}\left\{+i+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m(-1)^m\left(\operatorname{cotg}\left(\frac{u-2m\omega}{2\omega'}\pi\right)\pm i\right)\right\}.\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

Полагая въ тѣхъ же формулахъ $v=-\omega,\ -\omega'',\ -\omega'$, и вставляя результаты въ (1) и (3) § 163 для $i, j, k = 1, 2, 3$, мы получимъ слѣдующія преобразованія полученныхъ тамъ для указанныхъ функцій разложеній въ двойные ряды частныхъ дробей въ простыя:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{\wp(u)-e_1}}&=\frac{1}{\sqrt{e_2-e_1}\cdot\sqrt{e_3-e_1}}\frac{\pi}{2\omega}\left\{-i+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n(-1)^{n-1}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{u-2n\omega'}{2\omega}\pi\right)\pm i\right)\right\}\\&=\frac{1}{\sqrt{e_2-e_1}\cdot\sqrt{e_3-e_1}}\frac{\pi}{2\omega'}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\operatorname{cosec}\left(\frac{u-(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi\right);\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{\wp(u)-e_2}}&=\frac{1}{\sqrt{e_1-e_2}\cdot\sqrt{e_3-e_2}}\frac{\pi}{2\omega}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n(-1)^n\sec\left(\frac{u-(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{e_1-e_2}\cdot\sqrt{e_3-e_2}}\frac{\pi}{2\omega'}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m(-1)^m\sec\left(\frac{u-(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi\right);\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{\wp(u)-e_3}}&=\frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}\cdot\sqrt{e_2-e_3}}\frac{\pi}{2\omega}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\operatorname{cosec}\left(\frac{u-(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}\cdot\sqrt{e_2-e_3}}\frac{\pi}{2\omega'}\left\{+i+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m(-1)^{m-1}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{u-2m\omega}{2\omega'}\pi\right)\mp i\right)\right\}.\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sqrt{\wp(u)-e_3}}{\sqrt{\wp(u)-e_2}}&=\frac{1}{\sqrt{e_2-e_1}}\frac{\pi}{2\omega}\left\{-i+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n(-1)^{n-1}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{u-(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\right)\pm i\right)\right\}\\&=\frac{1}{\sqrt{e_2-e_1}}\frac{\pi}{2\omega'}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\sec\left(\frac{u-(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi\right);\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sqrt{\wp(u)-e_2}}{\sqrt{\wp(u)-e_3}} &= \frac{1}{\sqrt{e_3-e_1}}\frac{\pi}{2\omega}\left\{-i+\sum_{n\,-\infty}^{+\infty}(-1)^n\left(\operatorname{cotg}\left(\frac{u-(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\right)\mp i\right)\right\}\\ &= \frac{1}{\sqrt{e_3-e_1}}\frac{\pi}{2\omega'}\sum_{m\,-\infty}^{+\infty}\sec\left(\frac{u-2m\omega}{2\omega'}\pi\right);\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sqrt{\wp(u)-e_3}}{\sqrt{\wp(u)-e_1}} &= \frac{1}{\sqrt{e_1-e_2}}\frac{\pi}{2\omega}\sum_{n\,-\infty}^{+\infty}(-1)^n\sec\left(\frac{u-2n\omega'}{2\omega}\pi\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{e_1-e_2}}\frac{\pi}{2\omega'}\sum_{m\,-\infty}^{+\infty}(-1)^m\operatorname{cosec}\left(\frac{u-(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi\right);\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sqrt{\wp(u)-e_1}}{\sqrt{\wp(u)-e_3}} &= \frac{1}{\sqrt{e_3-e_2}}\frac{\pi}{2\omega}\sum_{n\,-\infty}^{+\infty}(-1)^n\operatorname{cosec}\left(\frac{u-(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{e_3-e_2}}\frac{\pi}{2\omega'}\sum_{m\,-\infty}^{+\infty}(-1)^m\sec\left(\frac{u-2m\omega}{2\omega'}\pi\right);\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sqrt{\wp(u)-e_2}}{\sqrt{\wp(u)-e_1}} &= \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\frac{\pi}{2\omega}\sum_{n\,-\infty}^{+\infty}\sec\left(\frac{u-2n\omega'}{2\omega}\pi\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\frac{\pi}{2\omega'}\left\{i+\sum_{m\,-\infty}^{+\infty}(-1)^m\left(\operatorname{cotg}\left(\frac{u-(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi\right)\pm i\right)\right\};\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sqrt{\wp(u)-e_1}}{\sqrt{\wp(u)-e_2}} &= \frac{1}{\sqrt{e_2-e_3}}\frac{\pi}{2\omega}\sum_{m\,-\infty}^{+\infty}\sec\left(\frac{u-(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{e_2-e_3}} = \frac{\pi}{2\omega'}\left\{i+\sum_{m\,-\infty}^{+\infty}(-1)^{m-1}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{u-(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi\right)\mp i\right)\right\}.\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

Здѣсь для $m=0$ и $n=0$ берется нижній знакъ, какъ и для отрицательныхъ значеній m и n.

179. Полагая въ (1), (2) и (3) пред. § u равнымъ тому изъ полуперіодовъ, для котораго лѣвая часть не обращается въ нуль, мы получимъ слѣдующія формулы:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{e_2-e_1}&=\frac{\pi}{2\omega}\left\{-i+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n(-1)^n\left(\operatorname{tg}\left(\frac{(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\right)\mp i\right)\right\}=\\&=\frac{\pi}{2\omega'}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\sec\left(\frac{(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi\right);\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{e_3-e_1}&=\frac{\pi}{2\omega}\left\{-i+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n(-1)^{n-1}\left(\operatorname{cotg}\left(\frac{(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\right)\pm i\right)\right\}=\\&=\frac{\pi}{2\omega'}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\sec\left(\frac{2m\omega}{2\omega'}\pi\right);\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{e_1-e_2}&=\frac{\pi}{2\omega}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n(-1)^n\sec\left(\frac{2n\omega'}{2\omega}\pi\right)=\\&=\frac{\pi}{2\omega'}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m(-1)^{m-1}\operatorname{cosec}\left(\frac{(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi\right);\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{e_3-e_2}&=\frac{\pi}{2\omega}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n(-1)^{n-1}\operatorname{cosec}\left(\frac{(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\right)=\\&=\frac{\pi}{2\omega'}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m(-1)^m\sec\left(\frac{2m\omega}{2\omega'}\pi\right);\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{e_1-e_3}&=\frac{\pi}{2\omega}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\sec\left(\frac{2m\omega'}{2\omega}\pi\right)=\\&=\frac{\pi}{2\omega'}\left\{+i+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m(-1)^{m-1}\left(\operatorname{cotg}\left(\frac{(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi\right)\mp i\right)\right\};\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{e_2-e_3}&=\frac{\pi}{2\omega}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\sec\left(\frac{(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\right)=\\&=\frac{\pi}{2\omega'}\left\{+i+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m(-1)^m\left(\operatorname{tg}\left(\frac{(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi\right)\pm i\right)\right\}.\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

Эти же формулы получатся такимъ же способомъ съ нѣкоторыми простыми дополнительными дѣйствiями и изъ слѣдующихъ формулъ того же §.

180. Дифференцируя равенства (1), (2) и (3) пред. §, мы будемъ по (1) § 161 имѣть слѣдующiя формулы:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{\wp(u)-e_2}\,\sqrt{\wp(u)-e_3}&=\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\sum_{n\,-\infty}^{+\infty}(-1)^n\operatorname{cosec}^2\left(\frac{u-2n\omega'}{2\omega}\pi\right)=\\&=\left(\frac{\pi}{2\omega'}\right)^2\sum_{m\,-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\left(\frac{u-2m\omega}{2\omega'}\pi\right)}{\sin^2\left(\frac{u-2m\omega}{2\omega'}\pi\right)};\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{\wp(u)-e_1}\cdot\sqrt{\wp(u)-e_3}&=\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\sum_{n\,-\infty}^{+\infty}(-1)^n\frac{\cos\left(\frac{u-2n\omega'}{2\omega}\pi\right)}{\sin^2\left(\frac{u-2n\omega'}{2\omega}\pi\right)}=\\&=\left(\frac{\pi}{2\omega'}\right)^2\sum_{m\,-\infty}^{+\infty}(-1)^m\frac{\cos\left(\frac{u-2m\omega}{2\omega'}\pi\right)}{\sin^2\left(\frac{u-2m\omega}{2\omega'}\pi\right)};\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{\wp(u)-e_1}\cdot\sqrt{\wp(u)-e_2}&=\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\sum_{n\,-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\left(\frac{u-2n\omega'}{2\omega}\pi\right)}{\sin^2\left(\frac{u-2n\omega'}{2\omega}\pi\right)}=\\&=\left(\frac{\pi}{2\omega'}\right)^2\sum_{m\,-\infty}^{+\infty}(-1)^m\operatorname{cosec}^2\left(\frac{u-2m\omega}{2\omega'}\pi\right).\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

Такимъ же способомъ можно получить рядъ формулъ изъ прочихъ формулъ того же §; но мы не будемъ этого дѣлать, чтобы не умножать число формулъ.

Полагая въ (1)—(3) этого § u равнымъ тому изъ полуперіодовъ, для котораго лѣвыя части этихъ формулъ не обращаются въ нуль, получимъ слѣдующія формулы, которыя могутъ быть полезны въ нѣкоторыхъ случаяхъ:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{e_1-e_2}\cdot\sqrt{e_1-e_3}&=\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\sum_{n\,-\infty}^{+\infty}(-1)^n\sec\left(\frac{2n\omega'}{2\omega}\pi\right)=\\&=\left(\frac{\pi}{2\omega'}\right)^2\sum_{m\,-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\left(\frac{(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi\right)}{\sin^2\left(\frac{(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi\right)};\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{e_2-e_1}\cdot\sqrt{e_2-e_3}&=\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n(-1)^n\frac{\sin\left(\frac{(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\right)}{\cos^2\left(\frac{(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\right)}=\\&=\left(\frac{\pi}{2\omega'}\right)^2\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m(-1)^m\frac{\sin\left(\frac{(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi\right)}{\cos^2\left(\frac{(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi\right)};\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{e_3-e_1}\cdot\sqrt{e_3-e_2}&=\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\frac{\cos\left(\frac{(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\right)}{\sin^2\left(\frac{(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\right)}=\\&=\left(\frac{\pi}{2\omega'}\right)^2\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m(-1)^m\sec^2\left(\frac{2m\omega}{2\omega'}\pi\right).\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

181. Выполнимъ еще аналогичное преобразованіе въ простыя суммы для формулъ (9), (10) и (11) § 164. Мы могли бы вывести эти формулы изъ предыдущихъ, какъ то было нами сдѣлано для двойныхъ рядовъ въ § 164; но мы предпочитаемъ прямо сдѣлать это преобразованіе упомянутыхъ формулъ, чтобы не дѣлать частныхъ предположеній на счетъ значковъ i, j, k, кромѣ сдѣланнаго въ томъ § предположенія, что $\omega_k=\omega_i+\omega_j$. Начиная суммированіе по буквѣ m, мы будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}&\sin\mathrm{am}(v,k)=v+\\&+\frac{1}{k}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\left[\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m(-1)^m\left\{\frac{1}{v-(2n-1)K'i-2mK}+\frac{1}{(2n-1)K'i+2mK}\right\}+\right.\\&\left.\qquad+v\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m(-1)^m\frac{1}{[(2n-1)K'i+2mK]^2}\right],\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

ибо обѣ суммы по m безусловно-сходящіяся, и послѣдняя по (16) § 145 будетъ:

$$=\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m(-1)^m\frac{1}{\left(\frac{(2n-1)K'i}{2K}\pi+m\pi\right)^2}=\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\frac{\cos\left(\frac{(2n-1)K'i}{2K}\pi\right)}{\sin^2\left(\frac{(2n-1)K'i}{2K}\pi\right)},\quad(2)$$

первая же найдется по (10) § 145 такимъ образомъ:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m(-1)^m\left\{\frac{1}{v-(2n-1)K'i-2mK}+\frac{1}{(2n-1)K'i+2mK}\right\}=\\
&=\frac{\pi}{2K}\left[\frac{1}{\frac{v-(2n-1)K'i}{2K}\pi}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_m(-1)^m\left\{\frac{1}{\frac{v-(2n-1)K'i}{2K}\pi-m\pi}+\frac{1}{m\pi}\right\}+\right.\\
&\left.+\frac{1}{\frac{(2n-1)K'i}{2K}\pi}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_m(-1)^m\left\{\frac{1}{\frac{(2n-1)K'i}{2K}\pi+m\pi}-\frac{1}{m\pi}\right\}\right]=\\
&=\frac{\pi}{2K}\left[\operatorname{cosec}\left(\frac{v-(2n-1)K'i}{2K}\pi\right)+\operatorname{cosec}\left(\frac{(2n-1)K'i}{2K}\pi\right)\right];
\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

внося изъ (2) и (3) въ (1), будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{sinam}(v,k)=v\left(1+\frac{1}{k}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\frac{\cos\left(\frac{(2n-1)K'i}{2K}\pi\right)}{\sin^2\left(\frac{(2n-1)K'i}{2K}\pi\right)}\right)+\\
&+\frac{1}{k}\frac{\pi}{2K}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\left\{\operatorname{cosec}\left(\frac{v-(2n-1)K'i}{2K}\pi\right)+\operatorname{cosec}\left(\frac{(2n-1)K'i}{2K}\pi\right)\right\}.
\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

Но коэффиціентъ при v равенъ нулю; въ самомъ дѣлѣ, полагая $v=4K$, мы обратимъ въ нуль и лѣвую часть этого равенства и каждый членъ суммы по n, какъ легко видѣть, такъ что получимъ:

$$0=4K\left(1+\frac{1}{k}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\frac{\cos\left(\frac{(2n-1)K'i}{2K}\pi\right)}{\sin^2\left(\frac{(2n-1)K'i}{2K}\pi\right)}\right),\quad(5)$$

— откуда найдемъ

$$k=-\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\frac{\cos\left(\frac{(2n-1)K'i}{2K}\pi\right)}{\sin^2\left(\frac{(2n-1)K'i}{2K}\pi\right)};\ ^{*)}\quad(6)$$

*) Эта формула получается изъ (6) § 180, если въ (16) и (17) § 127 принять $i=1$, $j=3$ и слѣдующія оттуда выраженія ω и ω' чрезъ K и $K'i$ внести въ эту формулу, и по раздѣленіи обѣихъ частей на $(\sqrt{e_1-e_3})^2$ принять во вниманіе (15) § 104 и (4) § 122.

— на основанiи же (5) равенство (4) обратится въ такое:

$$\left.\begin{aligned}\sin\operatorname{am}(v,k)&=\frac{1}{k}\frac{\pi}{2K}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\left\{\operatorname{cosec}\left(\frac{v-(2n-1)K'i}{2K}\pi\right)+\operatorname{cosec}\left(\frac{(2n-1)K'i}{2K}\pi\right)\right\}=\\&=\frac{1}{k}\frac{\pi}{2K}\left[\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\operatorname{cosec}\left(\frac{v-(2n-1)K'i}{2K}\pi\right)+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\operatorname{cosec}\left(\frac{(2n-1)K'i}{2K}\pi\right)\right],\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

ибо обѣ суммы безусловно-сходящiяся; но послѣдняя $=0$, ибо членъ, въ которомъ $n=\nu$, сокращается съ членомъ, въ которомъ $n=-\nu+1$; а потому (7) окончательно обратится въ такое:

$$\sin\operatorname{am}(v,k)=\frac{1}{k}\frac{\pi}{2K}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\operatorname{cosec}\left(\frac{v-(2n-1)K'i}{2K}\pi\right).\qquad(8)$$

Преобразуя точно также (10) § 164 найдемъ сперва:

$$\left.\begin{aligned}&\cos\operatorname{am}(v,k)=1+\\&+\frac{i}{k}\frac{\pi}{2K}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n(-1)^n\left\{\operatorname{cosec}\left(\frac{v-(2n-1)K'i}{2K}\pi\right)+\operatorname{cosec}\left(\frac{(2n-1)K'i}{2K}\pi\right)\right\},\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

ибо коэффицiентъ при v

$$\frac{i}{k}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n(-1)^n\frac{\cos\left(\frac{(2n-1)K'i}{2K}\pi\right)}{\sin^2\left(\frac{(2n-1)K'i}{2K}\pi\right)}=0\qquad(10)$$

тождественно, такъ какъ членъ, въ которомъ $n=\nu$, сокращается съ членомъ, въ которомъ $n=-\nu+1$, вслѣдствiе четности суммируемой функцiи; далѣе же, такъ какъ суммы cosec-овъ суть безусловно-сходящiяся, можно въ (9) разбить сумму на двѣ:

$$\left.\begin{aligned}\cos\operatorname{am}(v,k)=1&+\frac{i}{k}\frac{\pi}{2K}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n(-1)^n\operatorname{cosec}\left(\frac{(2n-1)K'i}{2K}\pi\right)+\\&+\frac{i}{k}\frac{\pi}{2K}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n(-1)^n\operatorname{cosec}\left(\frac{v-(2n-1)K'i}{2K}\pi\right);\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

полагая здѣсь $v=K$, и имѣя въ виду, что по (2) § 129 $\cos\operatorname{am}(K,k)=0$, а также, что

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n (-1)^n \sec\Big(\frac{(2n-1)K'i}{2K}\pi\Big) = 0\,, \tag{12}$$

такъ какъ членъ $(n=v)$ сокращается съ членомъ $(n=-v+1)$, мы получимъ:

$$0 = 1 + \frac{i}{k}\frac{\pi}{2K}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n (-1)^n \operatorname{cosec}\Big(\frac{(2n-1)K'i}{2K}\pi\Big)\,, \tag{13}$$

— откуда будетъ слѣдовать новое разложеніе модуля k:

$$k = \frac{\pi i}{2K}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n (-1)^n \operatorname{cosec}\Big(\frac{(2n-1)K'i}{2K}\pi\Big)\,,\ ^{*)} \tag{14}$$

— на основаніи же (13) равенство (11) приведется къ такому:

$$\operatorname{cosam}(v,k) = \frac{i}{k}\frac{\pi}{2K}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n (-1)^n \operatorname{cosec}\Big(\frac{v-(2n-1)K'i}{2K}\pi\Big). \tag{15}$$

Переходя къ преобразованію формулы (11) § 164, мы, начиная суммированіе также съ m, будемъ имѣть двѣ суммы по m, отличающіяся отъ (2) и (3) этого § тѣмъ, что въ нихъ множитель $(-1)^m$ будетъ замѣненъ чрезъ 1; а такія найдутся по формуламъ (12) § 144 и (6) § 145, и будутъ:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \frac{1}{[(2n-1)K'i+mK]^2} = \\ &= \Big(\frac{\pi}{2K}\Big)^2 \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \frac{1}{\Big(\frac{(2n-1)K'i}{2K}\pi+m\pi\Big)^2} = \Big(\frac{\pi}{2K}\Big)^2 \operatorname{cosec}^2\Big(\frac{(2n-1)K'i}{2K}\pi\Big);\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

и

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \left\{\frac{1}{v-(2n-1)K'i+2mK} + \frac{1}{(2n-1)K'i+2mK}\right\} = \\ &= \frac{\pi}{2K}\left\{\operatorname{cotg}\Big(\frac{v-(2n-1)K'i}{2K}\pi\Big) + \operatorname{cotg}\Big(\frac{(2n-1)K'i}{2K}\pi\Big)\right\};\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

*) Можетъ быть получена изъ (4) § 179.

*

имѣя въ виду далѣе, что

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n (-1)^n \operatorname{cosec}^2\left(\frac{(2n-1)K'i}{2K}\pi\right)=0 \tag{18}$$

тождественно [ибо членъ $(n=\nu)$ сокращается съ членомъ $(n=-\nu+1)$], мы на основаніи (16) и (17) получимъ:

$$\left.\begin{aligned}&\Delta\operatorname{am}(v,k)=\\&=1+i\frac{\pi}{2K}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n(-1)^n\left\{\operatorname{cotg}\left(\frac{v-(2n-1)K'i}{2K}\pi\right)+\operatorname{cotg}\left(\frac{(2n-1)K'i}{2K}\pi\right)\right\}.\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Приводя оба члена къ одному знаменателю, мы дадимъ этому разложенію такой видъ:

$$\left.\begin{aligned}&\Delta\operatorname{am}(v,k)=\\&=1+i\frac{\pi}{2K}\sin\frac{v\pi}{2K}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n(-1)^n\frac{1}{\sin\left(\frac{(2n-1)K'i}{2K}\pi\right)\sin\left(\frac{v-(2n-1)K'i}{2K}\pi\right)}.\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

182. Начиная въ формулѣ (9) § 164 суммированіе съ n, мы получимъ сперва:

$$\left.\begin{aligned}&\sin\operatorname{am}(v,k)=v+\\&+\frac{1}{k}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m(-1)^n\left[\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\left\{\frac{1}{v-2mK-(2n-1)K'i}+\frac{1}{2mK+(2n-1)K'i}\right\}+\right.\\&\left.\qquad+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\frac{1\cdot v}{[2mK+(2n-1)K'i]^2}\right];\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

— такъ какъ обѣ суммы по n безусловно-сходящіяся. Послѣдняя найдется по формулѣ (13) § 144:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\frac{1}{[2mK+(2n-1)K'i]^2}=\\&=-\left(\frac{\pi}{2K'}\right)^2\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\frac{1}{\left(\frac{2mK}{2K'i}\pi+(2n-1)\frac{\pi}{2}\right)^2}=-\left(\frac{\pi}{2K'}\right)^2\sec^2\left(\frac{2mK}{2K'i}\pi\right);\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

первая же по (8) § 145 послѣ такихъ преобразованій:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\left\{\frac{1}{v-2mK-(2n-1)K'i}+\frac{1}{2mK+(2n-1)K'i}\right\}=\\
&=\frac{\pi}{2K'i}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\left\{\frac{1}{\frac{v-2mK}{2K'i}\pi-(2n-1)\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{\frac{2mK}{2K'i}\pi+(2n-1)\frac{\pi}{2}}\right\}=\\
=i\frac{\pi}{2K'}&\left[\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\left\{\frac{1}{(2n-1)\frac{\pi}{2}-\frac{v-2mK}{2K'i}\pi}-\frac{1}{(2n-1)\frac{\pi}{2}}\right\}-\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\left\{\frac{1}{(2n-1)\frac{\pi}{2}+\frac{2mK}{2K'i}\pi}-\frac{1}{(2n-1)\frac{\pi}{2}}\right\}\right]=\\
&=i\frac{\pi}{2K'}\left\{\operatorname{tg}\left(\frac{v-2mK}{2K'i}\pi\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{2mK}{2K'i}\pi\right)\right\};
\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

внося изъ (2) и (3) въ (1) получимъ:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\operatorname{am}(v,k)=v\left(1-\frac{1}{k}\left(\frac{\pi}{2K'}\right)^2\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m(-1)^m\sec^2\left(\frac{2mK}{2K'i}\pi\right)\right)+\\
+\frac{i}{k}\frac{\pi}{2K'}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m(-1)^m\left\{\operatorname{tg}\left(\frac{v-2mK}{2K'i}\pi\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{2mK}{2K'i}\pi\right)\right\}.
\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

Но полагая $v=2K'i$, получимъ:

$$0=2K'i\left(1-\frac{1}{k}\left(\frac{\pi}{2K'}\right)^2\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m(-1)^m\sec^2\left(\frac{2mK}{2K'i}\pi\right)\right);\quad(5)$$

откуда новое выраженіе для k:

$$k=\left(\frac{\pi}{2K'}\right)^2\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m(-1)^m\sec^2\left(\frac{2mK}{2K'i}\pi\right);\ ^{*)}\quad(6)$$

на основаніи же (5) предыдущее, т. е. (4) приведется къ такому:

$$\sin\operatorname{am}(v,k)=\frac{i}{k}\frac{\pi}{2K'}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m(-1)^m\left\{\operatorname{tg}\left(\frac{v-2mK}{2K'i}\pi\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{2mK}{2K'i}\pi\right)\right\}.\quad(7)$$

Приводя оба члена въ скобкахъ къ одному знаменателю, мы дадимъ этому разложенію такой видъ:

*) Можетъ быть получено изъ (6) § 180.

$$\sin\operatorname{am}(v,k)=\frac{i}{k}\frac{\pi}{2K'}\sin\frac{v\pi}{2K'i}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m(-1)^m\frac{1}{\cos\left(\frac{2mK}{2K'i}\pi\right)\cos\left(\frac{v-2mK}{2K'i}\pi\right)}. \quad (8)$$

Переходя къ разложенію (10) § 164, замѣчаемъ что отъ суммы по n въ (1) настоящаго § тѣ суммы будутъ отличаться тѣмъ, что общій членъ ихъ будетъ имѣть множителемъ $(-1)^n$; оттого ихъ значенія найдутся по (17) и (14) § 145, и будутъ:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n(-1)^n\frac{1}{[2mK+(2n-1)K'i]^2}=-\left(\frac{\pi}{2K'}\right)^2\frac{\sin\left(\frac{2mK}{2K'i}\pi\right)}{\cos^2\left(\frac{2mK}{2K'i}\pi\right)}; \quad (9)$$

и

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n(-1)^n\left\{\frac{1}{v-2mK-(2n-1(K'i}+\frac{1}{2mK+(2n-1)K'i}\right\}=\\&=\frac{\pi}{2K'i}\left[\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n(-1)^n\left\{\frac{1}{\frac{v-2mK}{2K'i}\pi-(2n-1)\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{(2n-1)\frac{\pi}{2}}\right\}+\right.\\&\left.+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n(-1)^n\left\{\frac{1}{-\frac{2mK}{2K'i}-(2n-1)\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{(2n-1)\frac{\pi}{2}}\right\}\right]=\\&=-\frac{\pi}{2K'i}\left[1-\sec\left(\frac{v-2mK}{2K'i}\pi\right)-\left(1-\sec\left(\frac{-2mK}{2K'i}\pi\right)\right)\right]=\\&=-i\frac{\pi}{2K'}\left\{\sec\left(\frac{v-2mK}{2K'i}\pi\right)-\sec\left(\frac{2mK}{2K'i}\pi\right)\right\};\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

на основаніи (9) и (10), а также того что

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^m\frac{\sin\left(\frac{2mK}{2K'i}\pi\right)}{\cos^2\left(\frac{2mK}{2K'i}\pi\right)}=0 \quad (11)$$

тождественно, ибо членъ $(m=\mu)$ сокращается съ членомъ $(m=-\mu)$, мы получимъ:

$$\cos\operatorname{am}(v,k)=1+\frac{1}{k}\frac{\pi}{2K'}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m(-1)^m\left\{\sec\left(\frac{v-2mK}{2K'i}\pi\right)-\sec\left(\frac{2mK}{2K'i}\pi\right)\right\}; \quad (12)$$

полагая здѣсь $v = K$, и замѣчая, что

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m (-1)^m \sec\left(\frac{(2m-1)K}{2K'i}\pi\right) = 0 \tag{13}$$

тождественно, [такъ какъ членъ $(m=\mu)$ сокращается съ членомъ $m = -\mu + 1$], а также, что $\cos \mathrm{am}(K, k) = 0$, мы получимъ:

$$0 = 1 - \frac{1}{k}\frac{\pi}{2K'}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m (-1)^m \sec\left(\frac{2mK}{2K'i}\pi\right), \tag{14}$$

— откуда

$$k = \frac{\pi}{2K'}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m (-1)^m \sec\left(\frac{2mK}{2K'i}\pi\right);\ ^{*)} \tag{15}$$

на основанiи же (14) равенство (12) принимаетъ такой видъ:

$$\cos \mathrm{am}(v, k) = \frac{1}{k}\frac{\pi}{2K'}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m (-1)^m \sec\left(\frac{v-2mK}{2K'i}\pi\right). \tag{16}$$

Разложенiе (11) § 164 отъ только-что преобразованнаго (10) того-же § отличается кромѣ внѣшняго множителя суммы еще тѣмъ, что при суммированiи по m множитель $(-1)^m$ замѣняется чрезъ 1; на основанiи этого мы можемъ сразу, руководствуясь (12) настоящаго § написать:

$$\triangle \mathrm{am}(v, k) = 1 + \frac{\pi}{2K'}\sum_{+\infty}^{+\infty}{}_m \left\{\sec\left(\frac{v-2mK}{2K'i}\pi\right) - \sec\left(\frac{2mK}{2K'i}\pi\right)\right\}; \tag{17}$$

полагая здѣсь $v = K + K'i$, и имѣя въ виду, что по (4) § 129 $\triangle \mathrm{am}(K + K'i, k) = 0$, а также, что

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \operatorname{cosec}\left(\frac{(2m-1)K}{2K'i}\pi\right) = 0 \tag{18}$$

тождественно [ибо членъ $(m=\mu)$ сокращается съ членомъ $m = -\mu + 1$], мы получимъ:

$$0 = 1 - \frac{\pi}{2K'}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \sec\left(\frac{2mK}{2K'i}\pi\right), \tag{19}$$

*) Можетъ быть получено изъ (4) § 179.

— откуда

$$K' = \frac{\pi}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \sec\left(\frac{2mK}{2K'i}\pi\right); \text{*)} \tag{20}$$

на основанiи же (19) равенство (17) принимаетъ такой видъ:

$$\triangle \operatorname{am}(v, k) = \frac{\pi}{2K'} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \sec\left(\frac{v-2mK}{2K'i}\pi\right). \tag{21}$$

Разложенiя, полученныя въ этомъ и пред. § для функцiй амплитуды согласуются съ формулами (3)—(32) § 189 и (42)—(44) § 190 Briot et Bouquet. Theorie des fonctions elliptiques. (2-me ed. Paris 1875) для функцiй $\lambda(u)$, $\mu(u)$ и $\nu(u)$.

183. Всѣ разложенiя на частныя дроби и въ безконечныя произведенiя, полученныя въ предыдущихъ §§, суть безусловно-сходящiяся, а потому мы можемъ избрать любой порядокъ соединенiя слагаемыхъ или множителей; мы избиремъ тотъ, котораго мы придерживались въ §§ 146 и 147, т. е. будемъ ставить рядомъ и соединять въ одинъ тѣ элементы этихъ рядовъ, въ которыхъ численные коэффицiенты при ω и ω', или K и $K'i$, разнятся знакомъ. Такимъ образомъ изъ (1) § 169 получимъ:

$$\wp(u) = -\frac{\eta}{\omega} + \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \left\{\operatorname{cosec}^2\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right) + \sum_{1}^{+\infty}{}_n \left[\operatorname{cosec}^2\left(\frac{u-2n\omega'}{2\omega}\pi\right) + \operatorname{cosec}^2\left(\frac{u+2n\omega'}{2\omega}\pi\right)\right]\right\}; \tag{1}$$

или, выражая cosec чрезъ sin и приводя въ скобкахъ [] къ одному знаменателю:

$$\wp(u) = -\frac{\eta}{\omega} + \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \left\{\frac{1}{\sin^2\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)} + \sum_{1}^{+\infty}{}_n \frac{\sin^2\left(\frac{u+2n\omega'}{2\omega}\pi\right) + \sin^2\left(\frac{u-2n\omega'}{2\omega}\pi\right)}{\sin^2\left(\frac{u+2n\omega'}{2\omega}\pi\right)\sin^2\left(\frac{u-2n\omega'}{2\omega}\pi\right)}\right\}; \tag{2}$$

но вообще:

$$\left.\begin{aligned} &\sin^2(a+b) + \sin^2(a-b) = 2(\sin^2 a\cos^2 b + \cos^2 a\sin^2 b) = \\ &= \sin^2 a(1+\cos 2b) + \cos^2 a(1-\cos 2b) = 1 - \cos 2b(\cos^2 a - \sin^2 a) = \\ &= 1 - \cos 2a\cos 2b; \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

*) Это тождество можетъ быть получено изъ (5) § 179.

далѣе

$$\left.\begin{aligned}\sin(a+b)\sin(a-b) &= \sin^2 a\cos^2 b-\cos^2 a\sin^2 b= \\ &= \cos^2 b-\cos^2 a=\sin^2 a-\sin^2 b= \\ &= \frac{1}{2}\Big(\cos 2b-\cos 2a\Big);\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

на основаніи этихъ двухъ формулъ, принимая $a=\frac{u\pi}{2\omega}$, $b=\frac{2n\omega'}{2\omega}\pi$, мы приведемъ (2) къ такому виду:

$$\wp(u)=-\frac{\eta}{\omega}+\Big(\frac{\pi}{2\omega}\Big)^2\left\{\frac{1}{\sin^2\Big(\frac{u\pi}{2\omega}\Big)}+4\sum_{1}^{\infty}{}_n\frac{1-\cos\Big(\frac{2n\omega'}{\omega}\pi\Big)\cos\frac{u\pi}{\omega}}{\Big[\cos\Big(\frac{2n\omega'}{\omega}\pi\Big)-\cos\frac{u\pi}{\omega}\Big]^2}\right\}.\quad(5)$$

Точно также изъ (2) § 169 получимъ:

$$\wp(u)=-\frac{\eta'}{\omega'}+\Big(\frac{\pi}{2\omega'}\Big)^2\left\{\frac{1}{\sin^2\Big(\frac{u\pi}{2\omega}\Big)}+4\sum_{1}^{\infty}{}_m\frac{1-\cos\Big(\frac{2m\omega}{2\omega'}\pi\Big)\cos\frac{u\pi}{\omega'}}{\Big[\cos\Big(\frac{2m\omega}{\omega'}\pi\Big)-\cos\frac{u\pi}{\omega'}\Big]^2}\right\}.\quad(6)$$

Для подобнаго преобразованія формулъ (5), (6) и (7) того же §, надобно замѣтить, что вообще:

$$\left.\begin{aligned}&\cos^2(a+b)+\cos^2(a-b)=2(\cos^2 a\cos^2 b+\sin^2 a\sin^2 b)= \\ &=\cos^2 a(1+\cos 2b)+\sin^2 a(1-\cos 2b)=1+\cos 2b(\cos^2 a-\sin^2 a)= \\ &=1+\cos 2a\cos 2b,\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

и

$$\left.\begin{aligned}\cos(a+b)\cos(a-b) &= \cos^2 a\cos^2 b-\sin^2 a\sin^2 b= \\ &= \cos^2 a-\sin^2 b=\frac{1+\cos 2a}{2}-\frac{1-\cos 2b}{2}= \\ &= \frac{1}{2}\Big(\cos 2a+\cos 2b\Big);\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

на основаніи этого упомянутыя формулы легко приводятся къ слѣдующимъ:

$$\left.\begin{aligned}\wp(u+\omega)&=-\frac{\overline{\eta}}{\omega}+\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\left\{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)}+4\sum_{1}^{\infty}{}_n\frac{1+\cos\left(\frac{2n\omega'}{\omega}\pi\right)\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)}{\left[\cos\left(\frac{2n\omega'}{\omega}\pi\right)+\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)\right]^2}\right\},\\&=-\frac{\overline{\eta}'}{\omega'}+\left(\frac{\pi}{2\omega'}\right)^2.4\sum_{1}^{\infty}{}_m\frac{1-\cos\left(\frac{(2m-1)\omega}{\omega'}\pi\right)\cos\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)}{\left[\cos\left(\frac{(2m-1)\omega}{\omega'}\pi\right)-\cos\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)\right]^2};\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

$$\left.\begin{aligned}\wp(u+\omega'')&=-\frac{\overline{\eta}}{\omega}+\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2.4\sum_{1}^{\infty}{}_n\frac{1+\cos\left(\frac{(2n-1)\omega'}{\omega}\pi\right)\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)}{\left[\cos\left(\frac{(2n-1)\omega'}{\omega}\pi\right)+\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)\right]^2},\\&=-\frac{\overline{\eta}'}{\omega'}+\left(\frac{\pi}{2\omega'}\right)^2.4\sum_{1}^{\infty}{}_m\frac{1+\cos\left(\frac{(2m-1)\omega}{\omega'}\pi\right)\cos\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)}{\left[\cos\left(\frac{(2m-1)\omega}{\omega'}\pi\right)+\cos\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)\right]^2};\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

$$\left.\begin{aligned}\wp(u+\omega')&=-\frac{\overline{\eta}}{\omega}+\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2.4\sum_{1}^{\infty}{}_n\frac{1-\cos\left(\frac{(2n-1)\omega'}{\omega}\pi\right)\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)}{\left[\cos\left(\frac{(2n-1)\omega'}{\omega}\pi\right)-\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)\right]^2},\\&=-\frac{\overline{\eta}'}{\omega'}+\left(\frac{\pi}{2\omega'}\right)^2\left\{\frac{1}{\cos\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)}+4\sum_{1}^{\infty}{}_m\frac{1+\cos\left(\frac{2m\omega}{\omega'}\pi\right)\cos\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)}{\left[\cos\left(\frac{2m\omega}{\omega'}\pi\right)+\cos\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)\right]^2}\right\}.\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

Что касается формулъ (8) и (9) того же §, то въ виду четности входящихъ туда функцій они легко примутъ такой видъ:

$$\left.\begin{aligned}e_1=\wp(\omega)&=-\frac{\overline{\eta}}{\omega}+\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\left\{1+2\sum_{1}^{\infty}{}_n\sec^2\left(\frac{2n\omega'}{2\omega}\pi\right)\right\},\\&=-\frac{\overline{\eta}'}{\omega'}+\left(\frac{\pi}{2\omega'}\right)^2.2\sum_{1}^{\infty}{}_m\operatorname{cosec}^2\left(\frac{(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi\right)\Big\};\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

$$\left.\begin{aligned}e_2=\wp(\omega'')&=-\frac{\overline{\eta}}{\omega}+\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2.2\sum_{1}^{\infty}{}_n\sec^2\left(\frac{(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\right),\\&=-\frac{\overline{\eta}'}{\omega'}+\left(\frac{\pi}{2\omega'}\right)^2.2\sum_{1}^{\infty}{}_m\sec^2\left(\frac{(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi\right);\end{aligned}\right\}\quad(13)$$

$$\left.\begin{aligned} e_3 = \wp(\omega') &= -\frac{\bar\eta}{\omega} + \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 . 2\sum_1^\infty{}_n \operatorname{cosec}^2\left(\frac{(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\right), \\ &= -\frac{\bar\eta'}{\omega'} + \left(\frac{\pi}{2\omega'}\right)^2 \left\{1 + 2\sum_1^\infty{}_m \sec^2\left(\frac{2m\omega}{2\omega'}\pi\right)\right\}. \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Эти формулы легко получатся изъ формулъ (9)—(11) этого §, полагая тамъ $u=0$. Остальныя формулы § 169 уже приведены тамъ къ такому виду. Формулы (3) и (4) того же § получаются изъ (5) и (6) чрезъ перемѣну u на $u-v$; поэтому мы можемъ ихъ неприводить здѣсь.

184. Изъ (21) § 167 точно также получимъ:

$$\zeta(u) = \frac{\eta}{\omega}u + \frac{\pi}{2\omega}\left\{\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right) + \sum_1^\infty{}_n\left[\operatorname{cotg}\left(\frac{u-2n\omega'}{2\omega}\pi\right) + \operatorname{cotg}\left(\frac{u+2n\omega'}{2\omega}\pi\right)\right]\right\}; \quad (1)$$

вставляя подъ скобками [] вмѣсто cotg его выраженіе чрезъ sin и cos, и приводя затѣмъ оба члена къ одному знаменателю, легко получимъ:

$$\zeta(u) = \frac{\eta}{\omega}u + \frac{\pi}{2\omega}\left\{\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right) + 2\sin\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)\sum_1^\infty{}_n \frac{1}{\cos\left(\frac{2n\omega'}{\omega}\pi\right) - \cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)}\right\}. \quad (2)$$

Точно также изъ (25) того же § выведемъ:

$$\zeta(u) = \frac{\eta'}{\omega'}u + \frac{\pi}{2\omega'}\left\{\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi u}{2\omega'}\right) + 2\sin\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)\sum_1^\infty{}_m \frac{1}{\cos\left(\frac{2m\omega}{\omega'}\pi\right) - \cos\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)}\right\}, \quad (3)$$

Выраженія для $\bar\eta$ и $\bar\eta'$ формулы (24) и (29) того же § даютъ уже въ настоящемъ видѣ. Изъ этихъ формулъ (2) и (3) чрезъ дифференцированіе получаются соотвѣтственно формулы (5) и (6) пред. §. Для повѣрки полученныхъ результатовъ продифференцируемъ (2), подводя предварительно $\sin\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)$ подъ знакъ суммы; имѣя въ виду, что

$$\zeta'(u) = c' - \wp(u),$$

получимъ слѣдующее:

$$c' - \wp(u) =$$

$$= \frac{\eta}{\omega} + \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \left\{ \frac{-1}{\sin^2\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)} + 4\sum_1^\infty {}_n \frac{\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)\left[\cos\left(\frac{2n\omega'}{\omega}\pi\right) - \cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)\right] - \sin^2\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)}{\left[\cos\left(\frac{2n\omega'}{\omega}\pi\right) - \cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)\right]^2} \right\};$$

отсюда, имѣя въ виду, что

$$c' - \frac{\eta}{\omega} = \frac{c'\omega - \eta}{\omega} = -\frac{\bar{\eta}}{\omega},$$

и упрощая подъ знакомъ суммы, мы получимъ:

$$\wp(u) = -\frac{\bar{\eta}}{\omega} + \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \left\{ \frac{1}{\sin^2\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)} + \sum_1^\infty {}_n \frac{1 - \cos\left(\frac{2n\omega'}{\omega}\pi\right)\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)}{\left(\cos\left(\frac{2n\omega'}{\omega}\pi\right) - \cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)\right)^2} \right\},$$

согласно съ (5) пред. §.

185. Переходя къ разложеніямъ Θ-функцій въ простыя произведенія, найденнымъ въ § 173, [формулы (1), (2), (3), (6)—(10)] и преобразуя ихъ послѣ постановки рядомъ множителей, отвѣчающихъ одинаковымъ значеніямъ n или m, $2n-1$ или $2m-1$, въ обоихъ произведеніяхъ, на которыя эти функціи разложены въ томъ §, по формуламъ:

$$\frac{\sin(a+b)\sin(a-b)}{\sin^2 a} = 1 - \frac{\sin^2 b}{\sin^2 a}, \qquad (a)$$

$$\frac{\cos(a+b)\cos(a-b)}{\cos^2 a} = 1 - \frac{\sin^2 b}{\cos^2 a}, \qquad (b)$$

слѣдующихъ соотвѣтственно изъ (4) и (8) § 181, мы получимъ такія разложенія на множители этихъ функцій:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\Theta(u)}{\Theta'(0)} &= \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{\eta}{\omega}\frac{u^2}{2}} \sin\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right) \prod_1^\infty {}_n \left(1 - \frac{\sin^2\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)}{\sin^2\left(\frac{2n\omega'}{2\omega}\pi\right)}\right); \\ &= \frac{2\omega'}{\pi} e^{\frac{\eta'}{\omega'}\frac{u^2}{2}} \sin\left(\frac{u\pi}{2\omega'}\right) \prod_1^\infty {}_m \left(1 - \frac{\sin^2\left(\frac{u\pi}{2\omega'}\right)}{\sin^2\left(\frac{2m\omega}{2\omega'}\pi\right)}\right); \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\Theta_1(u)}{\Theta'(0)}&=e^{\frac{\eta}{\omega}\frac{u^2}{2}}\cos\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)\prod_1^\infty{}_n\left(1-\frac{\sin^2\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)}{\cos^2\left(\frac{2n\omega'}{2\omega}\pi\right)}\right);\\&=e^{\frac{\eta'}{\omega'}\frac{u^2}{2}}\prod_1^\infty{}_m\left(1-\frac{\sin^2\left(\frac{u\pi}{2\omega'}\right)}{\sin^2\left(\frac{(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi\right)}\right);\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\Theta_2(u)}{\Theta'(0)}&=e^{\frac{\eta}{\omega}\frac{u^2}{2}}\prod_1^\infty{}_n\left(1-\frac{\sin^2\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)}{\cos^2\left(\frac{(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\right)}\right);\\&=e^{\frac{\eta'}{\omega'}\frac{u^2}{2}}\prod_1^\infty{}_m\left(1-\frac{\sin^2\left(\frac{u\pi}{2\omega'}\right)}{\cos^2\left(\frac{(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi\right)}\right);\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\Theta_3(u)}{\Theta'(0)}&=e^{\frac{\eta}{\omega}\frac{u^2}{2}}\prod_1^\infty{}_n\left(1-\frac{\sin^2\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)}{\sin^2\left(\frac{(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\right)}\right);\\&=e^{\frac{\eta'}{\omega'}\frac{u^2}{2}}\cos\left(\frac{u\pi}{2\omega'}\right)\prod_1^\infty{}_m\left(1-\frac{\sin^2\left(\frac{u\pi}{2\omega'}\right)}{\cos^2\left(\frac{2m\omega}{2\omega'}\pi\right)}\right).\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

186. При помощи тѣхъ же вспомогательныхъ тригонометрическихъ формулъ формулы (1), (2) и (3) § 178 преобразуются въ такія:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{\wp(u)-e_1}&=\frac{\pi}{2\omega}\left\{\operatorname{cotg}\left(\frac{n\pi}{2\omega}\right)+2\sin\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)\sum_1^\infty{}_n\frac{(-1)^n}{\cos\left(\frac{2n\omega'}{\omega}\pi\right)-\cos\left(\frac{n\pi}{\omega}\right)}\right\},\\&=\frac{\pi}{2\omega'}\left\{\operatorname{cosec}\left(\frac{u\pi}{2\omega'}\right)+4\sin\left(\frac{u\pi}{2\omega'}\right)\sum_1^\infty{}_m\frac{\cos\left(\frac{2m\omega}{2\omega'}\pi\right)}{\cos\left(\frac{2m\omega}{\omega'}\pi\right)-\cos\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)}\right\};\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{\wp(u)-e_2}&=\frac{\pi}{2\omega}\left\{\operatorname{cosec}\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)+4\sin\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)\sum_1^\infty{}_n\frac{(-1)^n\cos\left(\frac{2n\omega'}{2\omega}\pi\right)}{\cos\left(\frac{2n\omega'}{\omega}\pi\right)-\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)}\right\},\\&=\frac{\pi}{2\omega'}\left\{\operatorname{cosec}\left(\frac{u\pi}{2\omega'}\right)+4\sin\left(\frac{u\pi}{2\omega'}\right)\sum_1^\infty{}_m\frac{(-1)^m\cos\left(\frac{2m\omega}{2\omega'}\pi\right)}{\cos\left(\frac{2m\omega}{\omega'}\pi\right)-\cos\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)}\right\};\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{\wp(u)-e_3}&=\frac{\pi}{2\omega}\left\{\operatorname{cosec}\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)+4\sin\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)\sum_{1}^{\infty}{}_n\frac{\cos\left(\frac{2n\omega'}{2\omega}\pi\right)}{\cos\left(\frac{2n\omega'}{\omega}\pi\right)-\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)}\right\},\\&=\frac{\pi}{2\omega'}\left\{\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2\omega'}\right)+2\sin\left(\frac{u\pi}{2\omega'}\right)\sum_{1}^{\infty}{}_m\frac{(-1)^m}{\cos\left(\frac{2m\omega}{\omega'}\pi\right)-\cos\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)}\right\}.\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

Также легко преобразуются и формулы (4), (5) и (6) того же § въ слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{\wp(u)-e_1}}&=-\frac{1}{\sqrt{e_2-e_1}\cdot\sqrt{e_3-e_1}}\cdot\frac{\pi}{2\omega}\left\{\operatorname{tg}\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)+2\sin\frac{u\pi}{\omega}\sum_{1}^{\infty}{}_n\frac{(-1)^n}{\cos\left(\frac{2n\omega'}{\omega}\pi\right)+\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)}\right\},\\&=\frac{1}{\sqrt{e_2-e_1}\cdot\sqrt{e_3-e_1}}\cdot\frac{2\pi}{\omega'}\sin\frac{u\pi}{2\omega'}\sum_{1}^{\infty}{}_m\frac{\cos\left(\frac{(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi\right)}{\cos\left(\frac{(2m-1)\omega}{\omega'}\pi\right)-\cos\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)};\end{aligned}\right\}(4)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{\wp(u)-e_2}}&=\frac{1}{\sqrt{e_1-e_2}\cdot\sqrt{e_3-e_2}}\cdot\frac{2\pi}{\omega}\sin\frac{u\pi}{2\omega}\sum_{1}^{\infty}{}_n\frac{(-1)^n\sin\left(\frac{(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\right)}{\cos\left(\frac{(2n-1)\omega'}{\omega}\pi\right)+\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)},\\&=\frac{1}{\sqrt{e_1-e_2}\cdot\sqrt{e_3-e_2}}\cdot\frac{2\pi}{\omega'}\sin\frac{u\pi}{2\omega'}\sum_{1}^{\infty}{}_m\frac{(-1)^m\sin\left(\frac{(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi\right)}{\cos\left(\frac{(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi\right)+\cos\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)};\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{\wp(u)-e_3}}&=\frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}\cdot\sqrt{e_2-e_3}}\cdot\frac{2\pi}{\omega}\sin\frac{u\pi}{2\omega}\sum_{1}^{\infty}{}_n\frac{\cos\left(\frac{(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\right)}{\cos\left(\frac{(2n-1)\omega'}{\omega}\pi\right)-\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)},\\&=-\frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}\cdot\sqrt{e_2-e_3}}\cdot\frac{\pi}{2\omega'}\left\{\operatorname{tg}\left(\frac{u\pi}{2\omega'}\right)+2\sin\frac{u\pi}{\omega'}\sum_{1}^{\infty}{}_m\frac{(-1)^m}{\cos\left(\frac{2m\omega}{\omega'}\pi\right)+\cos\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)}\right\}.\end{aligned}\right\}(6)$$

Изъ дальнѣйшихъ формулъ того же § нѣкоторую особенность въ преобразованіи представятъ тѣ изъ формулъ, которыя содержатъ tg или cotg съ нечетнымъ множителемъ при полуперіодѣ. Въ первой изъ формулъ (7) § 177, если соединить въ одинъ два члена, разнящіеся знакомъ предъ ω', мы будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\sqrt{\wp(u)-e_3}}{\sqrt{\wp(u)-e_2}}=\\&=-\frac{1}{\sqrt{e_2-e_1}}\frac{\pi}{2\omega}\left\{i+\sum_{1}^{\infty}{}_n(-1)^n\left[\operatorname{tg}\left(\frac{u-(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{u+(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\right)+2i\right]\right\};\end{aligned}\right\}(a)$$

но выраженіе въ скобкахъ [] такъ преобразуется:

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{tg}\left(\frac{u-(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{u+(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\right)+2i=\frac{-2\sin\left(\frac{(2n-1)\omega'}{\omega}\pi\right)}{\cos\left(\frac{(2n-1)\omega'}{\omega}\pi\right)+\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)}+2i=\\&=2i\frac{\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)+\cos\left(\frac{(2n-1)\omega'}{\omega}\pi\right)+i\sin\left(\frac{(2n-1)\omega'}{\omega}\pi\right)}{\cos\left(\frac{(2n-1)\omega'}{\omega}\pi\right)+\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)}=\\&=2i\frac{\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)+e^{(2n-1)\frac{\omega'}{\omega}\pi i}}{\cos\left(\frac{(2n-1)\omega'}{\omega}\pi\right)+\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)};\end{aligned}\right\}(b)$$

внося изъ (*b*) въ (*a*), получимъ первую изъ слѣдующихъ формулъ; прочія представятъ либо такія же преобразованія, либо подобныя прежнимъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sqrt{\wp(u)-e_3}}{\sqrt{\wp(u)-e_2}}&=-\frac{1}{\sqrt{e_2-e_1}}\frac{\pi i}{2\omega}\left\{1+2\sum_{1}^{\infty}{}_n(-1)^n\frac{\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)+e^{(2n-1)\frac{\omega'}{\omega}\pi i}}{\cos\left(\frac{(2n-1)\omega'}{\omega}\pi\right)+\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)}\right\},\\&=\frac{1}{\sqrt{e_2-e_1}}\frac{2\pi}{\omega'}\cos\left(\frac{u\pi}{2\omega'}\right)\sum_{1}^{\infty}{}_m\frac{\cos\left(\frac{(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi\right)}{\cos\left(\frac{(2m-1)\omega}{\omega'}\pi\right)+\cos\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)};\end{aligned}\right\}(7)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sqrt{\wp(u)-e_2}}{\sqrt{\wp(u)-e_3}}&=-\frac{1}{\sqrt{e_3-e_2}}\frac{\pi i}{2\omega}\left\{1+2\sum_{1}^{\infty}{}_n(-1)^{n-1}\frac{\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)-e^{(2n-1)\frac{\omega'}{\omega}\pi i}}{\cos\left(\frac{(2n-1)\omega'}{\omega}\pi\right)-\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)}\right\},\\&=\frac{1}{\sqrt{e_3-e_1}}\frac{2\pi}{\omega'}\cos\frac{u\pi}{2\omega'}\sum_{1}^{\infty}{}_m\frac{\cos\left(\frac{2m\omega}{2\omega'}\pi\right)}{\cos\left(\frac{2m\omega}{\omega'}\pi\right)+\cos\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)};\end{aligned}\right\}(8)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sqrt{\wp(u)-e_3}}{\sqrt{\wp(u)-e_1}}&=\frac{1}{\sqrt{e_1-e_2}}\frac{\pi}{2\omega}\left\{\sec\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)+4\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)\sum_{1}^{\infty}{}_{n}\frac{(-1)^n}{\cos\left(\frac{2n\omega'}{\omega}\pi\right)+\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)}\right\},\\&=\frac{1}{\sqrt{e_1-e_2}}\frac{2\pi}{\omega'}\cos\left(\frac{u\pi}{2\omega'}\right)\sum_{1}^{\infty}{}_{m}\frac{(-1)^m\sin\left(\frac{(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi\right)}{\cos\left(\frac{(2m-1)\omega}{\omega'}\pi\right)-\cos\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)};\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sqrt{\wp(u)-e_1}}{\sqrt{\wp(u)-e_3}}&=\frac{1}{\sqrt{e_3-e_2}}\frac{2\pi}{\omega}\cos\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)\sum_{1}^{\infty}{}_{n}\frac{(-1)^n\sin\left(\frac{(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\right)}{\cos\left(\frac{(2n-1)\omega'}{\omega}\pi\right)-\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)},\\&=\frac{1}{\sqrt{e_3-e_2}}\frac{\pi}{2\omega'}\left\{\sec\left(\frac{u\pi}{2\omega'}\right)+4\cos\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)\sum_{1}^{\infty}{}_{m}\frac{(-1)^m}{\cos\left(\frac{2m\omega}{\omega'}\pi\right)+\cos\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)}\right\};\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sqrt{\wp(u)-e_2}}{\sqrt{\wp(u)-e_1}}&=\frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\frac{2\pi}{\omega}\cos\frac{u\pi}{2\omega}\sum_{1}^{\infty}{}_{n}\frac{\cos\left(\frac{2n\omega'}{2\omega}\pi\right)}{\cos\left(\frac{2n\omega'}{\omega}\pi\right)+\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)},\\&=\frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\frac{\pi i}{2\omega'}\left\{1+2\sum_{1}^{\infty}{}_{m}(-1)^{m-1}\frac{\cos\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)-e^{-(2m-1)\frac{u\pi}{\omega'}\pi i}}{\cos\left(\frac{(2m-1)\omega}{\omega'}\pi\right)-\cos\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)}\right\};\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sqrt{\wp(u)-e_1}}{\sqrt{\wp(u)-e_2}}&=\frac{1}{\sqrt{e_2-e_3}}\frac{2\pi}{\omega}\cos\frac{u\pi}{2\omega}\sum_{1}^{\infty}{}_{n}\frac{\cos\left(\frac{(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\right)}{\cos\left(\frac{(2n-1)\omega'}{\omega}\pi\right)+\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)},\\&=\frac{1}{\sqrt{e_2-e_3}}\frac{\pi i}{2\omega'}\left\{1+2\sum_{1}^{\infty}{}_{m}(-1)^{m}\frac{\cos\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)+e^{-(2m-1)\frac{\omega}{\omega'}\pi i}}{\cos\left(\frac{(2m-1)\omega}{\omega'}\pi\right)+\cos\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)}\right\}.\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

187. Переходя къ формуламъ § 180, замѣтимъ, что первая и послѣдняя такого же типа, какъ формулы (1) и (2) § 169, а потому преобразуются при помощи формулъ (3) и (4) § 183; остальныя же будутъ, послѣ постановки рядомъ членовъ, отвѣчающихъ одинаковымъ

численно значеніямъ m (или n), содержать подъ знакомъ суммы выраженія такого вида:

$$\frac{\cos(a-b)}{\sin^2(a-b)}+\frac{\cos(a+b)}{\sin^2(a+b)}, \qquad (a)$$

которыя по приведеніи къ одному знаменателю будутъ имѣть числителемъ выраженіе:

$$N=\sin^2(a+b)\cos(a-b)+\sin^2(a-b)\cos(a+b), \qquad (b)$$

которое при помощи (8) § 183 такъ преобразуется:

$$\left.\begin{aligned} N&=\cos(a-b)+\cos(a+b)-\cos(a-b)\cos(a+b)[\cos(a-b)+\cos(a+b)]=\\ &=[\cos(a-b)+\cos(a+b)][1-\cos(a-b)\cos(a+b)]=\\ &=2\cos a\cos b\,[1-(\cos^2 a-\sin^2 b)]=\\ &=2\cos a\cos b\,(\sin^2 a+\sin^2 b);\end{aligned}\right\} (c)$$

знаменатель же преобразуется по (4) § 183.

Такимъ образомъ на основаніи этой формулы (c) и формулъ (3) и (4) § 181, разложенія (1), (2) и (3) § 178 по соединеніи въ одинъ членовъ отвѣчающихъ одинаковымъ численно значеніямъ m и n преобразуются въ такія:

$$\left.\begin{aligned} &\sqrt{\wp(u)-e_2}\cdot\sqrt{\wp(u)-e_3}=\\ &=\Big(\frac{\pi}{2\omega}\Big)^2\left\{\operatorname{cosec}^2\Big(\frac{u\pi}{2\omega}\Big)+4\sum_{1}^{\infty}{}_{n}(-1)^n\frac{1-\cos\Big(\frac{2n\omega'}{\omega}\pi\Big)\cos\Big(\frac{u\pi}{\omega}\Big)}{\Big[\cos\Big(\frac{2n\omega'}{\omega}\pi\Big)-\cos\Big(\frac{u\pi}{\omega}\Big)\Big]^2}\right\},\\ &=\Big(\frac{\pi}{2\omega'}\Big)^2\left\{\frac{\cos\Big(\frac{u\pi}{2\omega'}\Big)}{\sin^2\Big(\frac{u\pi}{2\omega'}\Big)}+2\cos\Big(\frac{u\pi}{2\omega'}\Big)\sum_{1}^{\infty}{}_{m}\frac{\cos\Big(\frac{2m\omega}{2\omega'}\pi\Big)\Big[\sin^2\Big(\frac{2m\omega}{2\omega'}\pi\Big)+\sin^2\Big(\frac{u\pi}{2\omega'}\Big)\Big]}{\Big[\cos\Big(\frac{2m\omega}{\omega'}\pi\Big)-\cos\Big(\frac{u\pi}{\omega'}\Big)\Big]^2}\right\};\end{aligned}\right\}(1)$$

$$\left.\begin{aligned} &\sqrt{\wp(u)-e_1}\cdot\sqrt{\wp(u)-e_3}=\\ &=\Big(\frac{\pi}{2\omega}\Big)^2\left\{\frac{\cos\Big(\frac{u\pi}{2\omega}\Big)}{\sin^2\Big(\frac{u\pi}{2\omega}\Big)}+2\cos\Big(\frac{u\pi}{2\omega}\Big)\sum_{1}^{\infty}{}_{n}(-1)^n\frac{\cos\Big(\frac{2n\omega'}{2\omega}\pi\Big)\Big[\sin^2\Big(\frac{2n\omega'}{2\omega}\pi\Big)+\sin^2\Big(\frac{u\pi}{2\omega}\Big)\Big]}{\Big[\cos\Big(\frac{2n\omega'}{\omega}\pi\Big)-\cos\Big(\frac{u\pi}{\omega}\Big)\Big]^2}\right\},\\ &=\Big(\frac{\pi}{2\omega'}\Big)^2\left\{\frac{\cos\Big(\frac{u\pi}{2\omega'}\Big)}{\sin^2\Big(\frac{u\pi}{2\omega'}\Big)}+2\cos\Big(\frac{u\pi}{2\omega'}\Big)\sum_{1}^{\infty}{}_{m}(-1)^m\frac{\cos\Big(\frac{2m\omega}{2\omega'}\pi\Big)\Big[\sin^2\Big(\frac{2m\omega}{2\omega'}\pi\Big)+\sin^2\Big(\frac{u\pi}{2\omega'}\Big)\Big]}{\Big[\cos\Big(\frac{2m\omega}{\omega'}\pi\Big)-\cos\Big(\frac{u\pi}{\omega'}\Big)\Big]^2}\right\};\end{aligned}\right\}(2)$$

$$\left.\begin{aligned}&\sqrt{\wp(u)-e_1}\cdot\sqrt{\wp(u)-e_2}=\\&=\left(\frac{\pi}{2\pi}\right)^2\left\{\frac{\cos\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)}{\sin^2\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)}+2\cos\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)\sum_{1}^{\infty}{}_n\frac{\cos\left(\frac{2n\omega'}{2\omega}\pi\right)\left[\sin^2\left(\frac{2n\omega'}{2\omega}\pi\right)+\sin^2\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)\right]}{\left[\cos\left(\frac{2n\omega'}{\omega}\pi\right)-\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)\right]^2}\right\},\\&=\left(\frac{\pi}{2\omega'}\right)^2\left\{\operatorname{cosec}^2\left(\frac{u\pi}{2\omega'}\right)+4\sum_{1}^{\infty}{}_m(-1)^m\frac{1-\cos\left(\frac{2m\omega}{\omega'}\pi\right)\cos\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)}{\left[\cos^2\left(\frac{2m\omega}{\omega'}\pi\right)-\cos\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)\right]^2}\right\}.\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

Что касается формулъ (4), (5) и (6) того же § 180, то онѣ легко приводятся къ слѣдующимъ:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{e_1-e_2}\cdot\sqrt{e_1-e_3}&=\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\left\{1+2\sum_{1}^{\infty}{}_n(-1)^n\sec^2\left(\frac{2n\omega'}{2\omega}\pi\right)\right\}=\\&=\left(\frac{\pi}{2\omega'}\right)^2.2\sum_{1}^{\infty}{}_m\frac{\cos\left(\frac{(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi\right)}{\sin^2\left(\frac{(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi\right)};\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{e_2-e_1}\cdot\sqrt{e_2-e_3}&=\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2.2\sum_{1}^{\infty}{}_n(-1)^n\frac{\sin\left(\frac{(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\right)}{\cos^2\left(\frac{(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\right)}=\\&=\left(\frac{\pi}{2\omega'}\right)^2.2\sum_{1}^{\infty}{}_m(-1)^m\frac{\sin\left(\frac{(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi\right)}{\cos^2\left(\frac{(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi\right)};\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{e_3-e_1}\cdot\sqrt{e_3-e_2}&=\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2.2\sum_{1}^{\infty}{}_n\frac{\cos\left(\frac{(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\right)}{\sin^2\left(\frac{(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\right)}=\\&=\left(\frac{\pi}{2\omega'}\right)^2\left\{1+2\sum_{1}^{\infty}{}_m(-1)^m\sec^2\left(\frac{2m\omega}{2\omega'}\pi\right)\right\}.\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

188. Съ помощію тѣхъ же тригонометрическихъ формулъ (3), (4), (7), (8) § 183 разложенія функцій амплитуды, представляемыя формулами (7), (15) и (19) § 181, и (8), (16) и (21) § 182, приведутся легко къ слѣдующимъ, (гдѣ мы поставили рядомъ оба разложенія каждой функціи):

$$\left.\begin{aligned}\sin\mathrm{am}(v,k)&=\frac{1}{k}\frac{2\pi}{K}\sin\left(\frac{v\pi}{2K}\right)\sum_{1}^{\infty}{}_n\frac{\cos\left(\frac{(2n-1)K'i}{2K}\pi\right)}{\cos\left(\frac{(2n-1)K'i}{K}\pi\right)-\cos\left(\frac{v\pi}{K}\right)},\\ &=\frac{i}{k}\frac{\pi}{2K'}\left\{\mathrm{tg}\left(\frac{v\pi}{2K'i}\right)+2\sin\left(\frac{v\pi}{2K'i}\right)\sum_{1}^{\infty}{}_m(-1)^m\frac{1}{\cos\left(\frac{2mK}{K'i}\pi\right)+\cos\left(\frac{v\pi}{K'i}\right)}\right\};\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\mathrm{am}(v,k)&=\frac{i}{k}\frac{2\pi}{K}\cos\left(\frac{v\pi}{K}\right)\sum_{1}^{\infty}{}_n(-1)^n\frac{\sin\left(\frac{(2n-1)K'i}{2K}\pi\right)}{\cos\left(\frac{(2n-1)K'i}{K}\pi\right)-\cos\left(\frac{v\pi}{K}\right)},\\ &=\frac{1}{k}\frac{\pi}{2K'}\left\{\sec\left(\frac{v\pi}{2K'i}\right)+4\cos\left(\frac{v\pi}{2K'i}\right)\sum_{1}^{\infty}{}_m(-1)^m\frac{\cos\left(\frac{2mK}{K'i}\pi\right)}{\cos\left(\frac{2mK}{K'i}\pi\right)+\cos\left(\frac{v\pi}{K'i}\right)}\right\};\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

$$\left.\begin{aligned}\triangle\mathrm{am}(v,k)&=1+i\frac{2\pi}{K}\sin^2\left(\frac{v\pi}{2K}\right)\sum_{1}^{\infty}{}_n(-1)^n\frac{\mathrm{cotg}\left(\frac{(2n-1)K'i}{K}\pi\right)}{\cos\left(\frac{(2n-1)K'i}{K}\pi\right)-\cos\left(\frac{v\pi}{K}\right)},\\ &=\frac{\pi}{2K'}\left\{\sec\left(\frac{v\pi}{2K'i}\right)+4\cos\left(\frac{v\pi}{2K'i}\right)\sum_{1}^{\infty}{}_m\frac{\cos\left(\frac{2mK}{2K'i}\pi\right)}{\cos\left(\frac{2mK}{K'i}\pi\right)+\cos\left(\frac{v\pi}{K'i}\right)}\right\}.\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

189. Разложенія эллиптическихъ функцій и другихъ, полученныя нами въ §§ 183—188, могутъ быть еще иначе представлены, если ввести въ нихъ величины

$$q=e^{-\tau\pi i},\quad \text{гдѣ}\quad \tau=\frac{\omega'}{\omega},\tag{1}$$

или соотвѣтственно

$$q'=e^{-\tau'\pi i},\quad \text{гдѣ}\quad \tau'=\frac{\omega}{\omega'},\tag{2}$$

такъ что

$$\tau.\tau'=1.\tag{3}$$

Эти величины q и q' вообще комплексныя, модуль которыхъ <1, если $\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right)>0$.

*

Дѣйствительно, если

$$\omega = a + bi, \qquad \omega' = a' + b'i, \tag{4}$$

то по (1):

$$\tau = \frac{a' + b'i}{a + bi} = \frac{aa' + bb'}{a^2 + b^2} + \frac{ab' - a'b}{a^2 + b^2} i, \tag{5}$$

и по (2):

$$\tau' = \frac{a + bi}{a' + b'i} = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} - \frac{ab' - a'b}{a'^2 + b'^2} i; \tag{6}$$

слѣдовательно по (1):

$$q = e^{-\frac{ab'-a'b}{a^2+b^2}\pi} \cdot e^{\frac{aa'+bb'}{a^2+b^2}\pi i}, \tag{7}$$

и по (2):

$$q' = e^{-\frac{ab'-a'b}{a'^2+b'^2}\pi} \cdot e^{-\frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2}\pi i}; \tag{8}$$

но $\frac{ab'-a'b}{a^2+b^2} = \Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right) > 0$; откуда, такъ какъ

$$|q| = e^{-\frac{ab'-a'b}{a^2+b^2}\pi} \quad \text{и} \quad |q'| = e^{-\frac{ab'-a'b}{a'^2+b'^2}\pi}, \tag{9}$$

и слѣдуетъ сказанное; (такъ какъ и второй показатель очевидно одного знака съ первымъ).

Входящія въ указанныя формулы cos и sin отъ кратныхъ либо $\frac{\omega'}{\omega}$, либо $\frac{\omega}{\omega'}$, такъ представятся:

$$\left.\begin{aligned} \cos\left(\frac{p\omega'}{2\omega}\pi\right) &= \cos\left(\frac{p}{2}\tau\right) = \frac{q^{\frac{p}{2}} + q^{-\frac{p}{2}}}{2} = \frac{1}{2} q^{-\frac{p}{2}}(1 + q^p); \\ \sin\left(\frac{p\omega'}{2\omega}\pi\right) &= \sin\left(\frac{p}{2}\tau\right) = \frac{q^{\frac{p}{2}} - q^{-\frac{p}{2}}}{2i} = \frac{i}{2} q^{-\frac{p}{2}}(1 - q^p); \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

гдѣ p цѣлое число, четное или нечетное; и

$$\left.\begin{aligned}\cos\left(\frac{p'\omega}{2\omega'}\pi\right)&=\cos\left(\frac{p'}{2}\tau'\right)=\frac{q'^{\frac{p'}{2}}+q'^{-\frac{p'}{2}}}{2}=\frac{1}{2}q'^{-\frac{p'}{2}}(1+q'^{p'});\\ \sin\left(\frac{p'\omega}{2\omega'}\pi\right)&=\sin\left(\frac{p'}{2}\tau'\right)=\frac{q'^{-\frac{p'}{2}}-q'^{\frac{p'}{2}}}{2i}=-\frac{i}{2}q'^{-\frac{p'}{2}}(1-q'^{p'}),\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

гдѣ p' тоже цѣлое число, четное или нечетное.

190. На основанiи послѣднихъ формулъ, формулы (5), (6), (7), (9)—(11), (12)—(14) § 183, послѣ легкихъ упрощенiй принимаютъ такой видъ:

$$\left.\begin{aligned}\wp(u)&=-\frac{\overline{\eta}}{\omega}+\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\left\{\frac{1}{\sin^2\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)}+8\sum_{1}^{\infty}{}_n\frac{q^{2n}\left(2q^{2n}-(1+q^{4n})\cos\frac{u\pi}{\omega}\right)}{\left(1-2q^{2n}\cos\frac{u\pi}{\omega}+q^{4n}\right)^2}\right\},\\ &=-\frac{\overline{\eta}'}{\omega'}+\left(\frac{\pi}{2\omega'}\right)^2\left\{\frac{1}{\sin^2\left(\frac{u\pi}{2\omega'}\right)}+8\sum_{1}^{\infty}{}_m\frac{q'^{2m}\left(2q'^{2m}-(1+q'^{4m})\cos\frac{u\pi}{\omega'}\right)}{\left(1-2q'^{2m}\cos\frac{u\pi}{\omega'}+q'^{4m}\right)^2}\right\};\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

$$\left.\begin{aligned}\wp(u+\omega)&=-\frac{\overline{\eta}}{\omega}+\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\left\{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)}+8\sum_{1}^{\infty}{}_n\frac{q^{2n}\left(2q^{2n}+(1+q^{4n})\cos\frac{u\pi}{\omega}\right)}{\left(1+2q^{2n}\cos\frac{u\pi}{\omega}+q^{4n}\right)^2}\right\},\\ &=-\frac{\overline{\eta}'}{\omega'}+\left(\frac{\pi}{2\omega'}\right)^2.8\sum_{1}^{\infty}{}_m\frac{q'^{2m-1}\left(2q'^{2m-1}-(1+q'^{2(2m-1)})\cos\frac{u\pi}{\omega'}\right)}{\left(1-2q'^{2m-1}\cos\frac{u\pi}{\omega'}+q'^{2(2m-1)}\right)^2};\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

$$\left.\begin{aligned}\wp(u+\omega'')&=-\frac{\overline{\eta}}{\omega}+\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2.8\sum_{1}^{\infty}{}_n\frac{q^{2n-1}\left(2q^{2n-1}+(1+q^{2(n-1)})\cos\frac{u\pi}{\omega}\right)}{\left(1+2q^{2n-1}\cos\frac{u\pi}{\omega}+q^{2(n-1)}\right)^2},\\ &=-\frac{\overline{\eta}'}{\omega'}+\left(\frac{\pi}{2\omega'}\right)^2.8\sum_{1}^{\infty}{}_m\frac{q'^{2m-1}\left(2q'^{2m-1}+(1+q'^{2(m-1)})\cos\frac{u\pi}{\omega'}\right)}{\left(1+2q'^{2m-1}\cos\frac{u\pi}{\omega'}+q'^{2(m-1)}\right)^2};\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

$$\left.\begin{aligned}\wp(u+\omega') &= -\frac{\overline{\eta}}{\omega}+\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2.8\sum_1^{\infty}{}_n \frac{q^{2n-1}\left(2q^{2n-1}-(1+q^{2(2n-1)})\cos\frac{u\pi}{\omega}\right)}{\left(1-2q^{2n-1}\cos\frac{u\pi}{\omega}+q^{2(2n-1)}\right)^2},\\ &= -\frac{\overline{\eta}'}{\omega'}+\left(\frac{\pi}{2\omega'}\right)^2\left\{\frac{1}{\cos\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)}+8\sum_1^{\infty}{}_m \frac{q'^{2m}\left(2q'^{2m}+(1+q'^{2m})\cos\frac{u\pi}{\omega'}\right)}{\left(1+2q'^{2m}\cos\frac{u\pi}{\omega'}+q'^{4m}\right)^2}\right\}.\end{aligned}\right\}(4)$$

$$\left.\begin{aligned}e_1=\wp(\omega) &= -\frac{\overline{\eta}}{\omega}+\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\left\{1+8\sum_1^{\infty}{}_n \frac{q^{2n}}{(1+q^{2n})^2}\right\},\\ &= -\frac{\overline{\eta}'}{\omega'}-\left(\frac{\pi}{2\omega'}\right)^2.8\sum_1^{\infty}{}_m \frac{q'^{2m-1}}{(1-q'^{2m-1})^2};\end{aligned}\right\}(5)$$

$$\left.\begin{aligned}e_2=\wp(\omega'') &= -\frac{\overline{\eta}}{\omega}+\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2.8\sum_1^{\infty}{}_n \frac{q^{2n-1}}{(1+q^{2n-1})^2},\\ &= -\frac{\overline{\eta}'}{\omega'}+\left(\frac{\pi}{2\omega'}\right)^2.8\sum_1^{\infty}{}_m \frac{q'^{2m-1}}{(1+q'^{2m-1})^2};\end{aligned}\right\}(6)$$

$$\left.\begin{aligned}e_3=\wp(\omega') &= -\frac{\overline{\eta}}{\omega}-\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2.8\sum_1^{\infty}{}_n \frac{q^{2n-1}}{(1-q^{2n-1})^2},\\ &= -\frac{\overline{\eta}'}{\omega'}+\left(\frac{\pi}{2\omega'}\right)^2\left\{1+8\sum_1^{\infty}{}_m \frac{q'^{2m}}{(1+q'^{2m})^2}\right\}.\end{aligned}\right\}(7)$$

Формулы (2) и (3) § 184 примутъ теперь такой видъ:

$$\left.\begin{aligned}\zeta(u) &= \frac{\eta}{\omega}u+\frac{\pi}{2\omega}\left\{\operatorname{cotg}\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)+4\sin\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)\sum_1^{\infty}{}_n \frac{q^{2n}}{1-2q^{2n}\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)+q^{4n}}\right\},\\ &= \frac{\eta'}{\omega'}u+\frac{\pi}{2\omega'}\left\{\operatorname{cotg}\left(\frac{u\pi}{2\omega'}\right)+4\sin\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)\sum_1^{\infty}{}_m \frac{q'^{2m}}{1-2q'^{2m}\cos\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)+q'^{4m}}\right\}.\end{aligned}\right\}(8)$$

191. Аналогичныя формулы для функцій $\zeta(u+\omega)$, $\zeta(u+\omega'')$ и $\zeta(u+\omega')$ проще всего найдутся при помощи формулъ (9) и (12) § 166, которыя по внесеніи въ нихъ вмѣсто $c'-C$ и $c'-C'$ ихъ значеній

изъ (20) и (26) § 167, и приведеніи къ одному знаменателю выраженій, стоящихъ въ скобкахъ { } въ этихъ формулахъ, легко приведутся къ такому виду:

$$\left.\begin{aligned}\zeta(u-v)&=\\ &=-\zeta(v)+\frac{\eta}{\omega}u+\frac{\pi}{2\omega}\sin\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)\sum_1^{\infty}{}_n\frac{1}{\sin\left(\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi\right)\sin\left(\frac{u-v-2n\omega'}{2\omega}\pi\right)}\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

$$=-\zeta(v)+\frac{\eta'}{\omega'}u+\frac{\pi}{2\omega'}\sin\left(\frac{u\pi}{2\omega'}\right)\sum_1^{\infty}{}_m\frac{1}{\sin\left(\frac{v+2m\omega}{2\omega'}\pi\right)\sin\left(\frac{u-v-2m\omega}{2\omega'}\pi\right)}.\quad(2)$$

Полагая въ первой изъ этихъ формулъ $v=-\omega$, мы получимъ:

$$\left.\begin{aligned}\zeta(u+\omega)&=\eta+\frac{\eta}{\omega}u+\frac{\pi}{2\omega}\sin\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\frac{-1}{\cos\left(\frac{2n\omega'}{2\omega}\pi\right)\cos\left(\frac{u-2n\omega'}{2\omega}\pi\right)}=\\ &=\eta+\frac{\eta}{\omega}u-\frac{\pi}{2\omega}\left\{\operatorname{tg}\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)+\sin\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)\sum_1^{+\infty}{}_n\frac{\cos\left(\frac{u+2n\omega'}{2\omega}\pi\right)+\cos\left(\frac{u-2n\omega'}{2\omega}\pi\right)}{\cos\left(\frac{2n\omega'}{2\omega}\pi\right)\cos\left(\frac{u-2n\omega'}{2\omega}\pi\right)\cos\left(\frac{u+2n\omega'}{2\omega}\pi\right)}\right\};\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

на основаніи извѣстныхъ формулъ тригонометріи отсюда получимъ;

$$\zeta(u+\omega)=\eta+\frac{\eta}{\omega}u-\frac{\pi}{2\omega}\left\{\operatorname{tg}\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)+2\sin\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)\sum_1^{\infty}{}_n\frac{1}{\cos\left(\frac{2n\omega'}{2\omega}\pi\right)+\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)}\right\}.\quad(4)$$

Подставляя во (2) формулу ω вмѣсто $-v$, получимъ:

$$\left.\begin{aligned}\zeta(u+\omega)&=\eta+\frac{\eta'}{\omega'}u+\frac{\pi}{2\omega'}\sin\left(\frac{u\pi}{2\omega'}\right)\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\frac{1}{\sin\left(\frac{(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi\right)\sin\left(\frac{u-(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi\right)}=\\ &=\eta+\frac{\eta'}{\omega'}u+\frac{\pi}{2\omega'}\sin\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)\sum_1^{\infty}{}_m\frac{\sin\left(\frac{u+(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi\right)+\sin\left(\frac{u-(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi\right)}{\sin\left(\frac{(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi\right)\sin\left(\frac{u-(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi\right)\sin\left(\frac{u+(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi\right)};\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

отсюда по извѣстнымъ формуламъ тригонометріи получимъ:

$$\zeta(u+\omega)=\eta+\frac{\eta'}{\omega'}u+\frac{2\pi}{\omega'}\sin^2\Big(\frac{u\pi}{2\omega'}\Big)\sum_1^{\infty}{}_m\frac{\operatorname{cotg}\Big(\frac{(2m-1)\omega}{2\omega'}\pi\Big)}{\cos\Big(\frac{(2m-1)\omega}{\omega'}\pi\Big)-\cos\Big(\frac{u\pi}{\omega'}\Big)}. \tag{6}$$

Полагая въ (1) $v=-\omega''$, мы получимъ:

$$\left.\begin{aligned}\zeta(u+\omega'')&=\eta''+\frac{\eta}{\omega}u+\frac{\pi}{2\omega}\sin\frac{u\pi}{2\omega}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\frac{-1}{\cos\Big(\frac{(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\Big)\cos\Big(\frac{u-(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\Big)}=\\&=\eta''+\frac{\eta}{\omega}u+\frac{\pi}{2\omega}\sin\sum_1^{\infty}{}_n\frac{-1}{\cos\Big(\frac{(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\Big)}\cdot\frac{\cos\Big(\frac{u+(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\Big)+\cos\Big(\frac{n-(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\Big)}{\cos\Big(\frac{u-(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\Big)\cos\Big(\frac{u+(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\Big)};\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

откуда съ помощію всё тѣхъ же формулъ тригонометріи получимъ:

$$\zeta(u+\omega'')=\eta''+\frac{\eta}{\omega}u-\frac{\pi}{\omega}\sin\frac{u\pi}{\omega}\sum_1^{\infty}{}_n\frac{1}{\cos\Big(\frac{(2n-1)\omega'}{\omega}\pi\Big)+\cos\frac{u\pi}{\omega}}. \tag{8}$$

Точно также получимъ изъ (2):

$$\zeta(u+\omega'')=\eta''+\frac{\eta'}{\omega'}u-\frac{\pi}{\omega'}\sin\frac{u\pi}{\omega'}\sum_1^{\infty}{}_m\frac{1}{\cos\Big(\frac{(2m-1)\omega}{\omega'}\pi\Big)+\cos\frac{u\pi}{\omega'}}. \tag{9}$$

Полагая $v=-\omega'$ въ (1) и (2), получимъ слѣдующія формулы:

$$\zeta(u+\omega')=\eta'+\frac{\eta}{\omega}u+\frac{2\pi}{\omega}\sin^2\Big(\frac{u\pi}{2\omega}\Big)\sum_1^{\infty}{}_n\frac{\operatorname{cotg}\Big(\frac{(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\Big)}{\cos\Big(\frac{(2n-1)\omega'}{\omega}\pi\Big)-\cos\Big(\frac{u\pi}{\omega}\Big)}; \tag{10}$$

$$\zeta(u+\omega')=\eta'+\frac{\eta'}{\omega'}u-\frac{\pi}{2\omega'}\left\{\operatorname{tg}\Big(\frac{u\pi}{2\omega'}\Big)+2\sin\Big(\frac{u\pi}{\omega'}\Big)\sum_1^{\infty}{}_m\frac{1}{\cos\Big(\frac{2m\omega}{\omega'}\pi\Big)+\cos\Big(\frac{u\pi}{\omega'}\Big)}\right\}. \tag{11}$$

Эти формулы и прямо могутъ быть написаны по аналогіи съ (6) и (4) мѣняя ω на ω' и на оборотъ. Введя теперь въ формулы (4), (6), (8), (9), (10) и (11) вмѣсто тригонометрическихъ функцій отъ кратныхъ отношенія періодовъ ихъ выраженія чрезъ величины q и q', мы дадимъ имъ окончательно такой видъ:

$$
\left.\begin{aligned}
&\zeta(u+\omega)=\\
&=\eta+\frac{\eta}{\omega}u-\frac{\pi}{2\omega}\left\{\operatorname{tg}\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)+4\sin\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)\sum_1^\infty{}_n\frac{q^{2n}}{1+2q^{2n}\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)+q^{4n}}\right\};\\
&=\eta+\frac{\eta'}{\omega'}u+\frac{4\pi i}{\omega'}\sin^2\left(\frac{u\pi}{2\omega'}\right)\sum_1^\infty{}_m\frac{q'^{2m-1}\left(\frac{1+q'^{2m-1}}{1-q'^{2m-1}}\right)}{1-2q'^{2m-1}\cos\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)+q'^{2(2m-1)}}.
\end{aligned}\right\}\quad(12)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\zeta(u+\omega'')=\\
&=\eta''+\frac{\eta}{\omega}u-\frac{2\pi}{\omega}\sin\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)\sum_1^\infty{}_n\frac{q^{2n-1}}{1+2q^{2n-1}\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)+q^{2(2n-1)}};\\
&=\eta''+\frac{\eta'}{\omega'}u-\frac{2\pi}{\omega'}\sin\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)\sum_1^\infty{}_m\frac{q'^{2m-1}}{1+2q'^{2m-1}\cos\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)+q'^{2(2m-1)}}.
\end{aligned}\right\}\quad(13)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\zeta(u+\omega')=\\
&=\eta'+\frac{\eta}{\omega}u-\frac{4\pi i}{\omega}\sin^2\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)\sum_1^\infty{}_n\frac{q^{2n-1}\left(\frac{1+q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}}\right)}{1+2q^{2n-1}\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)+q^{2(2n-1)}}.\\
&=\eta'+\frac{\eta'}{\omega'}u+\frac{\pi}{2\omega'}\left\{\operatorname{tg}\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)+4\sin\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)\sum_1^\infty{}_m\frac{q'^{2m}}{1-2q'^{2m}\cos\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)+q'^{4m}}\right\}.
\end{aligned}\right\}\quad(14)
$$

192. Вводя выраженія тригонометрическихъ функцій чрезъ показательныя въ формулы (1), (2), (3), (6)—(10) § 173, мы дадимъ разложеніямъ Θ-функцій на множители такой видъ:

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\Theta(u)}{\Theta'(0)}&=\frac{2\omega}{\pi}e^{\frac{\eta}{\omega}\frac{u^2}{2}}\sin\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)\prod_1^\infty{}_n\frac{1-q^{2n}e^{-\frac{u\pi}{\omega}i}}{1-q^{2n}}\prod_1^\infty{}_n\frac{1-q^{2n}e^{\frac{u\pi}{\omega}i}}{1-q^{2n}}=\\
&=\frac{2\omega}{\pi}e^{\frac{\eta}{\omega}\frac{u^2}{2}}\sin\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)\prod_1^\infty{}_n\frac{1-2q^{2n}\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)+q^{4n}}{(1-q^{2n})^2};
\end{aligned}\right\}\quad(1)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&=\frac{2\omega'}{\pi}e^{\frac{\eta'}{\omega'}\frac{u^2}{2}}\sin\Big(\frac{u\pi}{2\omega'}\Big)\prod_1^\infty{}_m\frac{1-q'^{2m}e^{\frac{u\pi}{\omega'}i}}{1-q'^{2m}}\prod_1^\infty{}_m\frac{1-q'^{2m}e^{-\frac{u\pi}{\omega'}i}}{1-q'^{2m}}=\\
&=\frac{2\omega'}{\pi}e^{\frac{\eta'}{\omega'}\frac{u^2}{2}}\sin\Big(\frac{u\pi}{2\omega'}\Big)\prod_1^\infty{}_m\frac{1-2q'^{2m}\cos\frac{u\pi}{\omega'}+q'^{4m}}{(1-q'^{2m})^2}.
\end{aligned}\right\}\quad(2)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\Theta_1(u)}{\Theta'(0)}&=e^{\frac{\eta}{\omega}\frac{u^2}{2}}\cos\Big(\frac{u\pi}{2\omega}\Big)\prod_1^\infty{}_n\frac{1+q^{2n}e^{-\frac{u\pi}{\omega}i}}{1+q^{2n}}\prod_1^\infty{}_n\frac{1+q^{2n}e^{\frac{u\pi}{\omega}i}}{1+q^{2n}}=\\
&=e^{\frac{\eta}{\omega}\frac{u^2}{2}}\cos\Big(\frac{u\pi}{2\omega}\Big)\prod_1^\infty{}_n\frac{1+2q^{2n}\cos\frac{u\pi}{\omega}+q^{4n}}{(1+q^{2n})^2};
\end{aligned}\right\}\quad(3)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&=e^{\frac{\eta'}{\omega'}\frac{u^2}{2}}\prod_1^\infty{}_m\frac{1-q'^{2m-1}e^{\frac{u\pi}{\omega'}i}}{1-q'^{2m-1}}\prod_1^\infty{}_m\frac{1-q'^{2m-1}e^{-\frac{u\pi}{\omega'}i}}{1-q'^{2m-1}}=\\
&=e^{\frac{\eta'}{\omega'}\frac{u^2}{2}}\prod_1^\infty{}_m\frac{1-2q'^{2m-1}\cos\frac{u\pi}{\omega'}+q'^{2(2m-1)}}{(1-q'^{2m-1})^2}.
\end{aligned}\right\}\quad(4)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\Theta_2(u)}{\Theta'(0)}&=e^{\frac{\eta}{\omega}\frac{u^2}{2}}\prod_1^\infty{}_n\frac{1+q^{2n-1}e^{-\frac{u\pi}{\omega}i}}{1+q^{2n-1}}\prod_1^\infty{}_n\frac{1+q^{2n-1}e^{\frac{u\pi}{\omega}i}}{1+q^{2n-1}}=\\
&=e^{\frac{\eta}{\omega}\frac{u^2}{2}}\prod_\infty^\infty{}_n\frac{1+2q^{2n-1}\cos\frac{u\pi}{\omega}+q^{2(2n-1)}}{(1+q^{2n-1})^2};
\end{aligned}\right\}\quad(5)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&=e^{\frac{\eta'}{\omega'}\frac{u^2}{2}}\prod_1^\infty{}_m\frac{1+q'^{2m-1}e^{\frac{u\pi}{\omega'}i}}{1+q'^{2m-1}}\prod_1^\infty{}_m\frac{1+q'^{2m-1}e^{-\frac{u\pi}{\omega'}i}}{1+q'^{2m-1}}=\\
&=e^{\frac{\eta'}{\omega'}\frac{u^2}{2}}\prod_1^\infty{}_m\frac{1+2q'^{2m-1}\cos\frac{u\pi}{\omega'}+q'^{2(2m-1)}}{(1+q'^{2m-1})^2}.
\end{aligned}\right\}\quad(6)
$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\Theta_3(u)}{\Theta'(0)} &= e^{\frac{\eta}{\omega}\frac{u^2}{2}}\prod_1^\infty{}_n \frac{1-q^{2n-1}e^{-\frac{u\pi}{\omega}i}}{1-q^{2n-1}}\prod_1^\infty{}_n \frac{1-q^{2n-1}e^{\frac{u\pi}{\omega}i}}{1-q^{2n-1}} = \\ &= e^{\frac{\eta}{\omega}\frac{u^2}{2}}\prod_1^\infty{}_n \frac{1-2q^{2n-1}\cos\frac{u\pi}{\omega}+q^{2(2n-1)}}{(1-q^{2n-1})^2};\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

$$\left.\begin{aligned}&= e^{\frac{\eta'}{\omega'}\frac{u^2}{2}}\cos\left(\frac{u\pi}{2\omega'}\right)\prod_1^\infty{}_m \frac{1+q'^{2m}e^{\frac{u\pi}{\omega'}i}}{1+q'^{2m}}\prod_1^\infty{}_m \frac{1+q'^{2m}e^{-\frac{u\pi}{\omega'}i}}{1+q'^{2m}} = \\ &= e^{\frac{\eta'}{\omega'}\frac{u^2}{2}}\cos\left(\frac{u\pi}{2\omega'}\right)\prod_1^\infty{}_m \frac{1+2q'^{2m}\cos\frac{u\pi}{\omega'}+q'^{4m}}{(1+q'^{2m})^2}.\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

Вторыя формы этихъ разложенiй могутъ быть также легко получены и изъ формулъ (1)—(4) § 185. Такъ произведенiе, входящее въ первую изъ этихъ формулъ преобразуется слѣдующимъ образомъ:

$$\prod_1^\infty{}_n\left(1-\frac{\sin^2\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)}{\sin^2\left(\frac{2n\omega'}{2\omega}\pi\right)}\right) = \prod_1^\infty{}_n\left(1+\frac{4\sin^2\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)}{\left(e^{n\frac{\omega'}{\omega}\pi i}-e^{-n\frac{\omega'}{\omega}\pi i}\right)^2}\right) =$$

$$= \prod_1^\infty{}_n\left(1+\frac{4e^{2n\frac{\omega'}{\omega}\pi i}\sin^2\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)}{\left(e^{2n\frac{\omega'}{\omega}\pi i}-1\right)^2}\right) = \prod_1^\infty{}_n\left(1+\frac{2q^{2n}\left(1-\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)\right)}{(q^{2n}-1)^2}\right) =$$

$$= \prod_1^\infty{}_n \frac{1-2q^{2n}\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)+q^{4n}}{(1-q^{2n})^2}.$$

193. Формулы слѣдующаго §, 186, легко приводятся чрезъ введенiе въ нихъ величинъ q или q' къ слѣдующимъ:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{\wp(u)-e_1}&=\frac{\pi}{2\omega}\left\{\operatorname{cotg}\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)+4\sin\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)\sum_{1}^{\infty}{}_n\frac{(-1)^n q^{2n}}{1-2q^{2n}\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)+q^{4n}}\right\}=\\&=\frac{\pi}{2\omega'}\left\{\operatorname{cosec}\left(\frac{u\pi}{2\omega'}\right)+4\sin\left(\frac{u\pi}{2\omega'}\right)\sum_{1}^{\infty}{}_m\frac{q'^m(1+q'^{2m})}{1-2q'^{2m}\cos\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)+q'^{4m}}\right\};\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{\wp(u)-e_2}&=\frac{\pi}{2\omega}\left\{\operatorname{cosec}\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)+4\sin\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)\sum_{1}^{\infty}{}_n\frac{(-1)^n q^n(1+q^{2n})}{1-2q^{2n}\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)+q^{4n}}\right\}=\\&=\frac{\pi}{2\omega'}\left\{\operatorname{cosec}\left(\frac{u\pi}{2\omega'}\right)+4\sin\left(\frac{u\pi}{2\omega'}\right)\sum_{1}^{\infty}{}_m\frac{(-1)^m q'^m(1+q'^{2m})}{1-2q'^{2m}\cos\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)+q'^{4m}}\right\};\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{\wp(u)-e_3}&=\frac{\pi}{2\omega}\left\{\operatorname{cosec}\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)+4\sin\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)\sum_{1}^{\infty}{}_n\frac{q^n(1+q^{2n})}{1-2q^{2n}\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)+q^{4n}}\right\}=\\&=\frac{\pi}{2\omega'}\left\{\operatorname{cotg}\left(\frac{u\pi}{2\omega'}\right)+4\sin\left(\frac{u\pi}{2\omega'}\right)\sum_{1}^{\infty}{}_m\frac{(-1)^m q'^{2m}}{1-2q'^{2m}\cos\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)+q'^{4m}}\right\}.\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{\wp(u)-e_1}}=\\&=-\frac{1}{\sqrt{e_2-e_1}\cdot\sqrt{e_3-e_1}}\cdot\frac{\pi}{2\omega}\left\{\operatorname{tg}\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)+4\sin\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)\sum_{1}^{\infty}{}_n\frac{(-1)^n q^{2n}}{1+2q^{2n}\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)+q^{4n}}\right\}=\\&=\frac{1}{\sqrt{e_2-e_1}\cdot\sqrt{e_3-e_1}}\cdot\frac{2\pi}{\omega'}\sin\left(\frac{u\pi}{2\omega'}\right)\sum_{1}^{\infty}{}_m\frac{q'^{\frac{2m-1}{2}}(1+q'^{2m-1})}{1-2q'^{2m-1}\cos\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)+q'^{2(2m-1)}};\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{\wp(u)-e_2}}=\\&=\frac{1}{\sqrt{e_1-e_2}\cdot\sqrt{e_3-e_2}}\cdot\frac{2\pi i}{\omega}\sin\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)\sum_{1}^{\infty}{}_n\frac{(-1)^{n-1}q^{\frac{2n-1}{2}}(1-q^{2n-1})}{1+2q^{2n-1}\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)+q^{2(2n-1)}}=\\&=\frac{1}{\sqrt{e_1-e_2}\cdot\sqrt{e_3-e_2}}\cdot\frac{2\pi i}{\omega'}\sin\left(\frac{u\pi}{2\omega'}\right)\sum_{1}^{\infty}{}_m\frac{(-1)^{m-1}q'^{\frac{2m-1}{2}}(1-q'^{2m-1})}{1+2q'^{2m-1}\cos\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)+q'^{2m(2m-1)}};\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{\wp(u)-e_3}}=\\&=\frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}\cdot\sqrt{e_2-e_2}}\cdot\frac{2\pi}{\omega}\sin\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)\sum_{1}^{\infty}{}_n\frac{q^{\frac{2n-1}{2}}(1+q^{2n-1})}{1-2q^{2n-1}\cos\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)+q^{2(2n-1)}}=\\&=-\frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}\cdot\sqrt{e_2-e_3}}\cdot\frac{\pi}{2\omega'}\left\{\operatorname{tg}\left(\frac{u\pi}{2\omega'}\right)+4\sin\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)\sum_{1}^{\infty}{}_m\frac{(-1)^m q'^{2m}}{1+2q'^{2m}\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)+q'^{4m}}\right\}.\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sqrt{\wp(u)-e_3}}{\sqrt{\wp(u)-e_2}}&=-\frac{1}{\sqrt{e_2-e_1}}\cdot\frac{\pi i}{2\omega}\left\{1+2\sum_{1}^{\infty}{}_n(-1)^n\frac{q^{2n-1}\left(\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)+q^{2n-1}\right)}{1+2q^{2n-1}\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)+q^{2(2n-1)}}\right\}=\\&=\frac{1}{\sqrt{e_2-e_1}}\cdot\frac{2\pi}{\omega'}\cos\left(\frac{u\pi}{2\omega'}\right)\sum_{1}^{\infty}{}_m\frac{q'^{\frac{2m-1}{2}}(1+q'^{2m-1})}{1-2q'^{2m-1}\cos\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)+q'^{2(2m-1)}};\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sqrt{\wp(u)-e_2}}{\sqrt{\wp(u)-e_3}}&=-\frac{1}{\sqrt{e_3-e_1}}\cdot\frac{\pi i}{2\omega}\left\{1+2\sum_{1}^{\infty}{}_n(-1)^{n-1}\frac{q^{2n-1}\left(\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)-q^{2n-1}\right)}{1-2q^{2n-1}\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)+q^{2(2n-1)}}\right\}=\\&=\frac{1}{\sqrt{e_3-e_1}}\cdot\frac{2\pi}{\omega'}\cos\left(\frac{u\pi}{2\omega'}\right)\sum_{1}^{\infty}{}_m\frac{q'^m(1+q'^{2m})}{1+2q'^{2m}\cos\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)+q'^{4m}};\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sqrt{\wp(u)-e_3}}{\sqrt{\wp(u)-e_1}}&=\frac{1}{\sqrt{e_1-e_2}}\cdot\frac{\pi}{2\omega}\left\{\sec\left(\frac{u\pi}{2\pi}\right)+8\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)\sum_{1}^{\infty}{}_n\frac{(-1)^n q^{2n}}{1+2q^{2n}\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)+q^{4n}}\right\}=\\&=\frac{1}{\sqrt{e_1-e_2}}\cdot\frac{2\pi i}{\omega'}\cos\left(\frac{u\pi}{2\omega'}\right)\sum_{1}^{\infty}{}_m\frac{(-1)^{m-1}q'^{\frac{2m-1}{2}}(1-q'^{2m-1})}{1-2q'^{2m-1}\cos\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)+q'^{2(2m-1)}}\Bigg\};\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sqrt{\wp(u)-e_1}}{\sqrt{\wp(u)-e_2}}&=\frac{1}{\sqrt{e_3-e_1}}\cdot\frac{2\pi i}{\omega}\cos\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)\sum_{1}^{\infty}{}_n\frac{(-1)^{n-1}q^{\frac{2n-1}{2}}(1-q^{2n-1})}{1-2q^{2n-1}\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)+q^{2(2n-1)}}=\\&=\frac{1}{\sqrt{e_3-e_2}}\cdot\frac{\pi}{2\omega'}\left\{\sec\left(\frac{u\pi}{2\omega'}\right)+8\cos\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)\sum_{1}^{\infty}{}_m\frac{(-1)^m q'^{2m}}{1+2q'^{2m}\cos\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)+q'^{4m}}\right\};\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{\wp(u)-e_2}}{\sqrt{\wp(u)-e_1}} &= \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\cdot\frac{2\pi}{\omega}\cos\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)\sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{q^n(1+q^{2n})}{1+2q^{2n}\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)+q^{4n}} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\cdot\frac{\pi i}{2\omega'}\left\{1+2\sum_{1}^{\infty}{}_m \frac{(-1)^{m-1}q'^{2m-1}\left(\cos\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)-q'^{2m-1}\right)}{1-2q'^{2m-1}\cos\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)+q'^{2(2m-1)}}\right\};
\end{aligned}
\right\} \quad (11)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{\wp(u)-e_1}}{\sqrt{\wp(u)-e_2}} &= \frac{1}{\sqrt{e_2-e_3}}\cdot\frac{2\pi}{\omega}\cos\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)\sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{q^{\frac{2n-1}{2}}(1+q^{2n-1})}{1+2q^{2n-1}\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)+q^{2(2n-1)}} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{e_2-e_3}}\cdot\frac{\pi i}{2\omega'}\left\{1+2\sum_{1}^{\infty}{}_m \frac{(-1)^{m}q'^{2m-1}\left(\cos\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)+q'^{2m-1}\right)}{1+2q'^{2m-1}\cos\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)+q'^{2(2m-1)}}\right\}.
\end{aligned}
\right\} \quad (12)
$$

Формулы (1)—(3) § 187 легко приведутся къ такому виду:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\sqrt{\wp(u)-e_2}\cdot\sqrt{\wp(u)-e_3} = \\
&= \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\left\{\operatorname{cosec}^2\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)+8\sum_{1}^{\infty}{}_n(-1)^n\frac{q^{2n}\left(2q^{2n}-(1+q^{4n})\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)\right)}{\left(1-2q^{2n}\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)+q^{4n}\right)^2}\right\} = \\
&= \left(\frac{\pi}{2\omega'}\right)^2\left\{\frac{\cos\left(\frac{u\pi}{2\omega'}\right)}{\sin^2\left(\frac{u\pi}{2\omega'}\right)}+\cos\left(\frac{u\pi}{2\omega'}\right)\sum_{1}^{\infty}{}_m\frac{q'^m(1+q'^{2m})\left(4q'^{2m}\sin^2\left(\frac{u\pi}{2\omega'}\right)-(1-q'^{2m})^2\right)}{\left(1-2q'^{2m}\cos\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)+q'^{4m}\right)^2}\right\};
\end{aligned}
\right\} \quad (13)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\sqrt{\wp(u)-e_1}\cdot\sqrt{\wp(u)-e_3} = \\
&= \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\left\{\frac{\cos\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)}{\sin^2\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)}+\cos\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)\sum_{1}^{\infty}{}_n(-1)^n\frac{q^n(1+q^{2n})\left(4q^{2n}\sin^2\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)-(1-q^{2n})^2\right)}{\left(1-2q^{2n}\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)+q^{4n}\right)^2}\right\} = \\
&= \left(\frac{\pi}{2\omega'}\right)^2\left\{\frac{\cos\left(\frac{u\pi}{2\omega'}\right)}{\sin^2\left(\frac{u\pi}{2\omega'}\right)}+\cos\left(\frac{u\pi}{2\omega'}\right)\sum_{1}^{\infty}{}_m(-1)^m\frac{q'^m(1+q'^{2m})\left(4q'^{2m}\sin^2\left(\frac{u\pi}{2\omega'}\right)-(1-q'^{2m})^2\right)}{\left(1-2q^{2m}\cos\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)+q'^{4m}\right)^2}\right\};
\end{aligned}
\right\} \quad (14)
$$

$$\left.\begin{aligned}&\sqrt{\wp(u)-e_1}\cdot\sqrt{\wp(u)-e_2}=\\ &=\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\left\{\frac{\cos\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)}{\sin^2\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)}+\cos\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)\sum_{1}^{\infty}{}_n\frac{q^n(1+q^{2n})\left(4q^{2n}\sin^2\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)-(1-q^{2n})^2\right)}{\left(1-2q^{2n}\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)+q^{2n}\right)^2}\right\}=\\ &=\left(\frac{\pi}{2\omega'}\right)^2\left\{\operatorname{cosec}^2\left(\frac{u\pi}{2\omega'}\right)+8\sum_{1}^{\infty}{}_m(-1)^m\frac{q'^{2m}\left(2q'^{2m}-(1+q'^{4m})\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)\right)}{\left(1-2q'^{2m}\cos\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)+q'^{4m}\right)^2}\right\}.\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

Формулы (4)—(6) того же § легко приводятся къ слѣдующимъ:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{e_1-e_2}\cdot\sqrt{e_1-e_3}&=\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\left\{1+8\sum_{1}^{\infty}{}_n(-1)^n\frac{q^{2n}}{(1+q^{2n})^2}\right\}=\\ &=-\left(\frac{\pi}{2\omega'}\right)^2\cdot 4\sum_{1}^{\infty}{}_m\frac{q'^{\frac{2m-1}{2}}(1+q'^{2m-1})}{(1-q'^{2m-1})^2};\end{aligned}\right\}\quad(16)$$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{e_2-e_1}\cdot\sqrt{e_2-e_3}&=+\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 4i\sum_{1}^{\infty}{}_n(-1)^n\frac{q^{\frac{2n-1}{2}}(1-q^{2n-1})}{(1-q^{2n-1})}=\\ &=-\left(\frac{\pi}{2\omega'}\right)^2 4i\sum_{1}^{\infty}{}_m(-1)^m\frac{q'^{\frac{2m-1}{2}}(1-q'^{2m-1})}{(1+q'^{2m-1})^2};\end{aligned}\right\}\quad(17)$$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{e_3-e_1}\cdot\sqrt{e_3-e_2}&=-\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 4\sum_{1}^{\infty}{}_n\frac{q^{\frac{2n-1}{2}}(1+q^{2n-1})}{(1-q^{2n-1})^2}=\\ &=\left(\frac{\pi}{2\omega'}\right)^2\left\{1+8\sum_{1}^{\infty}{}_m(-1)^m\frac{q'^{2m}}{(1+q'^{2m})^2}\right\}.\end{aligned}\right\}\quad(18)$$

194. Переходя къ формуламъ § 188 и полагая

$$q=e^{-\frac{K'}{K}\pi};\qquad(1)$$

$$q'=e^{-\frac{K}{K'}\pi},\qquad(2)$$

мы легко дадимъ имъ слѣдующій видъ:

$$\left.\begin{aligned} \sin\operatorname{am}(v,k) &= \frac{1}{k}\frac{2\pi}{K}\sin\left(\frac{v\pi}{2K}\right)\sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{q^{\frac{2n-1}{2}}(1+q^{2n-1})}{1-2q^{2n-1}\cos\left(\frac{v\pi}{K}\right)+q^{2(2n-1)}} = \\ &= \frac{i}{k}\frac{\pi}{2K'}\left\{\operatorname{tg}\left(\frac{v\pi}{2K'}\right)+4\sin\left(\frac{v\pi}{2K'i}\right)\sum_{1}^{\infty}{}_m (-1)^m \frac{q'^{2m}}{1+2q'^{2m}\cos\left(\frac{v\pi}{K'i}\right)+q'^{4m}}\right\}; \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\operatorname{am}(v,k) &= -\frac{1}{k}\frac{2\pi}{K}\cos\left(\frac{v\pi}{2K}\right)\sum_{1}^{\infty}{}_n (-1)^n \frac{q^{\frac{2n-1}{2}}(1-q^{2n-1})}{1-2q^{2n-1}\cos\left(\frac{v\pi}{K}\right)+q^{2(2n-1)}} = \\ &= \frac{1}{k}\frac{\pi}{2K'}\left\{\sec\left(\frac{v\pi}{2K'i}\right)+4\cos\left(\frac{v\pi}{2K'i}\right)\sum_{1}^{\infty}{}_m (-1)^m \frac{q'^m(1+q'^{2m})}{1+2q'^{2m}\cos\left(\frac{v\pi}{K'i}\right)+q'^{4m}}\right\}; \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta\operatorname{am}(v,k) &= 1-\frac{4\pi}{K}\sin^2\left(\frac{v\pi}{2K}\right)\sum_{1}^{\infty}{}_n (-1)^n \frac{q^{2n-1}\left(\frac{1+q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}}\right)}{1-2q^{2n-1}\cos\left(\frac{v\pi}{K}\right)+q^{2(2n-1)}} = \\ &= \frac{\pi}{2K'}\left\{\sec\left(\frac{v\pi}{2K'i}\right)+4\cos\left(\frac{v\pi}{2K'i}\right)\sum_{1}^{\infty}{}_m \frac{q'^m(1+q'^{2m})}{1+2q'^{2m}\cos\left(\frac{v\pi}{K'i}\right)+q'^{4m}}\right\}. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Формулы (6) и (14) § 181, (6) и (15) § 182 по соединеніи вмѣстѣ членовъ, въ которыхъ $2n-1$, m разнятся знакомъ, и введеніи въ нихъ величинъ q и q' примутъ такой видъ:

$$k = 4\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 \sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{(1+q^{2n-1})q^{\frac{2n-1}{2}}}{(1-q^{2n-1})^2}; \quad (6)$$

$$k = 4\frac{\pi}{2K}\sum_{1}^{\infty}{}_n (-1)^{n-1}\frac{q^{\frac{2n-1}{2}}}{1-q^{2n-1}}; \quad (7)$$

$$k=\left(\frac{\pi}{2K'}\right)^2\left\{1+8\sum_1^\infty{}_n(-1)^m\frac{q'^{2m}}{(1+q'^{2m})^2}\right\}; \tag{8}$$

$$k=\frac{\pi}{2K'}\left\{1+4\sum_1^\infty{}_m(-1)^m\frac{q'^m}{1+q'^{2m}}\right\}; \tag{9}$$

формула (20) § 182 приметъ такой видъ:

$$K'=\frac{\pi}{2}\left\{1+4\sum_1^\infty{}_m\frac{q'^m}{1+q'^{2m}}\right\}. \tag{10}$$

Нѣкоторыя изъ этихъ формулъ, а также много новыхъ аналогичныхъ можно получить изъ формулъ (3), (4) и (5) этого §, приписывая v какое либо частное значеніе. Такъ, полагая въ первомъ изъ (3) по раздѣленіи на $v, v=0$ получимъ (6), полагая въ первомъ изъ (4) $v=0$, получимъ оттуда (7); полагая $v=K$ въ первомъ изъ (3) получимъ

$$k=\frac{2\pi}{K}\sum_1^\infty{}_n\frac{q^{\frac{2n-1}{2}}}{1+q^{2n-1}}; \tag{11}$$

полагая во второй изъ (4) $v=0$, получимъ (9); полагая во второй изъ (5) $v=0$, получимъ (10); полагая въ первой изъ (5) $v=K$ и имѣя въ виду что $\triangle\mathrm{am}(K,k)=k'$, мы получимъ:

$$k'=1-\frac{4\pi}{K}\sum_1^\infty{}_n(-1)^n\frac{q^{2n-1}}{1-q^{2(2n-1)}}. \tag{12}$$

Подобныхъ формулъ выведено много у Якоби и у Эннепера.

195. Полезныя формулы получимъ изъ формулъ § 192, полагая тамъ u равнымъ одному изъ полуперіодовъ. При этомъ нужно только подвергнуть преобразованію экспоненціальный множитель при помощи соотношеній (13), (14) и (15) § 95. Такимъ образомъ будемъ имѣть:

$$e^{\frac{1}{2}\frac{\eta\omega^2}{\omega}}=e^{\frac{1}{2}\eta\omega}; \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} e^{\frac{1}{2}\frac{\eta\omega''^2}{\omega}} &= e^{\frac{\omega''}{2\omega}(\eta\omega'')}=e^{\frac{\omega''}{2\omega}\left(\eta''\omega\pm\frac{\pi}{2}i\right)}=e^{\frac{1}{2}\eta''\omega''}\,e^{\pm\frac{\omega''}{\omega}\frac{\pi}{4}i}= \\ &= e^{\pm\frac{\pi}{4}i}\,e^{\frac{1}{2}\eta''\omega''}\,e^{\pm\frac{\omega'}{\omega}\frac{\pi}{4}i}=\sqrt{\pm i}\,e^{\frac{1}{2}\eta''\omega''}\,q^{\frac{1}{4}}; \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$e^{\frac{1}{2}\frac{\eta\omega'^2}{\omega}} = e^{\frac{1}{2}\frac{\omega'}{\omega}(\eta\omega')} = e^{\frac{1}{2}\frac{\omega'}{\omega}\left(\eta'\omega \pm \frac{\pi}{2}i\right)} = e^{\frac{1}{2}\eta'\omega'}\, q^{\frac{1}{4}}; \tag{3}$$

далѣе:

$$e^{\frac{1}{2}\frac{\eta'\omega^2}{\omega'}} = e^{\frac{1}{2}\frac{\omega}{\omega'}(\eta'\omega)} = e^{\frac{1}{2}\frac{\omega}{\omega'}\left(\eta\omega' \mp \frac{\pi}{2}i\right)} = e^{\frac{1}{2}\eta\omega}\, q'^{\frac{1}{4}}; \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} e^{\frac{1}{2}\frac{\eta'\omega''^2}{\omega'}} &= e^{\frac{1}{2}\frac{\omega''}{\omega'}(\eta'\omega'')} = e^{\frac{1}{2}\frac{\omega''}{\omega'}\left(\eta''\omega' \mp \frac{\pi}{2}i\right)} = e^{\frac{1}{2}\eta''\omega''}\, e^{\mp\frac{\omega''}{\omega'}\frac{\pi}{4}i} = \\ &= e^{\frac{1}{2}\eta''\omega''}\, e^{\mp\frac{\pi}{4}i}\, e^{\mp\frac{\omega}{\omega'}\frac{\pi}{4}i} = \sqrt{\mp i}\, e^{\frac{1}{2}\eta''\omega''}\, q'^{\frac{1}{4}}; \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$e^{\frac{1}{2}\frac{\eta'\omega'^2}{\omega'}} = e^{\frac{1}{2}\eta'\omega'} \tag{6}$$

Здѣсь верхній знакъ берется въ случаѣ $\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right) > 0$, нижній въ случаѣ $\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right) < 0$. Полагая въ (1) § 192 $u = \omega,\ \omega'',\ \omega'$ мы можемъ на основаніи только что выведенныхъ формулъ дать результатамъ такой видъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\Theta(\omega)}{\Theta'(0)} &= \frac{2\omega}{\pi}\, e^{\frac{1}{2}\eta\omega}\left(\prod_1^\infty{}_n \frac{1+q^{2n}}{1-q^{2n}}\right)^2 = \\ &= \mp\frac{\omega'}{\pi}\, i e^{\frac{1}{2}\eta\omega}\, q'^{-\frac{1}{4}}\left(\prod_1^\infty{}_m \frac{1-q'^{2m-1}}{1-q'^{2m}}\right)^2; \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\Theta(\omega'')}{\Theta'(0)} &= \frac{\omega}{\pi}\sqrt{\pm i}\, e^{\frac{1}{2}\eta''\omega''}\, q^{-\frac{1}{4}}\left(\prod_1^\infty{}_n \frac{1+q^{2n-1}}{1-q^{2n}}\right)^2 = \\ &= \frac{\omega'}{\pi}\sqrt{\mp i}\, e^{\frac{1}{2}\eta''\omega''}\, q'^{-\frac{1}{4}}\left(\prod_1^\infty{}_m \frac{1+q'^{2m-1}}{1-q'^{2m}}\right)^2; \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\Theta(\omega')}{\Theta'(0)} &= \pm\frac{\omega}{\pi}\, i e^{\frac{1}{2}\eta'\omega'} q^{-\frac{1}{2}}\left(\prod_{1}^{\infty}{}_n \frac{1-q^{2n-1}}{1-q^{2n}}\right)^2 = \\ &= \frac{2\omega'}{\pi} e^{\frac{1}{2}\eta'\omega'}\left(\prod_{1}^{\infty}{}_m \frac{1+q'^{2m}}{1-q'^{2m}}\right)^2 .\end{aligned}\right\}\quad (9)$$

Полагая въ слѣдующихъ затѣмъ формулахъ того же § $u =$ тѣмъ изъ полуперіодовъ, для которыхъ лѣвая часть не обращается въ нуль, при помощи формулъ (1)—(6) настоящаго § получимъ слѣдующій рядъ формулъ, [которыя впрочемъ могли бы быть выведены изъ только что полученныхъ на основаніи (4) § 103]:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\Theta_1(\omega'')}{\Theta'(0)} &= \frac{1}{2}\sqrt{\mp i}\, e^{\frac{1}{2}\eta''\omega''} q^{-\frac{1}{4}}\left(\prod_{1}^{\infty}{}_n \frac{1-q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}}\right)^2 = \\ &= 2\sqrt{\mp i}\, e^{\frac{1}{2}\eta''\omega''} q'^{\frac{1}{4}}\left(\prod_{1}^{\infty}{}_m \frac{1+q'^{2m}}{1-q'^{2m-1}}\right)^2 ;\end{aligned}\right\}\quad (10)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\Theta_1(\omega')}{\Theta'(0)} &= \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}\eta'\omega'} q^{-\frac{1}{4}}\left(\prod_{1}^{\infty}{}_n \frac{1+q^{2n-1}}{1+q^{2n}}\right)^2 = \\ &= e^{\frac{1}{2}\eta'\omega'}\left(\prod_{1}^{\infty}{}_m \frac{1+q'^{2m-1}}{1-q'^{2m-1}}\right)^2 ;\end{aligned}\right\}\quad (11)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\Theta_2(\omega)}{\Theta'(0)} &= e^{\frac{1}{2}\eta\omega}\left(\prod_{1}^{\infty}{}_n \frac{1-q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}}\right)^2 = \\ &= 2 e^{\frac{1}{2}\eta\omega} q'^{\frac{1}{4}}\left(\prod_{1}^{\infty}{}_m \frac{1+q'^{2m}}{1+q'^{2m-1}}\right)^2 ;\end{aligned}\right\}\quad (12)$$

*

$$\left.\begin{aligned}\frac{\Theta_2(\omega')}{\Theta'(0)} &= 2e^{\frac{1}{2}\eta'\omega'} q^{\frac{1}{4}}\left(\prod_1^\infty{}_n \frac{1+q^{2n}}{1+q^{2n-1}}\right)^2 = \\ &= e^{\frac{1}{2}\eta'\omega'}\left(\prod_1^\infty{}_m \frac{1-q'^{2m-1}}{1+q'^{2m-1}}\right)^2;\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\Theta_3(\omega)}{\Theta'(0)} &= e^{\frac{1}{2}\eta\omega}\left(\prod_1^\infty{}_n \frac{1+q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}}\right)^2 = \\ &= \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}\eta\omega} q'^{-\frac{1}{4}}\left(\prod_1^\infty{}_m \frac{1+q'^{2m-1}}{1+q'^{2m}}\right)^2;\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\Theta_3(\omega'')}{\Theta'(0)} &= 2\sqrt{\pm i}\, e^{\frac{1}{2}\eta''\omega''} q^{\frac{1}{4}}\left(\prod_1^\infty{}_n \frac{1+q^{2n}}{1-q^{2n-1}}\right)^2 = \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\pm i}\, e^{\frac{1}{2}\eta''\omega''} q'^{-\frac{1}{4}}\left(\prod_1^\infty{}_m \frac{1-q'^{2m-1}}{1+q'^{2m}}\right)^2.\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

По (2) § 104 имѣемъ:

$$\sqrt{e_1-e_2} = \frac{\Theta_2(\omega)}{\Theta(\omega)}; \quad \sqrt{e_1-e_3} = \frac{\Theta_3(\omega)}{\Theta(\omega)}; \quad \sqrt{e_2-e_3} = \frac{\Theta_3(\omega'')}{\Theta(\omega'')}; \quad (16)$$

съ помощію только-что полученныхъ формулъ (7)—(15) будемъ имѣть отсюда:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{e_1-e_2} &= \frac{\pi}{2\omega}\left(\prod_1^\infty{}_n \frac{(1-q^{2n-1})(1-q^{2n})}{(1+q^{2n-1})(1+q^{2n})}\right)^2 = \\ &= \pm\frac{2\pi i}{\omega'} q'^{\frac{1}{2}}\left(\prod_1^\infty{}_m \frac{(1+q'^{2m})(1-q'^{2m})}{(1+q'^{2m-1})(1-q'^{2m-1})}\right)^2;\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{e_1-e_3}&=\frac{\pi}{2\omega}\left(\prod_{1}^{\infty}{}_n\frac{(1+q^{2n-1})(1-q^{2n})}{(1-q^{2n-1})(1+q^{2n})}\right)^2=\\&=\pm\frac{\pi i}{2\omega'}\left(\prod_{1}^{\infty}{}_n\frac{(1+q'^{2m-1})(1-q'^{2m})}{(1-q'^{2m-1})(1+q'^{2m})}\right)^2;\end{aligned}\right\}\quad(18)$$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{e_2-e_3}&=\frac{2\pi}{\omega}q^{\frac{1}{2}}\left(\prod_{1}^{\infty}{}_n\frac{(1+q^{2n})(1-q^{2n})}{(1-q^{2n-1})(1+q^{2n-1})}\right)^2=\\&=\pm\frac{\pi i}{2\omega'}\left(\prod_{1}^{\infty}{}_n\frac{(1-q'^{2m-1})(1-q'^{2m})}{(1+q'^{2m})(1+q'^{2m-1})}\right)^2.\end{aligned}\right\}\quad(19)$$

Здѣсь въ виду безусловной сходимости этихъ безконечныхъ произведенiй мы дозволили себѣ перестановку множителей.

На основанiи (16) и (17) § 124, изъ которыхъ имѣемъ:

$$\sqrt{e_1-e_3}\,\omega=K,\qquad \sqrt{e_1-e_3}\,\omega'=K'i,\tag{20}$$

изъ (17) и (19) получимъ разложенiя величинъ K и K' въ безконечныя произведенiя, расположенныя по q, соотвѣтственно q'. Далѣе, такъ какъ по (9) и (10) § 123 имѣемъ:

$$k=\frac{\sqrt{e_2-e_3}}{\sqrt{e_1-e_3}};\qquad k'=\frac{\sqrt{e_1-e_2}}{\sqrt{e_1-e_3}},\tag{21}$$

то съ помощiю (17)—(19) найдемъ:

$$k=4q^{\frac{1}{2}}\prod_{1}^{\infty}{}_n\left(\frac{1+q^{2n}}{1+q^{2n-1}}\right)^4=\prod_{1}^{\infty}{}_m\left(\frac{1-q'^{2m-1}}{1+q'^{2m-1}}\right)^4;\tag{22}$$

$$k'=\prod_{1}^{\infty}{}_n\left(\frac{1-q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}}\right)^4=4q'^{\frac{1}{2}}\prod_{1}^{\infty}{}_m\left(\frac{1+q'^{2m}}{1+q'^{2m-1}}\right)^4.\tag{23}$$

ГЛАВА XII.

Разложенія Θ- и эллиптическихъ функцій въ тригонометрическіе ряды.

196. Еще въ § 36 было нами показано, что всегда можно постоянную c', отъ которой зависитъ эллиптическій интегралъ второго рода перваго типа, опредѣлить такъ, что одинъ изъ періодовъ этого интеграла будетъ $=0$. Въ § 83 мы нашли для періодовъ η и η' интеграловъ второго рода, разсматриваемаго какъ функція перемѣнной u, такія выраженія:

$$\left.\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{2}\int_{-\omega}^{+\omega}[c'-\wp(u)]du, \\ \eta' &= \frac{1}{2}\int_{-\omega'}^{+\omega'}[c'-\wp(u)]du, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

изъ которыхъ получимъ, обозначая чрезъ η_1 и η_1' величины ихъ для $c'=c_1$, и полагая $c'=c_1+c_2$, такія формулы:

$$\left.\begin{aligned} \eta &= \eta_1+c_2\omega\,; \\ \eta' &= \eta_1'+c_2\omega'. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Полагая здѣсь $\eta=0$, будемъ имѣть:

$$c_2=-\frac{\eta_1}{\omega}\,, \tag{3}$$

и слѣдовательно

$$\eta'=\eta_1'-\frac{\eta_1\omega'}{\omega}=\frac{\eta_1'\omega-\eta_1\omega'}{\omega}=\mp\frac{\pi}{2\omega}i\,, \tag{4}$$

— по теоремѣ Лежандра, гдѣ верхній знакъ относится къ случаю

$$\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right) > 0 \tag{5}$$

нижній къ случаю противному. Полагая $\eta' = 0$, будемъ имѣть:

$$c_2 = -\frac{\eta_1'}{\omega'}, \tag{6}$$

и слѣдовательно

$$\eta = \eta_1 - \frac{\eta_1'}{\omega'}\omega = \frac{\eta_1\omega' - \eta_1'\omega}{\omega'} = \pm\frac{\pi}{2\omega'}i, \tag{7}$$

гдѣ верхній знакъ берется въ случаѣ (5), нижній въ противоположномъ. [Такъ какъ перемѣняя знакъ, одинъ случай можно свести на другой, то ниже мы будемъ ограничиваться разсмотрѣніемъ только одного случая (5), и слѣдовательно въ (4) и (7) брать верхній знакъ]. Такимъ образомъ, когда c_2 будетъ опредѣляться формулою (3), періодами интеграла второго рода будутъ величины:

$$\eta = 0, \qquad \eta' = -\frac{\pi}{2\omega}i; \tag{8}$$

когда же c_2 будетъ опредѣляться формулою (6), то періодами интеграла второго рода будутъ величины:

$$\eta = \frac{\pi}{2\omega'}i; \qquad \eta' = 0. \tag{9}$$

Въ частности, если $c_1 = 0$, будутъ:

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 &= -\frac{1}{2}\int_{-\omega}^{+\omega}\wp(u)du, \\ \eta_1' &= -\frac{1}{2}\int_{-\omega'}^{+\omega'}\wp(u)du. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Это періоды Вейерштрассовской $\zeta(u)$.

197. Мы будемъ обозначать нечетную функцію $\Theta(u)$ въ случаѣ, когда c_2 опредѣляется формулою (4) пред. §, чрезъ $\theta(u)$; въ случаѣ— когда оно опредѣляется формулою (6), чрезъ $\vartheta(u)$. Тогда въ силу (8), соотвѣтственно (9) пред. §, функціональныя уравненія для первой функціи будутъ:

$$\left.\begin{aligned} \theta(u+2\omega) &= -\theta(u), \\ \theta(u+2\omega') &= -e^{-\frac{\pi i}{\omega}(u+\omega')}\theta(u); \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

для второй

$$\left.\begin{aligned} \vartheta(u+2\omega) &= -e^{\frac{\pi i}{\omega'}(u+\omega)}\vartheta(u), \\ \vartheta(u+2\omega') &= -\vartheta(u). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Между обѣими функціями существуетъ очень простая связь, которая легко получается на основаніи формулы (31) § 97, выражающей соотношеніе между двумя $\Theta(u)$, отвѣчающими различнымъ значеніямъ постоянныхъ C и c', которую мы такъ напишемъ:

$$\overline{\Theta}(u) = e^{gu^2+h}\Theta(u). \tag{3}$$

Здѣсь налѣво постоянной c' отвѣчаетъ $c'+2g=c''$, откуда

$$g = \frac{c''-c'}{2}. \tag{4}$$

Для функцій, удовлетворяющихъ уравненіямъ (1), будетъ

$$c' = c_1 - \frac{\eta_1}{\omega}; \tag{5}$$

для функцій, удовлетворяющихъ уравненіямъ (2), будетъ:

$$c'' = c_1 - \frac{\eta_1'}{\omega'}; \tag{6}$$

слѣдовательно

$$g = \frac{c''-c'}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\eta_1}{\omega} - \frac{\eta_1'}{\omega'}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\eta_1\omega' - \eta_1'\omega}{\omega\omega'} = \frac{\pi}{4\omega\omega'}i. \tag{7}$$

Постоянное h можно опредѣлить, полагая $u=0$ въ (3), представивъ его предварительно въ такомъ видѣ:

$$\frac{\overline{\Theta}(u)}{\Theta(u)}=e^{gu^2+h}; \tag{8}$$

тогда будемъ имѣть:

$$\frac{\overline{\Theta}'(0)}{\Theta'(0)}=e^{h}, \tag{9}$$

[ибо $\overline{\Theta}(0)=\Theta(0)=0$]. Вносся вмѣсто e^h его величину отсюда въ (3), и вводя относящіяся къ разсматриваемымъ Θ-функціямъ обозначенія, будемъ имѣть:

$$\frac{\vartheta(u)}{\vartheta'(0)}=e^{\frac{\pi i}{4\omega\omega'}u^2}\,\frac{\theta(u)}{\theta'(0)}. \tag{10}$$

Соотношенія между этими частными видами Θ-функцій и функціями $\sigma(u)$ получатся изъ (6) § 157 [имѣя въ виду (5) этого §], полагая тамъ по очереди

$$c'=-\frac{\eta_1}{\omega}, \tag{11}$$

$$c'=-\frac{\eta_1'}{\omega'}, \tag{12}$$

какъ то слѣдуетъ изъ (5) и (6) настоящаго §, гдѣ уже η_1 и η_1' относятся тоже къ гипотезѣ $c_1=0$, слѣдовательно опредѣляются формулами (9) и (10) пред. §,—и будутъ именно такія:

$$\frac{\theta(u)}{\theta'(0)}=e^{-\frac{\eta_1}{2\omega}u^2}\,\sigma(u), \tag{13}$$

$$\frac{\vartheta(u)}{\vartheta'(u)}=e^{-\frac{\eta_1'}{2\omega'}u^2}\,\sigma(u). \tag{14}$$

[Изъ нихъ первая согласна съ первою изъ (35) Halphen'а (T. I, p. 251), если только измѣнить обозначеніе и ввести въ θ аргументъ v вмѣсто u].

Изъ (7) § 157 для союзныхъ θ-функціи, соотвѣтственно ϑ-функціи, будемъ имѣть такія соотношенія съ союзными $\sigma(u)$:

$$\frac{\theta_i(u)}{\theta'(0)} = e^{-\frac{\eta_1}{2\omega}u^2}\,\sigma_i(u), \tag{15}$$

$$\frac{\vartheta_i(u)}{\vartheta'(0)} = e^{-\frac{\eta_1'}{2\omega'}u^2}\,\sigma_i(u). \tag{16}$$

Исключая отсюда $\sigma_i(u)$, получимъ такое соотношеніе между $\theta_i(u)$ и $\vartheta_i(u)$:

$$\frac{\theta_i(u)}{\theta'(0)}\,e^{\frac{\eta_1}{2\omega}u^2} = \frac{\vartheta_i(u)}{\vartheta'(0)}\,e^{\frac{\eta_1'}{2\omega'}u^2}, \tag{17}$$

что на основаніи (7) легко приводится къ такому:

$$\frac{\vartheta_i(u)}{\vartheta'(0)} = e^{\frac{\pi i}{4\omega\omega'}u^2}\,\frac{\theta_i(u)}{\theta'(0)}, \tag{18}$$

— одинаковому съ (10).

Эти функціи $\theta(u)$ и $\vartheta(u)$ съ ихъ союзными лишь нѣкоторыми постоянными множителями отличаются отъ тѣхъ, которыя разсматривалъ Якоби; онѣ представляютъ, какъ видимъ, наравнѣ съ $\sigma(u)$, частныя случаи общей Θ-функціи; а потому всѣ формулы и соотношенія, выведенныя въ главахъ VIII и IX, будутъ имѣть мѣсто и для нихъ. Читатель легко ихъ получитъ самъ, вводя вмѣсто η и η' ихъ значенія для соотвѣтственныхъ этимъ функціямъ значеній постоянной c'.

198. Обѣ функціи Якоби съ ихъ союзными суть одно-періодическія перваго рода, т. е. періодическія функціи въ обыкновенномъ смыслѣ, характера цѣлыхъ функцій; а потому по теоремѣ *Фурье* разлагаются въ рядъ по синусамъ и косинусамъ кратныхъ отъ u, или, что тоже, по цѣлымъ, положительнымъ и отрицательнымъ степенямъ отъ показательной функціи отъ u. Эти разложенія можно получить и съ помощію интегральнаго исчисленія, и по методу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ на основаніи функціональныхъ уравненій этихъ функцій [(1), соотвѣтственно (2) пред. §]. Мы употребимъ послѣдній пріемъ, начиная съ функцій $\theta(u)$.

Чтобы сразу получить и разложенія союзныхъ θ-функцій, мы возьмемъ $\theta(u-v)$; для этой уравненія (1) пред. § примутъ такой видъ:

$$\left.\begin{aligned} \theta(u-v+2\omega) &= -\theta(u-v)\,; \\ \theta(u-v+2\omega') &= -e^{-\frac{\pi i}{\omega}(u-v+\omega')}\theta(u-v) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Положимъ

$$\theta(u-v)=\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} A_m e^{m\frac{u\pi}{2\omega}i}\,; \qquad (2)$$

подставляя это разложеніе въ первое изъ (1), будемъ имѣть:

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}(-1)^m A_m e^{m\frac{u\pi}{2\omega}i} = -\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} A_m e^{m\frac{u\pi}{2\omega}i}\,;$$

отсюда видно, что при $m=2k$ должно быть $A_m=0$; слѣдовательно во (2) останутся лишь члены, въ которыхъ $m=2k+1$, такъ что будетъ:

$$\theta(u-v)=\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} A_{2k+1} e^{(2k+1)\frac{u\pi}{2\omega}i}. \qquad (3)$$

Внося это во второе изъ (1), и полагая согласно съ (1) § 189:

$$e^{\frac{\omega'}{\omega}\pi i}=q\,, \qquad (4)$$

мы будемъ имѣть послѣ подведенія внѣшняго множителя второй части подъ знакъ $\sum$:

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} A_{2k+1} q^{2k+1} e^{(2k+1)\frac{u\pi}{2\omega}i} = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} - A_{2k+1} q^{-1} e^{\frac{v\pi}{\omega}i} e^{[2(k-1)+1]\frac{u\pi}{2\omega}i}. \qquad (5)$$

Сравнивая коэффиціенты при $e^{(2k-1)\frac{u\pi}{2\omega}i}$ въ обѣихъ частяхъ равенства, будемъ имѣть:

$$A_{2k-1} q^{2k-1} = -A_{2k+1} q^{-1} e^{\frac{v\pi}{\omega}i}\,, \qquad (6)$$

откуда получимъ:

$$A_{2k+1} = -A_{2k-1} q^{2k} e^{-\frac{v\pi}{\omega}i}. \qquad (7)$$

Перемѣняя здѣсь k на $k-1$, затѣмъ на $k-2$, и т. д. до $k=1$ и перемножая полученныя равенства съ (7), будемъ имѣть по сокращеніи:

$$A_{2k+1}=(-1)^k A_1 q^{k(k+1)} e^{-k\frac{v\pi}{\omega}i}. \tag{8}$$

Внося это въ (3), будемъ имѣть:

$$\theta(u-v)=A_1\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}(-1)^k q^{k(k+1)} e^{-k\frac{v\pi i}{\omega}} e^{(2k+1)\frac{u\pi}{2\omega}i}. \tag{9}$$

Здѣсь A_1 произвольная постоянная, какъ и должно было ожидать, ибо функціональныя уравненія (1) опредѣляютъ функцію до постояннаго множителя. Мы можемъ слѣдовательно вмѣстѣ съ Якоби положить въ (9):

$$A_1=\frac{1}{i}\sqrt[4]{q}\,e^{-\frac{v\pi}{2\omega}i}=\frac{1}{i}q^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{v\pi}{2\omega}i}; \tag{10}$$

тогда, если подвести $q^{\frac{1}{4}}$ подъ знакъ суммы, разложеніе (9) приметъ такой видъ:

$$\theta(u-v)=\frac{e^{-\frac{v\pi i}{2\omega}}}{i}\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}(-1)^k q^{\left(\frac{2k+1}{2}\right)^2} e^{-k\frac{v\pi}{\omega}i} e^{(2k+1)\frac{u\pi}{2\omega}i}. \tag{11}$$

Полагая здѣсь $v=0$, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}\theta(u)&=\frac{1}{i}\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}(-1)^k q^{\left(\frac{2k+1}{2}\right)^2} e^{(2k+1)\frac{u\pi}{2\omega}i}=\\&=\frac{1}{i}e^{-\frac{u^2\pi}{4\omega\omega'}i}\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}(-1)^k e^{[u+(2k+1)\omega']^2\frac{\pi}{4\omega\omega'}i}=\\&=2\sum_{k=0}^{k=+\infty}(-1)^k q^{\left(\frac{2k+1}{2}\right)^2}\sin(2k+1)\frac{u\pi}{2\omega}.\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Здѣсь вторая формула получается изъ первой послѣ введенія вмѣсто q его значенія изъ (4) и преобразованія затѣмъ показателя въ полный квадратъ чрезъ прибавку къ нему $\frac{u^2}{4\omega\omega'}\pi i$, что и потребовало введенія $e^{-\frac{u^2\pi}{4\omega\omega'}}$ общимъ множителемъ суммы; третья форма получается изъ первой чрезъ соединеніе въ одинъ при помощи формулы Эйлера членовъ, содержащихъ $e^{(2k+1)\frac{u\pi}{2\omega}i}$ и $e^{-(2k+1)\frac{u\pi}{2\omega}i}$. — Ряды эти безусловно-сходящіеся, ибо рядъ модулей членовъ ихъ есть безусловно-сходящійся. Это достаточно показать для ряда (11), который можно такъ представить:

$$\theta(u-v)=\frac{1}{i}\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}(-1)^k q^{\left(\frac{2k+1}{2}\right)^2} e^{(2k+1)\frac{(u-v)\pi}{2\omega}i}. \tag{13}$$

Если теперь

$$\frac{u-v}{2\omega}\pi=x+yi, \tag{14}$$

то модуль общаго члена будетъ:

$$|q|^{\left(\frac{2k+1}{2}\right)^2}.e^{-(2k+1)y}, \tag{15}$$

и слѣдовательно корень $2k+1$-ой степени изъ него будетъ:

$$|q|^{\frac{2k+1}{4}}.e^{-y}; \tag{16}$$

но по (9) § 189 въ разсматриваемомъ случаѣ $\Re\left(\frac{\omega}{\omega' i}\right)>0$ будетъ $|q|<1$; слѣдовательно

$$\text{пред.}\,|q|^{\frac{2k+1}{4}}.e^{-y}\Big|_{k=\infty}=0, \tag{17}$$

а отсюда по извѣстному признаку сходимости рядовъ и слѣдуетъ сходимость ряда модулей членовъ ряда (13), слѣдовательно безусловная сходимость самого ряда (13).

199. Союзныя съ θ функціи опредѣляются такими равенствами по (3) § 98:

$$\theta_1(u) = -\frac{\theta'(0)\theta(u-\omega)e^{\eta u}}{\theta(\omega)} = -\frac{\theta'(0)\theta(u-\omega)}{\theta(\omega)}; \tag{1}$$

$$\theta_2(u) = -\frac{\theta'(0)\theta(u-\omega'')e^{\eta'' u}}{\theta(\omega'')} = -\frac{\theta'(0)\theta(u-\omega'')e^{-\frac{u\pi}{2\omega}i}}{\theta(\omega'')}; \tag{2}$$

$$\theta_3(u) = -\frac{\theta'(0)\theta(u-\omega')e^{\eta' u}}{\theta(\omega')} = -\frac{\theta'(0)\theta(u-\omega')e^{-\frac{u\pi}{2\omega}i}}{\theta(\omega')}; \tag{3}$$

ибо теперь $\eta = 0$, $\eta'' = \eta' = -\frac{\pi}{2\omega}i$ по (8) § 196; входящія сюда $\theta(u-\omega)$, $\theta(u-\omega'')$, $\theta(u-\omega')$ найдутся сразу либо изъ (13), либо изъ (9) пред. §, по подстановкѣ въ послѣднее вмѣсто A_1 его значенія изъ (10).

Полагая въ (13) $v = \omega$, по причинѣ того, что

$$e^{-\pi i} = -1, \quad e^{-(2k+1)\frac{\pi}{2}i} = (-1)^k \frac{1}{i}. \tag{4}$$

получимъ, умножая -1:

$$\left.\begin{aligned} -\theta(u-\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} q^{\left(\frac{2k+1}{2}\right)^2} e^{(2k+1)\frac{u\pi}{2\omega}i} = \\ &= e^{-\frac{u^2\pi}{4\omega\omega'}i} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} e^{[u+(2k+1)\omega']^2\frac{\pi}{4\omega\omega'}i} = \\ &= 2\sum_{k=0}^{k=+\infty} q^{\left(\frac{2k+1}{2}\right)^2} \cos(2k+1)\frac{u\pi}{2\omega}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

гдѣ вторая и третья формы разложенія выводятся изъ первой какъ въ пред. §. Полагая въ (9) пред. § по постановкѣ въ него значенія A_1 изъ (10) $v = \omega'' = \omega + \omega'$, и умножая на $-\sqrt[4]{q}\,e^{-\frac{u\pi}{2\omega}i}$, въ виду того, что

$$e^{-k\frac{\omega''}{\omega}\pi i} = e^{-k\pi i} \cdot e^{-k\frac{\omega'}{\omega}\pi i} = (-1)^k q^{-k}, \tag{6}$$

(что для $k=\frac{1}{2}$ приводится къ $-iq^{-\frac{1}{2}}$) мы получимъ:

$$\left.\begin{aligned} -\sqrt[4]{q}\, e^{-\frac{u\pi}{2\omega}i}\,\theta(u-\omega'') &= \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} q^{k^2} e^{2k\frac{u\pi}{2\omega}i} = \\ &= e^{-\frac{u^2\pi}{4\omega\omega'}i} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} e^{[u+2k\omega']^2 \frac{\pi}{4\omega\omega'}i} = \\ &= 1+2\sum_{k=1}^{k=+\infty} q^{k^2}\cos 2k\frac{u\pi}{2\omega}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Полагая тамъ же, т. е. въ (9) пред. §, $v=\omega'$ и умножая, обѣ части равенства на $i\sqrt[4]{q}\, e^{-\frac{u\pi}{2\omega}i}$, въ виду того что

$$e^{-k\frac{\omega'}{\omega}\pi i} = q^{-k}, \tag{8}$$

мы получимъ:

$$\left.\begin{aligned} i\sqrt[4]{q}\, e^{-\frac{u\pi}{2\omega}i}\,\theta(u-\omega') &= \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} (-1)^k q^{k^2} e^{2k\frac{u\pi}{2\omega}i} = \\ &= e^{-\frac{u^2\pi}{4\omega\omega'}i} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} (-1)^k e^{[u+2k\omega']^2 \frac{\pi}{4\omega\omega'}i} = \\ &= 1+2\sum_{k=1}^{k=+\infty} (-1)^k q^{k^2}\cos 2k\frac{u\pi}{2\omega}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Вторыя и третія формы выводятся изъ первой совершенно также, какъ и выше.

Ряды (12) пред. §, и (5), (7) и (9) настоящаго § Якоби (Gesam. Werke, Bd. I p. 501) обозначаетъ по порядку такимъ образомъ:

$$\vartheta_1(v,q),\quad \vartheta_2(v,q),\quad \vartheta_3(v,q)\quad \text{и}\ \vartheta(v,q), \tag{10}$$

гдѣ по Вейерштрассу положено:

$$v=\frac{u}{2\omega}, \tag{11}$$

такъ что между нашими функціями $\theta(u)$, $\theta_1(u)$, $\theta_2(u)$ и $\theta_3(u)$ и Якобіевскими въ силу (12) пред. § и (1), (2) и (3) наст. § существуютъ такія соотношенія:

$$\left.\begin{aligned}
\theta(u)&=\vartheta_1(v,q);\\
\frac{\theta(\omega)}{\theta'(0)}\,\theta_1(u)&=\vartheta_2(v,q);\\
\sqrt[4]{q}\,\frac{\theta(\omega'')}{\theta'(0)}\,\theta_2(u)&=\vartheta_3(v,q);\\
-i\sqrt[4]{q}\,\frac{\overline{\theta}(\omega')}{\theta'(0)}\,\theta_3(u)&=\vartheta(v,q).
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

200. Входящія сюда значенія $\theta(u)$ при u равномъ одному изъ полуперіодовъ найдутся изъ (5), (7) и (9) пред. §, полагая тамъ $u=0$, и имѣя въ виду нечетность функціи $\theta(u)$, и будутъ слѣдующія (ограничиваемся третьей формою):

$$\left.\begin{aligned}
\theta(\omega)&=2\sum_{k=0}^{k=\infty} q^{\left(\frac{2k+1}{2}\right)^2};\\
\theta(\omega'')&=\frac{1}{\sqrt[4]{q}}\left\{1+2\sum_{k=1}^{k=\infty} q^{k^2}\right\};\\
\theta(\omega')&=\frac{i}{\sqrt[4]{q}}\left\{1+2\sum_{k=1}^{k=\infty}(-1)^k q^{k^2}\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Дифференцируя (12) § 198, найдемъ, полагая $u=0$, и значеніе $\theta'(0)$, именно:

$$\theta'(0)=2\sum_{k=0}^{k=\infty}(-1)^k q^{\left(\frac{2k+1}{2}\right)^2}(2k+1). \tag{2}$$

Послѣдній рядъ будетъ тоже сходящійся, ибо пред. $\sqrt[2k+1]{2k+1}\Big|_{k=\infty}$ есть конечная величина, такъ какъ $\sqrt[2k+1]{2k+1}=(1+2k)^{\frac{1}{2k+1}}<(1+2k)^{\frac{1}{2k}}$, а предѣлъ послѣдней при $k=\infty$ есть число $e=2{,}71828182856\ldots\ldots$ Разложенія тѣхъ же величинъ въ безконечныя произведенія получатся чрезъ примѣненіе формулъ (7), (8) и (9) § 195 къ разсматриваемому спеціальному виду Θ-функцій.

201. Отмѣтимъ формулы перехода одной изъ Якобіевыхъ $\vartheta(v,q)$, $\vartheta_i(v,q)$ въ другую. Изъ (12) § 198 и (5) (7) и (9) § 199 въ виду (12) того же § получаемъ:

$$\left.\begin{aligned} -\vartheta_1\left(v-\frac{1}{2},q\right)&=\vartheta_2(v,q);\\ -\sqrt[4]{q}\,e^{-vi}\vartheta_1\left(v-\frac{1}{2}-\frac{\tau}{2},q\right)&=\vartheta_3(v,q);\\ i\sqrt[4]{q}\,e^{-vi}\vartheta_1\left(v-\frac{\tau}{2},q\right)&=\vartheta(v,q).\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Теперь, такъ какъ измѣненіямъ u на 2ω и $2\omega'$ отвѣчаютъ измѣненія v на 1 и на $\tau=\frac{\omega'}{\omega}$, то функціональныя уравненія для $\vartheta_1(v,q)$ примутъ такой видъ:

$$\left.\begin{aligned}\vartheta_1(v+1,q)&=-\vartheta_1(v,q)\\ \vartheta_1(v+\tau,q)&=-\frac{1}{q}e^{-2v\pi i}\vartheta_1(v,q);\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

далѣе перемѣняя въ послѣднемъ v на $v+1$ и имѣя въ виду первое и то, что $e^{-2\pi i}=1$, мы будемъ имѣть еще:

$$\vartheta_1(v+1+\tau)=\frac{1}{q}e^{-2v\pi i}\vartheta_1(v,q).\qquad(3)$$

Перемѣняя въ первомъ изъ (2) v на $v-\frac{1}{2}$, во второмъ v на $v-\frac{\tau}{2}$ и умножая на $e^{v\pi i}$, наконецъ въ (3) перемѣняя v на $v-\frac{1}{2}-\frac{\tau}{2}$ и умножая на $e^{v\pi i}$, легко получимъ:

$$\left.\begin{aligned}
\vartheta_1\left(v+\frac{1}{2},q\right)&=-\vartheta_1\left(v-\frac{1}{2}\right),\\
\vartheta_1\left(v+\frac{\tau}{2},q\right)e^{v\pi i}&=-e^{-v\pi i}\vartheta_1\left(v-\frac{\tau}{2},q\right),\\
-\vartheta_1\left(v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2},q\right)e^{v\pi i}&=+e^{-v\pi i}\vartheta_1\left(v-\frac{1}{2}-\frac{\tau}{2},q\right);
\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

на основаніи этихъ формулъ, формулы (1) примутъ такой видъ:

$$\left.\begin{aligned}
\vartheta_1\left(v+\frac{1}{2},q\right)&=\vartheta_2(v,q);\\
\sqrt[4]{q}\,e^{v\pi i}\vartheta_1\left(v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2},q\right)&=\vartheta_3(v,q);\\
-i\sqrt[4]{q}\,e^{v\pi i}\vartheta_1\left(v+\frac{\tau}{2},q\right)&=\vartheta(v,q).
\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

Эти формулы даютъ выраженія прочихъ Якобіевскихъ функцій чрезъ $\vartheta_1(v,q)$. Отсюда легко получимъ слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned}
\vartheta_1\left(v+\frac{1}{2},q\right)&=\vartheta_2(v,q),\\
\vartheta_1\left(v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2},q\right)&=\frac{1}{\sqrt[4]{q}}e^{-v\pi i}\vartheta_3(v,q),\\
\vartheta_1\left(v+\frac{\tau}{2},q\right)&=\frac{i}{\sqrt[4]{q}}e^{-v\pi i}\vartheta(v,q);
\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

которыя показываютъ переходъ $\vartheta_1(v,q)$ въ прочія при измѣненіи аргумента на $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}$, т. е. на половины періодовъ. При помощи (5) и (6) легко получить аналогичныя формулы для каждой изъ Якобіевскихъ функцій, именно:

$$\left.\begin{aligned}
\vartheta_2\left(v+\frac{1}{2},q\right)&=-\vartheta_1(v,q);\\
\vartheta_2\left(v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2},q\right)&=-\frac{i}{\sqrt[4]{q}}e^{-v\pi i}\vartheta(v,q);\\
\vartheta_2\left(v+\frac{\tau}{2},q\right)&=\frac{1}{\sqrt[4]{q}}e^{-v\pi i}\vartheta_3(v,q).
\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\vartheta_3\left(v+\frac{1}{2},q\right)=\vartheta(v,q);\\
&\vartheta_3\left(v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2},q\right)=\frac{i}{\sqrt[4]{q}}e^{-v\pi i}\vartheta_1(v,q);\\
&\vartheta_3\left(v+\frac{\tau}{2},q\right)=\frac{1}{\sqrt[4]{q}}e^{-v\pi i}\vartheta_2(v,q).
\end{aligned}\right\}\qquad(8)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\vartheta\left(v+\frac{1}{2},q\right)=\vartheta_3(v,q);\\
&\vartheta\left(v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2},q\right)=\frac{1}{\sqrt[4]{q}}e^{-v\pi i}\vartheta_2(v,q);\\
&\vartheta\left(v+\frac{\tau}{2},q\right)=\frac{i}{\sqrt[4]{q}}e^{-v\pi i}\vartheta_1(v,q).
\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

202. Разложенія функціи $\vartheta(u)$, опредѣляемой уравненіями (2) § 197, и ея союзныхъ могутъ быть получены изъ предыдущихъ чрезъ перемѣну ω на ω' и ω' на $-\omega$, какъ то видно изъ сказаннаго въ § 189 [формулы (1) и (2), (7), (8) и (9)]: дѣйствительно, векторъ, представляющій $-\omega$, будемъ имѣть такое же положеніе относительно вектора, представляющаго ω', какъ этотъ послѣдній имѣетъ относительно вектора, представляющаго ω. Упомянутыя функціональныя уравненія (2) § 197 можно такъ представить:

$$\left.\begin{aligned}
&\vartheta(u+2\omega)=-\frac{1}{q'}e^{\frac{u\pi}{\omega'}i}\vartheta(u);\\
&\vartheta(u+2\omega')=-\vartheta(u);
\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

отсюда, перемѣняя въ первомъ u на $u-\omega$, легко найдемъ:

$$\vartheta(u+\omega)=-e^{\frac{u\pi}{\omega'}i}\vartheta(u-\omega);\qquad(2)$$

перемѣняя здѣсь u на $u-\omega'$, и помня что $\omega+\omega'=\omega''$, получимъ

$$\vartheta(u-\omega'+\omega)=e^{\frac{u\pi}{\omega'}i}\vartheta(u-\omega'').\qquad(3)$$

*

Перемѣняя теперь въ (12) § 198, въ (5), (7) и (9) § 199 ω на ω' и ω' на $-\omega$, и имѣя въ виду (2) и (3), а также (2) § 197, мы получимъ слѣдующія формулы:

$$\left.\begin{aligned} \vartheta(u) &= \frac{1}{i}\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}(-1)^k q'^{\left(\frac{2k+1}{2}\right)^2} e^{(2k+1)\frac{u\pi}{\omega'}i} = \\ &= \frac{1}{i}\, e^{\frac{u^2\pi}{4\omega\omega'}i}\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}(-1)^k e^{-[u-(2k+1)\omega]^2\frac{\pi}{4\omega\omega'}i} = \\ &= 2\sum_{k=0}^{k=\infty}(-1)^k q'^{\left(\frac{2k+1}{2}\right)^2}\sin(2k+1)\frac{u\pi}{2\omega'}; \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

$$\left.\begin{aligned} -i\sqrt[4]{q'}\, e^{\frac{u\pi}{2\omega'}i}\,\vartheta(u-\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}(-1)^k q'^{k^2} e^{2k\frac{u\pi}{2\omega'}i} = \\ &= e^{\frac{u^2\pi}{4\omega\omega'}i}\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}(-1)^k e^{-[u-2k\omega]^2\frac{\pi}{4\omega\omega'}i} = \\ &= 1+2\sum_{k=1}^{k=\infty}(-1)^k q'^{k^2}\cos 2k\frac{u\pi}{2\omega'}; \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} -i\sqrt[4]{q'}\, e^{\frac{u\pi}{2\omega'}i}\,\vartheta(u-\omega'') &= \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} q'^{k^2} e^{2k\frac{u\pi}{2\omega'}i} = \\ &= e^{\frac{u^2\pi}{4\omega\omega'}i}\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} e^{-[u-2k\omega]^2\frac{\pi}{4\omega\omega'}i} = \\ &= 1+2\sum_{k=1}^{k=+\infty} q'^{k^2}\cos 2k\frac{u\pi}{2\omega'}. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

$$\left.\begin{aligned}
-\vartheta(u-\omega'') &= \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} q'^{\left(\frac{2k+1}{2}\right)^2} e^{(2k+1)\frac{u\pi}{2\omega'}i} = \\
&= e^{\frac{u^2\pi}{4\omega\omega'}i} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} e^{-[u-(2k+1)\omega]^2\frac{\pi}{4\omega\omega'}i} = \\
&= 2\sum_{k=0}^{k=+\infty} q'^{\left(\frac{2k+1}{2}\right)^2} \cos(2k+)\frac{u\pi}{2\omega'}.
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Эти функціи Бріо и Букэ обозначаютъ попорядку чрезъ $-\vartheta_1(u)$, $\vartheta_2(u)$, $\vartheta_3(u)$, $\vartheta(u)$. (Théorie des fonctions elliptiques. 4⁰. Paris 1875, p. 264—267). Послѣднія три выразятся чрезъ первую, слѣдовательно, такими формулами:

$$\left.\begin{aligned}
i\sqrt[4]{q'}\,e^{\frac{u\pi}{2\omega'}i}\,\vartheta_1(u-\omega) &= \vartheta_2(u);\\
\sqrt[4]{q'}\,e^{\frac{u\pi}{2\omega'}i}\,\vartheta_1(u-\omega'') &= \vartheta_3(u);\\
\vartheta_1(u-\omega') &= \vartheta(u).
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

При помощи (1) (гдѣ вмѣсто ϑ слѣдуетъ написать теперь ϑ_1) этимъ равенствамъ можно дать такой видъ:

$$\left.\begin{aligned}
-i\sqrt[4]{q'}\,e^{-\frac{u\pi}{2\omega'}i}\,\vartheta_1(u+\omega) &= \vartheta_2(u);\\
-\sqrt[4]{q'}\,e^{-\frac{u\pi}{2\omega'}i}\,\vartheta_1(u+\omega'') &= \vartheta_3(u);\\
-\vartheta_1(u+\omega') &= \vartheta(u),
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

откуда получимъ такія формулы:

$$\left.\begin{aligned}
\vartheta_1(u+\omega) &= \frac{i}{\sqrt[4]{q'}}\,e^{\frac{u\pi}{2\omega'}i}\,\vartheta_2(u);\\
\vartheta_1(u+\omega'') &= -\frac{1}{\sqrt[4]{q'}}\,e^{\frac{u\pi}{2\omega'}i}\,\vartheta_3(u);\\
\vartheta_1(u+\omega') &= -\vartheta(u),
\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

показывающія переходъ $\vartheta_1(u)$ въ другія при измѣненіи аргумента на полуперіоды. Легко получить отсюда аналогичныя формулы для каждой изъ прочихъ функцій подобно тому, какъ то было сдѣлано въ § 201 для Якобіевыхъ функцій.

203. Изъ вторыхъ формъ разложеній въ ряды $\vartheta_2(v,q)$ и $\vartheta_3(v,q)$ [формулы (5) и (7) § 199], именно:

$$\vartheta_2\left(\frac{u}{2\omega}, q\right) = e^{-\frac{u^2\pi i}{4\omega\omega'}} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} e^{[u+(2k+1)\omega]^2 \frac{\pi i}{4\omega\omega'}}, \tag{1}$$

$$\vartheta_3\left(\frac{u}{2\omega}, q\right) = e^{-\frac{u^2\pi i}{4\omega\omega'}} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} e^{[u+2k\omega']^2 \frac{\pi i}{4\omega\omega'}}, \tag{2}$$

Якоби вывелъ фундаментальнаго значенія въ его второй теоріи эллиптическихъ функцій *) соотношеніе между значеніями этихъ функцій для четырехъ различныхъ значеній аргумента. Обозначимъ эти значенія чрезъ u_1, u_2, u_3, u_4; вставимъ ихъ по очереди въ каждую изъ этихъ функцій и перемножимъ полученныя для каждой изъ нихъ равенства между собою, а затѣмъ сложимъ эти произведенія; получимъ:

$$\prod_{j=1}^{j=4} \vartheta_2\left(\frac{u_j}{2\omega}, q\right) + \prod_{j=1}^{j=4} \vartheta_3\left(\frac{u_j}{2\omega}, q\right) = e^{-\sum\limits_{j=1}^{j=4} \frac{u_j^2\pi i}{4\omega\omega'}} \sum_{m_1, m_2, m_3, m_4 \atop -\infty}^{+\infty \;(4)} e^{\sum\limits_{j=1}^{j=4} [u+m_j\omega']^2 \frac{\pi i}{4\omega\omega'}}, \tag{3}$$

гдѣ $\sum\limits_{m_1, m_2, m_3, m_4 \atop -\infty}^{+\infty \;(4)}$ обозначаетъ четверную сумму, взятую по всѣмъ значеніямъ каждого изъ m_1, m_2, m_3 и m_4 отъ $-\infty$ до $+\infty$, причемъ въ однихъ слагаемыхъ, происшедшихъ отъ перваго члена лѣвой части всѣ они нечетныя: $m_j = 2k_j + 1$, — въ другихъ, происшедшихъ отъ второго члена, четныя: $m_j = 2k_j$.

Положимъ теперь:

*) *C. G. J. Jacobi.* Gesammelte Werke, Berlin 1883. Anhang: Theorie der elliptischen Functionen, aus der Eigenschaften der Thetareihen abgeleitet. Bd. I. S. 499.

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{2}(u_1+u_2+u_3+u_4)&=v_1,\\
\frac{1}{2}(u_1+u_2-u_3-u_4)&=v_2,\\
\frac{1}{2}(u_1-u_2+u_3-u_4)&=v_3,\\
\frac{1}{2}(u_1-u_2-u_3+u_4)&=v_4,
\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

и точно также:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{2}(m_1+m_2+m_3+m_4)&=n_1,\\
\frac{1}{2}(m_1+m_2-m_3-m_4)&=n_2,\\
\frac{1}{2}(m_1-m_2+m_3-m_4)&=n_3,\\
\frac{1}{2}(m_1-m_2-m_3+m_4)&=n_4.
\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

Изъ (4) легко находимъ, что

$$\sum_{i=1}^{i=4} u_i^2=\sum_{i=1}^{i=4} v_i^2,\tag{6}$$

вслѣдствіе чего внѣшній множитель въ (3) сохранитъ свой видъ послѣ введенія перемѣнныхъ v_i вмѣсто u_i съ помощію равенствъ (4). Далѣе изъ (5) легко находимъ:

$$\left.\begin{aligned}
m_1&=\frac{1}{2}(n_1+n_2+n_3+n_4),\\
m_2&=\frac{1}{2}(n_1+n_2-n_3-n_4),\\
m_3&=\frac{1}{2}(n_1-n_2+n_3-n_4),\\
m_4&=\frac{1}{2}(n_1-n_2-n_3+n_4),
\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

т. е., что формулы (5) [а равно и (4)] обратимы. Далѣе изъ (5), складывая каждое изъ равенствъ по очереди съ первымъ, получимъ еще:

$$\left.\begin{aligned} m_1+m_2&=n_1+n_2\,,\\ m_1+m_3&=n_1+n_3\,,\\ m_1+m_4&=n_1+n_4\,. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Помножая же каждое изъ (5) на ω' и складывая съ соотвѣтственнымъ изъ (1), по возвышенiи каждаго полученнаго равенства въ квадратъ и сложенiи, получимъ:

$$\sum_{j=1}^{j=4}(u_j+m_j\omega')^2=\sum_{j=1}^{j=4}(v_j+n_j\omega')^2\,, \tag{9}$$

откуда будетъ слѣдовать, что и каждый членъ четверной суммы сохранитъ свой видъ по выполненiи подстановокъ (4) и (5). Далѣе, такъ какъ всѣ m_j цѣлыя числа, всѣ заразъ четныя, или же всѣ заразъ нечетныя, то изъ (5) слѣдуетъ, что всѣ n_j суть цѣлыя числа, а изъ (8), гдѣ лѣвыя части четныя числа, — что они всѣ одинаковой четности съ n_1, слѣдовательно тоже либо всѣ четныя, либо всѣ нечетныя. Если теперь m_1, m_2, m_3, m_4 будутъ получать всѣ системы четныхъ, или нечетныхъ значенiй, и притомъ каждую одинъ разъ и безъ пропусковъ, то по обратимости формулъ (5) и n_1, n_2, n_3, n_4 будутъ получать всѣ системы четныхъ или нечетныхъ значенiй, при томъ каждую одинъ разъ и безъ пропусковъ.

Слѣдовательно будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} &e^{-\sum\limits_{j=1}^{j=4}\frac{u_j^2\pi i}{4\omega\omega'}}\sum_{m_1,m_2,m_3,m_4\,-\infty}^{+\infty\;(4)} e^{\sum\limits_{j=1}^{j=4}[u_j+m_j\omega']^2\frac{\pi i}{4\omega\omega'}}=\\ &=e^{-\sum\limits_{j=1}^{j=4}\frac{v_j^2\pi i}{4\omega\omega'}}\sum_{n_1,n_2,n_3,n_4\,-\infty}^{+\infty\;(4)} e^{\sum\limits_{j=1}^{j=4}[v_j+n_j\omega']^2\frac{\pi i}{4\omega\omega'}}\,, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

т. е. правая часть (3) сохранитъ свой видъ послѣ линейной подстановки (4), иначе—обладаетъ инварiантнымъ свойствомъ по отношенiю къ этой подстановкѣ, а слѣдовательно тоже будетъ и съ лѣвою, т. е. будетъ:

$$\prod_{j=1}^{j=4}\vartheta_2\!\left(\frac{u_j}{2\omega},q\right)+\prod_{j=1}^{j=4}\vartheta_3\!\left(\frac{u_j}{2\omega},q\right)=\prod_{j=1}^{j=4}\vartheta_2\!\left(\frac{v_j}{2\omega},q\right)+\prod_{j=1}^{j=4}\vartheta_3\!\left(\frac{v_j}{2\omega},q\right). \tag{11}$$

Эта формула служила *Якоби* исходнымъ пунктомъ, изъ котораго онъ въ своихъ лекціяхъ 1836 и 1838 годовъ выводилъ всю теорію эллиптическихъ функцій. Лекціи его 1838 года записаны и изданы *Борхардтомъ* въ I томѣ втораго изданія его сочиненій (см. пред. цитату); лекціи 1836 года, болѣе подробныя (содержатъ между прочимъ также начала теоріи гиперэллиптическихъ интеграловъ), составлены *Розенгайномъ*, извѣстнымъ ученикомъ Якоби, какъ о томъ я лично слышалъ отъ моего отца, а также и отъ Кронекера. Къ лекціямъ Якоби *) мы и отсылаемъ читателей, желающихъ познакомиться со всѣми главными слѣдствіями этой формулы (11).—Изъ этой формулы можно получить аналогичныя для общей Θ-функціи и ея союзныхъ, пользуясь ихъ связью съ Якобіевыми Θ-функціями.

204. Для одного частнаго вида ихъ, именно σ-функцій и ея союзныхъ, много формулъ читатель найдетъ у Шварца въ „Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Herrn Weierstrass bearbeitet und herausgegeben von *H. A. Schwartz*. Göttingen 1883, стр. 47 и слѣдующія. Вейерштрассу исходнымъ пунктомъ служитъ однако другое тождество, именно:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma(u+u_1)\sigma(u-u_1)\sigma(u_2+u_3)\sigma(u_2-u_3)+\\ &+\sigma(u+u_2)\sigma(u-u_2)\sigma(u_3+u_1)\sigma(u_3-u_1)+\\ &+\sigma(u+u_3)\sigma(u-u_3)\sigma(u_1+u_2)\sigma(u_1-u_2)=0.\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Это тождество получается имъ при помощи формулы

$$\wp(u)-\wp(v)=\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{[\sigma(u)]^2[\sigma(v)]^2}, \qquad (2)$$

[представляющей частный случай (1) § 88, когда именно $\Theta(u)$ переходитъ въ $\sigma(u)$], изъ тождества:

$$\left.\begin{aligned} &[\wp(u)-\wp(u_1)][\wp(u_2)-\wp(u_3)]+[\wp(u)-\wp(u_2)][\wp(u_3)-\wp(u_1)]+\\ &\qquad+[\wp(u)-\wp(u_3)][\wp(u_1)-\wp(u_2)]=0,\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

представляющаго разложеніе опредѣлителя

*) А также къ „Теоріи Якобіевыхъ функцій и эллиптическихъ функцій и интеграловъ“. *I. Больцани*. Казань 1857 г. (см. Извѣстія Казан. Унив.).

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \wp(u) & \wp(u) & \wp(u) \\ \wp(u_1) & \wp(u_2) & \wp(u_3) \end{vmatrix} \qquad (4)$$

тождественно равнаго нулю, [ибо элементы второй строки пропорціональны элементамъ первой],—разложеніе по элементамъ второй строки послѣ вычитанія изъ нихъ соотвѣтственныхъ элементовъ третьей. Этимъ же самымъ способомъ, при помощи (1) § 88, получается сразу соотношеніе аналогичное (1) для общей Θ-функціи:

$$\left.\begin{aligned} &\Theta(u+u_1)\,\Theta(u-u_1)\,\Theta(u_2+u_3)\,\Theta(u_2-u_3)+\\ &+\Theta(u+u_2)\,\Theta(u-u_2)\,\Theta(u_3+u_1)\,\Theta(u_3-u_1)+\\ &+\Theta(u+u_3)\,\Theta(u-u_3)\,\Theta(u_1+u_2)\,\Theta(u_1-u_2)=0\,, \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

откуда получатся, какъ у Вейерштрасса, слѣдствія, аналогичныя находящимся у Шварца. Этотъ способъ очень простъ, но не элементаренъ, ибо основанъ на соотношеніи между функціями $\wp(u)$ и $\Theta(u)$, тогда какъ Якоби элементарнымъ путемъ получилъ свое основное тождество, прямо изъ опредѣленія функцій рядами (1) и (2) пред. §. Изъ тождества Якоби получается Вейерштрассовское, если одному изъ аргументовъ дать значеніе, обращающее одну изъ $\vartheta_2(v,q)$ и $\vartheta_3(v,q)$ въ нуль, послѣ нѣкоторыхъ преобразованій. Такія соотношенія, трехчленныя, читатель найдетъ у Якоби на стр. 509 I-го тома, [формулы (B)]. Этимъ сотношеніямъ посвящена Livre VII, ch. I въ „Theorie des fonctions elliptiques par *Briot* et *Bouquet*, Paris, 1875, гдѣ основное тождество такого вида:

$$\left.\begin{aligned} &\theta_1(x+a)\,\theta_1(x+b)\,\theta_1(y+z+a+b)\,\theta_1(y-x)+\\ &+\theta_1(y+a)\,\theta_1(y+b)\,\theta_1(z+x+a+b)\,\theta_1(z-x)+\\ &+\theta_1(z+a)\,\theta_1(z+b)\,\theta_1(x+y+a+b)\,\theta_1(x-y)=0\,; \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

оно выводится тамъ на основаніи свойствъ двоякопеpіодическихъ функцій и функціи $\theta_1(u)$.

205. Переходя къ разложенію эллиптическихъ функцій въ тригонометрическіе ряды, начнемъ съ функціи $\zeta(u)$. Чтобы заразъ получить и разложенія этой функціи для значеній, разнящихся отъ u на

полупероды, перемѣнимъ въ формулѣ (21) § 167 u на $u-v$; будемъ имѣть слѣдующую:

$$\left.\begin{aligned}\zeta(u-v)=\frac{\eta}{\omega}(u-v)+\frac{\pi}{2\omega}\Bigg\{\operatorname{cotg}\frac{(u-v)\pi}{2\omega}+\\+\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\left[\operatorname{cotg}\left(\frac{u-v-2n\omega'}{2\omega}\pi\right)-i\right]+\left[\operatorname{cotg}\left(\frac{u-v+2n\omega'}{2\omega}\pi\right)+i\right]\right)\Bigg\}.\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

Но по (3) того же §:

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{u-v-2n\omega'}{2\omega}\pi\right)-i=2i\frac{e^{-\frac{u-v-2n\omega'}{\omega}\pi i}}{1-e^{-\frac{u-v-2n\omega'}{\omega}\pi i}},\tag{2}$$

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{u-v+2n\omega'}{2\omega}\pi\right)+i=-2i\frac{e^{\frac{u-v+2n\omega'}{\omega}\pi i}}{1-e^{\frac{u-v+2n\omega'}{\omega}\pi i}};\tag{3}$$

разлагая вторыя части въ рядъ посредствомъ дѣленія, будемъ имѣть:

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{u-v-2n\omega'}{2\omega}\pi\right)-i=2i\sum_{m=1}^{m=\infty}e^{-m\frac{u-v-2n\omega'}{\omega}\pi i};\tag{4}$$

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{u-v+2n\omega'}{2\omega}\pi\right)+i=-2i\sum_{m=1}^{m=\infty}e^{m\frac{u-v+2n\omega'}{\omega}\pi i}.\tag{5}$$

Эти разложенія будутъ безусловно-сходящимися для всякого положительнаго цѣлаго n, если будетъ:

$$-\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right)<\Re\left(\frac{u-v}{\omega i}\right)<\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right),\tag{6}$$

ибо тогда ряды модулей ихъ будутъ сходящимися. Вставляя изъ (4) и (5) въ (1), имѣя въ виду, что $-i=\frac{1}{i}$, мы получимъ:

$$\left.\begin{aligned}\zeta(u-v)=\frac{\eta}{\omega}(u-v)+\frac{\pi}{2\omega}\Bigg\{\operatorname{cotg}\frac{(u-v)\pi}{2\omega}+\\+4\sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{m=1}^{m=\infty}e^{2mn\frac{\omega'}{\omega}\pi i}\left(\frac{e^{m\frac{u-v}{\omega}\pi i}-e^{-m\frac{u-v}{\omega}\pi i}}{2i}\right)\Bigg\}.\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

Перемѣняя порядокъ суммированій по m и n, и замѣчая, что

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} e^{2mn\frac{\omega'}{\omega}\pi i} = \sum_{n=1}^{n=\infty} q^{2mn} = \frac{q^{2m}}{1-q^{2m}}, \tag{8}$$

мы получимъ изъ (7):

$$\zeta(u-v) = \frac{\eta}{\omega}(u-v) + \frac{\pi}{2\omega}\left\{\operatorname{cotg}\frac{(u-v)\pi}{2\omega} + 4\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{q^{2m}}{1-q^{2m}}\sin m\frac{(u-v)\pi}{\omega}\right\}. \tag{9}$$

Полагая здѣсь $v=0$ и $v=-\omega$, будемъ имѣть слѣдующія двѣ формулы:

$$\zeta(u) = \frac{\eta}{\omega}u + \frac{\pi}{2\omega}\left\{\operatorname{cotg}\frac{u\pi}{2\omega} + 4\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{q^{2m}}{1-q^{2m}}\sin m\frac{u\pi}{\omega}\right\}; \tag{10}$$

$$\zeta(u+\omega) = \frac{\eta}{\omega}u + \eta + \frac{\pi}{2\omega}\left\{-\operatorname{tg}\frac{u\pi}{2\omega} + 4\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^m\frac{q^{2m}}{1-q^{2m}}\sin m\frac{u\pi}{\omega}\right\}. \tag{11}$$

Чтобы найти остальныя два разложенія, надобно предварительно $\operatorname{cotg}\dfrac{(u-v)\pi}{2\omega}$ замѣнить его выраженіемъ чрезъ экспоненціальныя функціи; оно получится изъ (3) для $n=0$, но какъ потомъ надобно будетъ разлагать его въ рядъ, то мы можемъ получить искомое разложеніе прямо изъ (5), полагая тамъ $n=0$, и будемъ имѣть:

$$\operatorname{cotg}\frac{(u-v)\pi}{2\omega} = -i - 2i\sum_{m=1}^{m=\infty} e^{m\frac{u-v}{\omega}\pi i}. \tag{12}$$

Подставляя это въ (7), будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} \zeta(u-v) = \frac{\eta}{\omega}(u-v) - \frac{\pi}{2\omega}i + \frac{\pi}{2\omega}\Bigg\{ -2i\sum_{m=1}^{m=\infty} e^{m\frac{u-v}{\omega}\pi i} + \\ + 4\sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{m=1}^{m=\infty} e^{2mn\frac{\omega'}{\omega}\pi i}\left(\frac{e^{m\frac{u-v}{\omega}\pi i} - e^{-m\frac{u-v}{\omega}\pi i}}{2i}\right)\Bigg\}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Если здѣсь принять $v=-\omega'$, то первая сумма обратится въ такую:

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} e^{m\frac{u+\omega'}{\omega}\pi i} = \sum_{m=1}^{m=\infty} q^m e^{m\frac{u\pi}{\omega}i}; \tag{14}$$

подъ знакомъ двойной суммы будетъ стоять выраженіе

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2i}\left(e^{m(2n+1)\frac{\omega'}{\omega}\pi i}\,e^{m\frac{u\pi}{\omega}i}-e^{m(2n-1)\frac{\omega'}{\omega}\pi i}\,e^{-m\frac{u\pi}{\omega}i}\right)=\\&=\frac{1}{2i}\left(q^{m(2n+1)}e^{m\frac{u\pi}{\omega}i}-q^{m(2n-1)}e^{-m\frac{u\pi}{\omega'}i}\right);\end{aligned}\right\}\qquad(15)$$

мѣняя въ (13) для $v=-\omega'$ порядокъ суммированія по m и n по внесеніи туда изъ (14) и (15) и присоединеніи суммы (14) къ двойной, мы получимъ окончательно:

$$\zeta(u+\omega')=\frac{\eta}{\omega}u+\eta'+\frac{2\pi}{\omega}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{q^m}{1-q^{2m}}\sin m\frac{u\pi}{\omega},\qquad(16)$$

такъ какъ по (13) § 95 будетъ:

$$\frac{\eta}{\omega}\omega'-\frac{\pi}{2\omega}i=\eta',\qquad(17)$$

и кромѣ того

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}q^{m(2n-1)}=q^{-m}\sum_{n=1}^{n=\infty}q^{2mn}=q^{-m}\frac{q^{2m}}{1-q^{2m}}=\frac{q^m}{1-q^{2m}}.\qquad(18)$$

Если въ (13) положимъ $v=-\omega''$, то подъ знакомъ $\sum$ прибавится множитель $e^{\pm m\pi i}=(-1)^m$, да η къ части внѣшней, и мы получимъ:

$$\zeta(u+\omega'')=\frac{\eta}{\omega}u+\eta''+\frac{2\pi}{\omega}\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^m\frac{q^m}{1-q^{2m}}\sin m\frac{u\pi}{\omega}.\qquad(19)$$

Эта формула и прямо можетъ быть получена изъ (16) чрезъ перемѣну u на $u+\omega$, какъ и (11) изъ (10).

Эти ряды (10) и (11) безусловно сходятся для значеній u, лежащихъ въ полосѣ параллелограммовъ періодовъ между $-\omega'$ и $+\omega'$; ряды (16) и (19) въ полосѣ параллелограммовъ періодовъ между 0 и $-2\omega'$, какъ то слѣдуетъ изъ (6).

206. Полученныя формулы не пригодны для вычисленія $\zeta(u)$ при $u=\omega_i$, ибо содержатъ $\eta_i=\zeta(\omega_i)$; но изъ трехъ величинъ η, η', η''

достаточно знать одну, ибо остальныя тогда легко получатся, при помощи соотношеній:

$$\eta'' = \eta + \eta', \tag{1}$$

и

$$\eta\omega' - \eta'\omega = \pm \frac{\pi}{2} i; \tag{2}$$

далѣе имѣемъ по (12) § 157:

$$\eta = c'\omega + \bar{\eta}, \tag{3}$$

а для $\bar{\eta}$, опредѣляемаго равенствомъ (10) § 157 для $i=1$, въ § 167 была получена такая формула [(24)]:

$$\bar{\eta} = \frac{\pi^2}{2\omega}\left\{\frac{1}{6} + \sum_1^\infty{}_n \operatorname{cosec}^2\left(\frac{2n\omega'}{\omega}\pi\right)\right\}. \tag{4}$$

Но

$$\operatorname{cosec}\left(\frac{2n\omega'}{\omega}\pi\right) = \frac{2i}{e^{2n\frac{\omega'}{\omega}\pi i} - e^{-2n\frac{\omega'}{\omega}\pi i}} = 2i\,\frac{q^{2n}}{q^{4n}-1}; \tag{5}$$

внося въ предыдущее, получимъ:

$$\bar{\eta} = \frac{\pi^2}{2\omega}\left\{\frac{1}{6} - 4\sum_1^\infty{}_n \frac{q^{4n}}{(1-q^{4n})^2}\right\}. \tag{6}$$

Точно также изъ (29) § 167 найдемъ

$$\bar{\eta}' = \frac{\pi^2}{2\omega}\left\{\frac{1}{6} - 4\sum_1^\infty{}_m \frac{q'^{4m}}{(1-q'^{4m})^2}\right\}, \tag{7}$$

гдѣ $\bar{\eta}'$ опредѣляется равенствомъ (10) § 157 для $i=3$.

207. Дифференцируя ряды (10), (11), (16) и (19) § 205, имѣя въ виду что

$$\zeta'(u) = c' - \wp(u),$$

а также (22) и (26) § 167, получимъ:

$$\wp(u) = -\frac{\bar{\eta}}{\omega} + \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\left\{\operatorname{cosec}^2\frac{u\pi}{2\omega} - 8\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{mq^{2m}}{1-q^{2m}}\cos m\frac{u\pi}{\omega}\right\}; \tag{1}$$

$$\wp(u+\omega)=-\frac{\bar{\eta}}{\omega}+\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\left\{\sec^2\frac{u\pi}{2\omega}+8\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^{m-1}\frac{mq^{2m}}{1-q^{2m}}\cos m\frac{u\pi}{\omega}\right\};\quad(2)$$

$$\wp(u+\omega')=-\frac{\bar{\eta}}{\omega}-\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^2\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{mq^m}{1-q^{2m}}\cos m\frac{u\pi}{\omega};\quad(3)$$

$$\wp(u+\omega'')=-\frac{\bar{\eta}}{\omega}+\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^2\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^{m-1}\frac{mq^m}{1-q^{2m}}\cos m\frac{u\pi}{\omega}.\quad(4)$$

Полагая въ послѣднихъ трехъ формулахъ $u=0$, будемъ имѣть:

$$e_1=\wp(\omega)=-\frac{\bar{\eta}}{\omega}+\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\left\{1+8\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^{m-1}\frac{mq^{2m}}{1-q^{2m}}\right\};\quad(5)$$

$$e_2=\wp(\omega'')=-\frac{\bar{\eta}}{\omega}+\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^2\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^{m-1}\frac{mq^m}{1-q^{2m}};\quad(6)$$

$$e_3=\wp(\omega')=-\frac{\bar{\eta}}{\omega}-\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^2\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{mq^m}{1-q^{2m}};\quad(7)$$

— новыя формулы для вычисленія e_1, e_2, e_3, отличныя отъ (6), (7) и (8) § 190. Къ полученнымъ формуламъ (5), (6), (7) придемъ, подвергая такимъ же преобразованіямъ формулы § 169, но только не такъ быстро.

208. Функціи $\sqrt{\wp(u)-e_i}$, имъ обратныя и частныя, получающіяся отъ дѣленія одной на другую, по формуламъ § 178 разлагаются въ ряды, подобные тѣмъ, въ который разлагается $\zeta(u)$, либо такіе, которые содержатъ sec или cosec; а потому они могутъ быть разложены въ тригонометрическіе ряды, подобные полученнымъ въ § 205. Сравнивая выраженіе въ { } формулы (12) § 175 съ (1) § 205, замѣчаемъ, что вся разница во множителѣ $(-1)^n$, который входитъ въ (12) § 175; слѣдовательно, дѣлая такія же преобразованія, вмѣсто суммы $\sum_{n=1}^{n=\infty} q^{2mn}$, входящей въ (8) § 205, получимъ:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n q^{2mn}=-\frac{q^{2m}}{1+q^{2m}},$$

почему будемъ имѣть первую изъ слѣдующихъ формулъ; остальныя получатся такимъ же образомъ изъ остальныхъ формулъ того же §:

$$\sqrt{\wp(u)-e_1}=\frac{\pi}{2\omega}\left\{\operatorname{cotg}\frac{u\pi}{2\omega}-4\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{q^{2m}}{1+q^{2m}}\sin 2m\frac{u\pi}{2\omega}\right\}; \tag{1}$$

$$\sqrt{\wp(u)-e_2}=\frac{\pi}{2\omega}\left\{\operatorname{cosec}\frac{u\pi}{2\omega}-4\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{q^{2m-1}}{1+q^{2m-1}}\sin(2m-1)\frac{u\pi}{2\omega}\right\}; \tag{2}$$

$$\sqrt{\wp(u)-e_3}=\frac{\pi}{2\omega}\left\{\operatorname{cosec}\frac{u\pi}{2\omega}+4\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{q^{2m-1}}{1-q^{2m-1}}\sin(2m-1)\frac{u\pi}{2\omega}\right\}; \tag{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\wp(u)-e_1}}=\frac{-1}{\sqrt{e_2-e_1}\sqrt{e_3-e_1}}\frac{\pi}{2\omega}\left\{\operatorname{tg}\frac{u\pi}{2\omega}+4\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^m\frac{q^{2m}}{1+q^{2m}}\sin 2m\frac{u\pi}{2\omega}\right\}; \tag{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\wp(u)-e_2}}=\frac{1}{\sqrt{e_1-e_2}\sqrt{e_3-e_2}}\frac{2\pi i}{\omega}\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^{m-1}\frac{q^{\frac{2m-1}{2}}}{1+q^{2m-1}}\sin(2m-1)\frac{u\pi}{2\omega}; \tag{5}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\wp(u)-e_3}}=\frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}\sqrt{e_2-e_3}}\frac{2\pi}{\omega}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{q^{\frac{2m-1}{2}}}{1-q^{2m-1}}\sin(2m-1)\frac{u\pi}{2\omega}; \tag{6}$$

$$\frac{\sqrt{\wp(u)-e_3}}{\sqrt{\wp(u)-e_2}}=\frac{1}{\sqrt{e_2-e_1}}\frac{\pi i}{2\omega}\left\{1+4\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^m\frac{q^m}{1+q^{2m}}\cos m\frac{u\pi}{\omega}\right\}; \tag{7}$$

$$\frac{\sqrt{\wp(u)-e_2}}{\sqrt{\wp(u)-e_3}}=\frac{-1}{\sqrt{e_3-e_1}}\frac{\pi i}{2\omega}\left\{1+4\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{q^m}{1+q^{2m}}\cos m\frac{u\pi}{\omega}\right\}; \tag{8}$$

$$\frac{\sqrt{\wp(u)-e_3}}{\sqrt{\wp(u)-e_1}}=\frac{1}{\sqrt{e_1-e_2}}\frac{\pi}{2\omega}\left\{\sec\frac{u\pi}{2\omega}+4\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^m\frac{q^{2m-1}}{1+q^{2m-1}}\cos(2m-1)\frac{u\pi}{2\omega}\right\}; \tag{9}$$

$$\frac{\sqrt{\wp(u)-e_1}}{\sqrt{\wp(u)-e_3}}=\frac{-1}{\sqrt{e_3-e_2}}\frac{2\pi i}{\omega}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{q^{\frac{2m-1}{2}}}{1+q^{2m-1}}\cos(2m-1)\frac{u\pi}{2\omega}; \tag{10}$$

$$\frac{\sqrt{\wp(u)-e_2}}{\sqrt{\wp(u)-e_1}}=\frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\frac{\pi}{2\omega}\left\{\sec\frac{u\pi}{2\omega}+4\sum_{m=1}^{m-\infty}(-1)^{m-1}\frac{q^{2m-1}}{1-q^{2m-1}}\cos(2m-1)\frac{u\pi}{2\omega}\right\}; \tag{11}$$

$$\frac{\sqrt{\wp(u)-e_1}}{\sqrt{\wp(u)-e_2}}=\frac{1}{\sqrt{e_2-e_3}}\frac{2\pi}{\omega}\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^{m-1}\frac{q^{\frac{2m-1}{2}}}{1-q^{2m-1}}\cos(2m-1)\frac{u\pi}{2\omega}. \tag{12}$$

[Эти формулы имѣются у Halphen'a, T. I, p. 431, только тамъ введены вмѣсто лѣвыхъ частей ихъ выраженія чрезъ σ-функціи, и кро-

мѣ того эти равенства помножены на множители, обратные, стоящимъ предъ скобками, иначе обозначеннымъ].

Полагая $u=\omega$ въ формулахъ (2), (3), (5)—(8) получимъ,:

$$\sqrt{e_1-e_2}=\frac{2\pi}{\omega}\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^m\frac{q^{2m-1}}{1+q^{2m-1}}=\frac{2\pi}{\omega}\left\{1+4\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^m\frac{q^m}{1+q^{2m}}\right\}; \quad (13)$$

$$\sqrt{e_1-e_3}=\frac{2\pi}{\omega}\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^m\frac{q^{2m-1}}{1-q^{2m-1}}=\frac{2\pi}{\omega}\left\{1+4\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{q^m}{1+q^{2m}}\right\}; \quad (14)$$

$$\sqrt{e_2-e_3}=\frac{2\pi}{\omega}\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^{m-1}\frac{q^{\frac{2m-1}{2}}}{1-q^{2m-1}}=\frac{2\pi}{\omega}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{q^{\frac{2m-1}{2}}}{1+q^{2m-1}}. \quad (15)$$

Эти равенства представляютъ интересныя тождества.

209. Помножая (10) § 205 на du и интегрируя отъ u_0 до u, придавая затѣмъ къ обѣимъ частямъ по C, собирая затѣмъ члены второй части, несодержащія u въ постоянную C_1, для лѣвой части, имѣя въ виду (1) и (2) § 91, мы получимъ:

$$\log\Theta(u)=C_1+\frac{\eta}{\omega}\frac{u^2}{2}+\log\sin\frac{u\pi}{2\omega}-2\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1}{m}\frac{q^{2m}}{1-q^{2m}}\cos m\frac{u\pi}{\omega}. \quad (1)$$

Чтобы опредѣлить постоянную, вычтемъ изъ обѣихъ частей этого равенства по $\log u$; тогда будемъ имѣть:

$$\log\frac{\Theta(u)}{u}=C_1+\frac{\eta}{\omega}\frac{u^2}{2}+\log\left(\frac{\sin\frac{u\pi}{2\omega}}{u}\right)-2\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1}{m}\frac{q^{2m}}{1-q^{2m}}\cos m\frac{u\pi}{\omega}; \quad (2)$$

полагая здѣсь $u=0$, получимъ:

$$\log\Theta'(0)=C_1+\log\frac{\pi}{2\omega}-2\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1}{m}\frac{q^{2m}}{1-q^{2m}}; \quad (3)$$

вычитая это изъ (1), будемъ имѣть:

$$\log\frac{\Theta(u)}{\Theta'(0)}=\frac{\eta}{\omega}\frac{u^2}{2}+\log\left(\frac{2\omega}{\pi}\sin\frac{u\pi}{2\omega}\right)+2\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{q^{2m}}{1-q^{2m}}\,\frac{1-\cos m\frac{u\pi}{\omega}}{m}. \quad (4)$$

[Этимъ же способомъ получена формула эта у Halphen'a; (36) на страницѣ 428]. Точно также интегрируя (11), (16) и (19) § 105 отъ

$u=0$, по перенесеніи налѣво члена съ первою степенью u, по (3) § 98, получимъ:

$$\log\frac{\Theta_1(u)}{\Theta'(0)}=\frac{\eta}{\omega}\frac{u^2}{2}+\log\cos\frac{u\pi}{2\omega}+2\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^m\frac{q^{2m}}{1-q^{2m}}\frac{1-\cos m\frac{u\pi}{\omega}}{m};\quad(5)$$

$$\log\frac{\Theta_3(u)}{\Theta'(0)}=\frac{\eta}{\omega}\frac{u^2}{2}+2\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{q^m}{1-q^{2m}}\frac{1-\cos m\frac{u\pi}{\omega}}{m};\quad(6)$$

$$\log\frac{\Theta_2(u)}{\Theta'(0)}=\frac{\eta}{\omega}\frac{u^2}{2}+2\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^m\frac{q^{2m}}{1-q^{2m}}\frac{1-\cos m\frac{u\pi}{\omega}}{m}.\quad(7)$$

Здѣсь можно было бы написать $2\sin^2 m\frac{u\pi}{2\omega}$ вмѣсто $1-\cos m\frac{u\pi}{\omega}$; но въ этомъ видѣ онѣ имѣются у Halphen'а на сейчасъ названной страницѣ.

[Совершенно такого вида находимъ у Halphen'а на стр. 428 I тома разложенія для логариѳмовъ σ-функцій: разница только въ значеніяхъ η, которыя для σ должны быть замѣнены чрезъ $\bar{\eta}$].

210. Имѣя разложенія log-овъ Θ-функцій въ тригонометрическіе ряды, легко, получить таковые ряды для логариѳмовъ всѣхъ эллиптическихъ функцій § 208, пользуясь ихъ выраженіями чрезъ Θ-функціи; но мы ограничимся лишь первыми тремя изъ нихъ, для которыхъ получимъ такія разложенія:

$$\left.\begin{aligned}\log\sqrt{\wp(u)-e_1}&=\log\left(\frac{\Theta_1(u)}{\Theta'(0)}\right)-\log\left(\frac{\Theta(u)}{\Theta'(0)}\right)=\\=\log\left(\frac{\pi}{2\omega}\operatorname{cotg}\frac{u\pi}{2\omega}\right)&-8\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{2k-1}\frac{q^{2(2k-1)}}{1-q^{2(2k-1)}}\sin^2(2k-1)\frac{u\pi}{2\omega};\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

(ибо члены, въ которыхъ $m=2k$, сократятся). Далѣе

$$\left.\begin{aligned}\log\sqrt{\wp(u)-e_2}&=\log\left(\frac{\Theta_2(u)}{\Theta'(0)}\right)-\log\left(\frac{\Theta(u)}{\Theta'(0)}\right)=\\=\log\left(\frac{\pi}{2\omega}\operatorname{cosec}\frac{u\pi}{2\omega}\right)&+4\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{(-1)^m}{m}\frac{q^m}{1+(-1)^m q^m}\sin^2 m\frac{u\pi}{2\omega};\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

(ибо

$$\frac{(-1)^m q^m - q^{2m}}{1-q^{2m}} = (-1)^m \frac{q^m + (-1)^{m-1} q^{2m}}{1-q^{2m}} = (-1)^m \frac{q^m}{1+(-1)^m q^m}\Bigg),$$

наконецъ

$$\left.\begin{aligned} \log\sqrt{\wp(u)-e_3} &= \log\left(\frac{\Theta_3(u)}{\Theta'(0)}\right) - \log\left(\frac{\Theta(u)}{\Theta'(0)}\right) = \\ &= \log\left(\frac{\pi}{2\omega}\operatorname{cosec}\frac{u\pi}{2\omega}\right) + 4\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1}{m}\frac{q^m}{1+q^m}\sin^2 m\frac{u\pi}{2\omega}; \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

(ибо

$$\frac{q^m - q^{2m}}{1-q^{2m}} = \frac{q^m(1-q^m)}{1-q^{2m}} = \frac{q^m}{1+q^m}\Bigg).$$

Полагая въ послѣднихъ двухъ формулахъ $u=\omega$, получимъ:

$$\log\sqrt{e_1-e_2} = \log\frac{\pi}{2\omega} - 4\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{2k-1}\frac{q^{2k-1}}{1-q^{2k-1}}; \quad (4)$$

$$\log\sqrt{e_1-e_3} = \log\frac{\pi}{2\omega} + 4\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{2k-1}\frac{q^{2k-1}}{1+q^{2k-1}}; \quad (5)$$

ибо члены, для которыхъ $m=2k$, обратятся въ нуль.

Точно также, полагая во (2) $u=\omega'$, придавъ къ обѣимъ частямъ по $\log i$, послѣ такихъ же преобразованій найдемъ:

$$\log\sqrt{e_2-e_3} = \log\left(\frac{\pi}{\omega}\frac{q^{\frac{1}{2}}}{1-q}\right) + \sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m}\frac{(1-q^m)^2}{1+(-1)^m q^m}. \quad (6)$$

Исходя изъ формулы (2) § 104 для $i=3$, $j=2$, при помощи (4) и (6) § 109 найдемъ:

$$\log\sqrt{e_2-e_3} = \log\left(\frac{\pi}{\omega}\frac{q^{\frac{1}{2}}}{1+q}\right) + \sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m}\frac{[1+(-1)^{m-1}q^m]^2}{1+q^m}. \quad (7)$$

*

211. Для функцій амплитуды v разложенія въ тригонометрическіе ряды легко найдутся изъ предыдущаго. Полагая въ (1) § 125 $i=1$, $j=3$, $k=2$, мы будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} \sin\mathrm{am}(v,k) &= \frac{\sqrt{e_1-e_3}}{\sqrt{\wp(u)-e_3}}\,; \\ \cos\mathrm{am}(v,k) &= \frac{\sqrt{\wp(u)-e_1}}{\sqrt{\wp(u)-e_3}}\,; \\ \triangle\,\mathrm{am}(v,k) &= \frac{\sqrt{\wp(u)-e_2}}{\sqrt{\wp(u)-e_3}}\,; \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

гдѣ $v=\sqrt{e_1-e_3}\,u$; далѣе имѣемъ $\omega=\dfrac{K}{\sqrt{e_1-e_3}}$, $\omega'=\dfrac{K'i}{\sqrt{e_1-e_3}}$; слѣдовательно $\dfrac{u}{\omega}=\dfrac{v}{K}$; поэтому изъ (6), (10) и (8) § 208 легко выведемъ:

$$\sin\mathrm{am}(v,k)=\frac{2\pi}{kK}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{q^{\frac{2m-1}{2}}}{1-q^{2m-1}}\sin(2m-1)\frac{v\pi}{2K}\,; \tag{2}$$

$$\cos\mathrm{am}(v,k)=\frac{2\pi}{kK}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{q^{\frac{2m-1}{2}}}{1+q^{2m-1}}\cos(2m-1)\frac{v\pi}{2K}\,; \tag{3}$$

$$\triangle\,\mathrm{am}(v,k)=\frac{\pi}{2K}\left\{1+4\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{q^m}{1+q^{2m}}\cos 2m\frac{v\pi}{2K}\right\}. \tag{4}$$

Полагая $v=K$ въ (2) и (4), такъ какъ $\sin\mathrm{am}(K,k)=1$ и $\triangle\mathrm{am}(K,k)=k'$, легко получимъ:

$$\frac{2Kk}{\pi}=4\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^{m-1}\frac{q^{\frac{2m-1}{2}}}{1-q^{2m-1}}\,; \tag{5}$$

$$\frac{2Kk'}{\pi}=1+4\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^m\frac{q^m}{1+q^{2m}}. \tag{6}$$

Принимая въ (5) § 124 $i=1$, $j=3$, $k=2$, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} \sin\operatorname{am}(v,k) &= \sqrt{e_1-e_3}\,\frac{\Theta(u)}{\Theta_3(u)}; \\ \cos\operatorname{am}(v,k) &= \frac{\Theta_1(u)}{\Theta_3(u)}; \\ \triangle\operatorname{am}(v,k) &= \frac{\Theta_2(u)}{\Theta_3(u)}; \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

логариѳмируя, по (4)—(7) § 209, получимъ:

$$\log\sin\operatorname{am}(v,k) = \log\left(\frac{2K}{\pi}\sin\frac{vk}{2K}\right) - 2\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1}{m}\frac{q^m}{1+q^m}\left(1-\cos m\frac{v\pi}{K}\right); \tag{8}$$

$$\log\cos\operatorname{am}(v,k) = \log\left(\cos\frac{v\pi}{2K}\right) - 2\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1}{m}\frac{q^m}{1+(-1)^m q^m}\left(1-\cos m\frac{v\pi}{K}\right); \tag{9}$$

$$\log\triangle\operatorname{am}(v,k) = -8\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{2n-1}\frac{q^{2n-1}}{1-q^{2(2n-1)}}\left(1-\cos(2n-1)\frac{v\pi}{2K}\right). \tag{10}$$

Полагая $v=K$ въ (8) и (10), будемъ имѣть:

$$\log\frac{2K}{\pi} = 4\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{2n-1}\frac{q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}}; \tag{11}$$

$$\log k' = -8\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{2n-1}\frac{q^{2n-1}}{1-q^{2(2n-1)}}. \tag{12}$$

Эти послѣдніе ряды встрѣчаемъ у Якоби въ „Fundamenta“ въ § 40 подъ № 3 и 2 соотвѣтственно. Съ помощію (12) равенство (10) приводится сейчасъ къ такому виду, какъ оно дано Якоби:

$$\log\triangle\operatorname{am}(v,k) = \log k' + 8\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{2n-1}\frac{q^{2n-1}}{1-q^{2(2n-1)}}\cos(2n-1)\frac{v\pi}{2K}. \tag{13}$$

Чтобы привести формулу (8) къ Якобіевскому виду, вставимъ туда вмѣсто $\log\frac{2K}{\pi}$ его разложеніе изъ (11); разбивая сумму на двѣ, которыя обѣ оказываются безусловно-сходящимися, въ чемъ нетрудно убѣдиться,

и соединяя одну (безъ cos) съ вставленною вмѣсто $\log \frac{2K}{\pi}$, мы будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} \log \sin am(v,k) = \log \sin \frac{v\pi}{2K} + 2 \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \frac{q^m}{1+q^m} + \\ + 2 \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{m} \frac{q^m}{1+q^m} \cos m \frac{v\pi}{K}; \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

первая же сумма здѣсь $= \log \frac{2\sqrt[4]{q}}{\pi}$. Въ этомъ можно такъ убѣдиться. По (9) § 123 имѣемъ:

$$\sqrt{k} = \frac{\sqrt[4]{e_2 - e_3}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3}} = \frac{\Theta(\omega)}{\Theta(\omega'')} e^{\frac{\eta + \eta''}{2}\omega'}, \tag{15}$$

а по (4) § 103:

$$\frac{\Theta(\omega)}{\Theta(\omega'')} = \frac{\Theta_2(\omega')}{\Theta'(0)} e^{-\eta''\omega'}; \tag{16}$$

внося это въ предыдущее, будемъ имѣть:

$$\sqrt{k} = \frac{\Theta_2(\omega')}{\Theta'(0)} e^{\frac{\eta - \eta''}{2}\omega'}. \tag{17}$$

Если теперь вообразимъ здѣсь ту специальную θ-функцію § 196, для которой $\eta = 0$, то для нея будетъ $\eta'' = \eta' = -\frac{\pi}{2\omega} i$, и послѣднее равенство обратится въ такое:

$$\sqrt{k} = \frac{\theta_2(\omega')}{\theta'(0)} e^{\frac{\omega'\pi}{4\omega} i} = \frac{\theta_2(\omega')}{\theta'(0)} \sqrt[4]{q}, \tag{18}$$

откуда получимъ

$$\frac{\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}} = \frac{\theta'(0)}{\theta_2(\omega')}. \tag{19}$$

Помножая это на 2 и беря логариѳмы, будемъ имѣть:

$$\log\frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}}=\log 2-\log\frac{\theta_2(\omega')}{\theta'(0)}\,; \tag{20}$$

но по (7) § 209 для разсматриваемой теперь функціи будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}\log\frac{\theta_2(\omega')}{\theta'(0)}&=2\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{(-1)^m}{m}\,\frac{q^m}{1-q^{2m}}\,\frac{2-(q^m+q^{-m})}{2}=\\&=\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m}\,\frac{(1-q^m)^2}{1-q^{2m}}=\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{(-1)^m}{m}\,\frac{1-q^m}{1+q^m}=\\&=\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m}\left(1-2\,\frac{q^m}{1+q^m}\right)=\\&=\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m}-2\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m}\,\frac{q^m}{1+q^m}\,,\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

гдѣ оба ряда сходящіеся; внося это въ (12), и имѣя въ виду, что

$$\log 2=\log(1+1)=\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m}\,, \tag{22}$$

мы получимъ

$$\log\frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}}=2\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m}\cdot\frac{q^m}{1+q^m}\,. \tag{23}$$

На основаніи этого равенства (14) такъ можетъ быть представлено:

$$\log\sin\operatorname{am}(v,k)=\log\left(\frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}}\sin\frac{v\pi}{2K}\right)+2\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1}{m}\cdot\frac{q^m}{1+q^m}\cos m\frac{v\pi}{K}\,; \tag{24}$$

это и есть Якобіевская форма разложенія логариѳма $\sin\operatorname{am}(v,k)$ въ тригонометрическій рядъ.

Точно также вторую часть (9) можно разложить на сумму двухъ рядовъ:

$$\left.\begin{aligned}\log\cos\operatorname{am}(v,k)=\log\cos\frac{v\pi}{2K}-2\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1}{m}\cdot\frac{q^m}{1+(-1)^m q^m}+\\+2\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1}{m}\cdot\frac{q^m}{1+(-1)^m q^m}\cos m\frac{v\pi}{K}\,;\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

здѣсь первая сумма второй части представляетъ разложеніе логариѳма отъ $2\sqrt[4]{q}\sqrt{\frac{k'}{k}}$. Въ самомъ дѣлѣ сложивъ (12), по раздѣленіи его на 2, съ (23), будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}\log\left(2\sqrt[4]{q}\sqrt{\frac{k'}{k}}\right)&=-2\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{2k}\frac{q^{2k}}{1+q^{2k}}+2\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{2k-1}\left(\frac{q^{2k-1}}{1+q^{2k-1}}-\frac{2q^{2k-1}}{1-q^{2(2k-1)}}\right)=\\&=-2\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{2k}\frac{q^{2k}}{1+q^{2k}}-2\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{2k-1}\frac{q^{2k-1}}{1-q^{2k-1}}=\\&=-2\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1}{m}\frac{q^m}{1+(-1)^m q^m};\end{aligned}\right\}(26)$$

что и требовалось доказать. На основаніи этого (25) и приметъ Якобіевскій видъ:

$$\log\cos\mathrm{am}(v,k)=\log\left(2\sqrt[4]{q}\sqrt{\frac{k'}{k}}\cos\frac{v\pi}{2K}\right)+2\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1}{m}\frac{q^m}{1+(-1)^m}\cos m\frac{v\pi}{K}\,.\;(27)$$

Якоби получилъ эти разложенія чрезъ преобразованіе логариѳмовъ тѣхъ безконечныхъ произведеній, которыми выражаются Θ-функціи, при помощи разложенія этихъ логариѳмовъ въ рядъ. (Fundamenta, § 39).

Для другого періода получимъ аналогичныя формулы, выведеннымъ въ §§ 206—212, въ которыя войдетъ q' вмѣсто q, и въ знаменатели аргументовъ ω' вмѣсто ω. Читатель легко получитъ ихъ самъ при помощи употребленныхъ нами методовъ.

Предыдущее не исчерпываетъ всѣхъ имѣющихся разложеній: у Якоби и у Halphen'a читатель найдетъ много другихъ: мы ограничились лишь наиболѣе важными и наиболѣе легко выводящимися изъ предыдущаго.

ГЛАВА XIII.

Разложеніе эллиптическихъ функцій и σ-функцій въ ряды по степенямъ u.

212. Переходя къ разложеніямъ нашихъ функцій въ ряды, расположенные по степенямъ независимой перемѣнной u, начнемъ съ функціи $\wp(u)$. Такъ какъ эта функція двоякопеdoperіодическая, то достаточно найти ея разложеніе для перваго параллелограмма періодовъ.

Въ § 76 мы нашли, что въ окрестности точки $u=0$ форма разложенія этой функціи по степенямъ u будетъ такая:

$$\wp(u)=\frac{1}{u^2}+u^2\mathfrak{P}(u^2), \tag{1}$$

гдѣ $\mathfrak{P}(u^2)$ рядъ расположенный по цѣлымъ положительнымъ степенямъ u^2, начиная съ нулевой, слѣдовательно вида:

$$\mathfrak{P}(u^2)=\sum_{k=2}^{k=\infty} c_k u^{2(k-2)}; \tag{2}$$

внося это въ (1) будемъ имѣть:

$$\wp(u)=\frac{1}{u^2}+\sum_{k=2}^{k=\infty} c_k u^{2(k-1)}. \tag{3}$$

Чтобы опредѣлить коэффиціенты этого разложенія, можно воспользоваться равенствомъ (6) § 74, именно:

$$\wp'''(u)=12\wp(u)\wp'(u). \tag{4}$$

Для этого продифференцируемъ предыдущее равенство, (3), до трехъ разъ; будемъ имѣть:

$$\wp'(u)=-\frac{2}{u^3}+\sum_{k=2}^{k=\infty} 2(k-1)c_k u^{2k-3}; \tag{5}$$

$$\wp''(u) = \frac{6}{u^4} + \sum_{k=2}^{k=\infty} (2k-2)(2k-3)c_k u^{2k-4}; \tag{6}$$

$$\wp'''(u) = -\frac{24}{u^5} + \sum_{k=2}^{k=\infty} (2k-2)(2k-3)(2k-4)c_k u^{2k-5}. \tag{7}$$

Внося изъ (3), (5) и (7) въ (4), будемъ имѣть, послѣдовательно преобразуя:

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{24}{u^5} + \sum_{k=3}^{k=\infty} (2k-2)(2k-3)(2k-4)c_k u^{2k-5} = \\ &= 12\left(\frac{1}{u^2} + \sum_{k=2}^{k=\infty} c_k u^{2k-2}\right)\left(-\frac{2}{u^3} + \sum_{k'=2}^{k'=\infty} (2k'-2)c_{k'} u^{2k'-3}\right) = \\ &= -\frac{24}{u^5} + 12\left\{\sum_{k=2}^{k=\infty} (2k-4)c_k u^{2k-5} + \sum_{k=2}^{k=\infty}\sum_{k'=2}^{k'=\infty} (2k'-2)c_k c_{k'} u^{2(k+k')-5}\right\} = \\ &= -\frac{24}{u^5} + 24c_3 u + 24\sum_{\lambda=4}^{\lambda=\infty}\left\{(\lambda-2)c_\lambda + \sum_{k=2}^{k=\lambda-2} (\lambda-k-1)c_k c_{\lambda-k}\right\} u^{2\lambda-5}, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

— выдѣливъ изъ первой суммы членъ, для котораго $k=3$ (членъ, для котораго $k=2$, имѣетъ нуль коэффиціентомъ), и перемѣняя затѣмъ въ ней k на λ, во второй же суммѣ, послѣ положенія $k+k'=\lambda$ и замѣны суммированія по k' суммированіемъ по λ, мѣняя порядокъ суммированія по k и λ. Въ лѣвой части (8) для $k=3$ будемъ имѣть: $24c_3u$, отнимая отъ обѣихъ частей по $-\frac{24}{u^5}+24c_3u$ и сравнивая затѣмъ коэффиціенты при $u^{2\lambda-5}$ въ обѣихъ частяхъ равенства, будемъ имѣть:

$$(2\lambda-2)(2\lambda-3)(2\lambda-4)c_\lambda = 24(\lambda-2)c_\lambda + 24\sum_{k=2}^{k=\lambda-2} (\lambda-k-1)c_k c_{\lambda-k}; \tag{9}$$

но, если $k+k'=\lambda$, то

$$\sum_{k=2}^{k=\lambda-2} (\lambda-k-1)c_k c_{\lambda-k} = \sum_{k'=2}^{k'=\lambda-2} (k'-1)c_{k'}\cdot c_{\lambda-k'}; \tag{10}$$

посему

$$\left.\begin{aligned}\sum_{k=2}^{k=\lambda-2}(\lambda-k-1)c_k c_{\lambda-k}&=\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{k=\lambda-2}(\lambda-k-1+k-1)c_k c_{\lambda-k}=\\&=\frac{1}{2}(\lambda-2)\sum_{k=2}^{k=\lambda-2}c_k c_{\lambda-k};\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

внося это въ (9), можно будетъ все сократить на $2\cdot 2(\lambda-2)=2(2\lambda-4)$; перенося затѣмъ первый членъ правой части налѣво, будемъ имѣть вмѣсто (9):

$$[(\lambda-1)(2\lambda-3)-6]c_\lambda=3\sum_{k=2}^{k=\lambda-2}c_k\cdot c_{\lambda-k}, \qquad (12)$$

откуда, такъ какъ

$$(\lambda-1)(2\lambda-3)-6=(2\lambda+1)(\lambda-3), \qquad (13)$$

получимъ:

$$c_\lambda=\frac{3}{(2\lambda+1)(\lambda-3)}\sum_{k=2}^{k=\lambda-2}c_k c_{\lambda-k}. \qquad (14)$$

Эта формула сводитъ опредѣленіе всѣхъ c_λ, начиная съ c_4, на c_2 и c_3, которыя надобно опредѣлить уже изъ другихъ разсматриванiй. Для ихъ опредѣленія достаточно внести вмѣсто $\wp(u)$ и $\wp'(u)$ ихъ разложенія изъ (3) и (5) этого § въ равенство (4) § 74, именно:

$$[\wp'(u)]^2=4\wp^3(u)-g_2\wp(u)-g_3, \qquad (15)$$

причемъ достаточно опредѣлить лишь три первые члена разложенія обѣихъ частей; будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}\frac{4}{u^6}-8\sum_{k=2}^{k=\infty}(k-1)c_k u^{2k-6}+\left(\sum_{k=2}^{k=\infty}2(k-1)c_k u^{2k-3}\right)^2&=\\=\frac{4}{u^6}+12\sum_{k=2}^{k=\infty}c_k u^{2k-6}+\ldots-g_2\left(\frac{1}{u^2}+\sum_{k=2}^{k=\infty}c_k u^{2k-2}\right)-g_3;&\end{aligned}\right\}\quad(16)$$

члены съ низшею степенью u въ обѣихъ частяхъ тождественны; отнимая ихъ и сравнивая коэффиціенты при $\frac{1}{u^2}$ и u^0 въ обѣихъ частяхъ равенства, мы получимъ такія уравненія:

$$-8c_2 = 12c_2 - g_2\,; \qquad -8.2c_3 = 12c_3 - g_3\,; \tag{17}$$

откуда найдемъ:

$$c_2 = \frac{g_2}{20}\,; \qquad c_3 = \frac{g_3}{28} \tag{18}$$

Съ помощію этихъ значеній по формулѣ (14) Halphen нашелъ слѣдующія значенія для c_λ до c_9:

$$\left.\begin{aligned}
&c_4 = \frac{g_2^2}{2^4.3.5^2}\,; \quad c_5 = \frac{3\cdot g_2\cdot g_3}{2^4.5.7.11}\,; \quad c_6 = \frac{1}{2^4.13}\left(\frac{g_3^2}{7} + \frac{g_2^3}{2.3.5^3}\right);\\
&c_7 = \frac{g_2^2 g_3}{2^5.3.5^2.7.11}\,; \quad c_8 = \frac{1}{17}\left(\frac{3g_2 g_3^2}{2^4.7^2.11.13} + \frac{g_2^4}{2^8.3.5^3.13}\right);\\
&c_9 = \frac{1}{19}\left(\frac{29 g_2^3 g_3}{2^8.5^3.7.11.13} + \frac{g_3^3}{2^6.7^3.13}\right);\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Внося это въ (3), будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}
\wp(u) = {} & \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{20}u^2 + \frac{g_3}{28}u^4 + \frac{g_2^2}{2^4.3.5^2}u^6 + \frac{3g_2 g_3}{2^4.5.7.11}u^8 + \\
& + \frac{1}{2^4.13}\left(\frac{g_3^2}{7} + \frac{g_2^3}{2.3.5^3}\right)u^{10} + \frac{g_2^2 g_3}{2^5.3.5^2.7.11}u^{12} + \\
& + \frac{1}{17}\left(\frac{3g_2 g_3^2}{2^4.7^2.11.13} - + \frac{g_2^4}{2^8.3.5^3.13}\right)u^{14} + \\
& + \frac{1}{19}\left(\frac{29 g_2^3 g_3}{2^8.5^3.7.11.13} + \frac{g_3^2}{2^6.7^3.13}\right)u^{16} + \ldots
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Радіусъ круга сходимости этого ряда будетъ по теоремѣ Коши равенъ наименьшему изъ модулей 2ω, $2\omega''$, $2\omega'$, $2(\omega - \omega')$, ибо для однозначной функціи онъ опредѣляется разстояніемъ ближайшаго къ точкѣ $u = 0$ полюса функціи $\wp(u)$, а полюсы эти находятся въ центрахъ сосѣднихъ параллелограммовъ періодовъ этой функціи.

[Изъ (13), (15) и (17) § 67 видно, что $s = \wp(u)$ есть однородная функція —2-го измѣренія, g_2 —4-го, g_3 —6-го, тогда какъ u —1-го;

изъ (18) и (14) настоящаго § видно поэтому, что c_λ есть -2λ-го измѣренія; изъ (3) послѣ того видно, какъ реализуется -2-ое измѣреніе функціи $\wp(u)$ въ ея разложеніи въ рядъ по степенямъ u].

213. Вычитая (20) пред. § изъ c', помножая на $\frac{1}{2}du$ и интегрируя отъ $-u$ до $+u$ по пути не проходящему чрезъ точки $u=0$, по (12) § 84 будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}\zeta(u)=\frac{1}{u}+c'u-\frac{g_2}{20.3}u^3-\frac{g_3}{28.5}u^5-\frac{g_2^2}{2^4.3.5^2.7}u^7-\\ -\frac{g_2g_3}{2^4.5.7.11.3}u^9-\frac{1}{2^4.13.11}\left(\frac{g_3^2}{7}+\frac{g_2^3}{2.3.5^3}\right)u^{11}-\\ -\frac{g_2^2g_3}{2^5.3.5^2.7.11.13}u^{13}-\frac{1}{17.15}\left(\frac{3g_2g_3^2}{2^4.7^2.11.13}+\frac{g_2^4}{2^8.3.5^3.13}\right)u^{15}-\dots\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Этотъ рядъ по извѣстному предложенію будетъ имѣть тотъ же самый кругъ сходимости, какъ и (20) пред. §.

214. По (17) § 89 имѣемъ:

$$\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}=\zeta(u)\,; \qquad (1)$$

этимъ равенствомъ можно теперь воспользоваться для вычисленія коэффиціентовъ разложенія функціи $\Theta(u)$ въ рядъ по степенямъ u, ибо это цѣлая функція отъ u. Такъ какъ она обращается въ нуль при $u=0$, то разложеніе ея должно начинаться съ члена, содержащаго u въ первой степени, а какъ она нечетна, то должно содержать только нечетныя степени u, слѣдовательно должно быть вида:

$$\Theta(u)=u\sum_{k=0}^{k=\infty}b_ku^{2k}\,; \qquad (2)$$

представивъ (1) въ такомъ видѣ:

$$\Theta'(u)=\Theta(u)\zeta(u)\,, \qquad (3)$$

и вставляя вмѣсто этихъ функцій ихъ разложенія изъ (2) и (1) пред. §, мы получимъ возможность опредѣлить, чрезъ сравненіе коэффиціентовъ при одинаковыхъ степеняхъ u въ обѣихъ частяхъ равенства, сколько

угодно изъ коэффиціентовъ b_k, и имѣющееся получиться такимъ образомъ разложеніе будетъ сходящимся на всей плоскости (u), какъ то слѣдуетъ изъ цѣлаго характера функціи $\Theta(u)$. Однако этотъ способъ требуетъ большихъ вычисленій и неможетъ дать скоро замѣтить законъ, которому слѣдуютъ члены этого разложенія; а потому ему предпочитаютъ другой, при которомъ берется въ помощь частное дифференціальное уравненіе, которому удовлетворяетъ Θ-функція, разсматриваемая какъ функція также и инваріантовъ g_2 и g_3. Въ слѣдующихъ §§ мы выведемъ эти уравненія какъ для основной Θ-функціи, такъ и для союзныхъ, придерживаясь Вейерштрасса *).

215. Продифференцируемъ (13) § 87 два раза по взятіи отъ обѣихъ частей логариѳма; по (4) того же § и (9) 84 будемъ имѣть:

$$c' - \wp(u) = \frac{\partial^2 \log \Theta(u)}{\partial u^2}\,; \tag{1}$$

точно также изъ (3) § 98, продифференцировавъ два раза по взятіи логариѳма, будемъ имѣть:

$$\frac{\partial^2 \log \Theta_i(u)}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 \log \Theta(u+\omega_i)}{\partial u^2} = c' - \wp(u+\omega_i)\,, \tag{2}$$

— по (1). Здѣсь $i = 1,\ 2,\ 3$. Всѣ эти четыре уравненія можно заразъ разсматривать, если принимать:

$$\varphi(u) = \wp(u)\,, \quad \text{или} \quad = \wp(u+\omega_i)\,, \tag{3}$$

безразлично, и въ тоже время соотвѣтственно:

$$\Phi(u) = \Theta(u) \quad \text{или} \quad = \Theta_i(u)\,; \tag{4}$$

тогда эти четыре уравненія будутъ заключаться въ слѣдующемъ:

$$c' - \varphi(u) = \frac{\partial^2 \log \Phi(u)}{\partial u^2}\,, \tag{5}$$

при чемъ будетъ:

$$[\varphi'(u)]^2 = 4\varphi^3(u) - g_2\varphi(u) - g_3\,. \tag{6}$$

*) Zur Theorie der elliptischen Functionen. Von K. Weierstrass. Göttingen. 1883. (Autogr.)

216. Взявъ теперь log отъ обѣихъ частей этого равенства, продифференцируемъ по измѣняемости однихъ g_2 и g_3, что покажемъ при помощи знака δ; имѣя въ виду (5) § 74, получимъ:

$$2\frac{\delta\varphi'(u)}{\varphi'(u)}=\frac{2\varphi''(u)\delta\varphi(u)-\delta g_2\varphi(u)-\delta g_3}{[\varphi'(u)]^2}, \tag{1}$$

гдѣ направо въ знаменателѣ мы поставили лѣвую часть равенства (6) пред. § вмѣсто правой. Перенося все налѣво будемъ имѣть по соединеніи въ одинъ первыхъ двухъ членовъ:

$$2\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\delta\varphi(u)}{\varphi'(u)}\right)+\frac{\delta g_2\varphi(u)+\delta g_3}{[\varphi'(u)]^2}=0. \tag{2}$$

Теперь вмѣсто δg_2 и δg_3 введемъ, слѣдуя Вейерштрассу, новыя произвольныя величины d_1 и d_2, полагая:

$$\left.\begin{aligned}\delta g_2&=-4g_2d_1-6g_3d_2,\\ \delta g_3&=-6g_3d_1-\frac{1}{3}g_2^2d_2,\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

что всегда возможно, ибо опредѣлитель:

$$\begin{vmatrix}4g_2 & 6g_3\\ 6g_3 & -\frac{1}{3}g_2^2\end{vmatrix}=-\frac{4}{3}(g_2^3-27g_3^2)=-\frac{4}{3}\triangle \tag{4}$$

[см. (24) въ § 65] отличенъ отъ нуля. Внеся изъ (3) во (2), будемъ имѣть:

$$2\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\delta\varphi(u)}{\varphi'(u)}\right)-4\frac{g_2\varphi(u)+\frac{3}{2}g_3}{[\varphi'(u)]^2}d_1-\frac{6g_3\varphi(u)+\frac{1}{3}g_2^2}{[\varphi'(u)]^2}d_2=0. \tag{5}$$

Это можно еще иначе представить. Мы имѣемъ:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\varphi'(u)}\right)=-\frac{\varphi''(u)}{[\varphi'(u)]^2}=-\frac{6\varphi^2(u)-\frac{1}{2}g_2}{[\varphi'(u)]^2}; \tag{6}$$

потому будетъ при помощи (6) пред. §:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\varphi(u)}{\varphi'(u)}\right)=1-\frac{\varphi(u)\varphi''(u)}{[\varphi'(u)]^2}=-\frac{1}{2}-\frac{g_2\varphi(u)+\frac{3}{2}g_3}{[\varphi'(u)]^2}, \tag{7}$$

откуда

$$-\frac{g_2\varphi(u)+\frac{3}{2}g_3}{[\varphi'(u)]^2}=\frac{1}{2}+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\varphi(u)}{\varphi'(u)}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(u+2\frac{\varphi(u)}{\varphi'(u)}\right). \tag{8}$$

Далѣе по (7) будемъ имѣть:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\varphi^2(u)}{\varphi'(u)}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\varphi(u)\frac{\varphi(u)}{\varphi'(u)}\right)=\frac{1}{2}\varphi(u)-\frac{g_2\varphi^2(u)+\frac{3}{2}g_3\varphi(u)}{[\varphi(u)]^2}; \tag{9}$$

затѣмъ, помножая (6) на $-\frac{1}{6}g_2$ и складывая съ этимъ:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\varphi^2(u)-\frac{1}{6}g_2}{\varphi'(u)}\right)=\frac{1}{2}\varphi(u)-\frac{\frac{3}{2}g_3\varphi(u)+\frac{1}{12}g_2^2}{[\varphi'(u)]^2}; \tag{10}$$

откуда по умноженіи на (4), получимъ:

$$-\frac{6g_3\varphi(u)+\frac{1}{3}g_2^2}{[\varphi'(u)]^2}=-2\varphi(u)+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{4\varphi^2(u)-\frac{2}{3}g_2}{\varphi'(u)}\right). \tag{11}$$

Имѣя въ виду, что по (5) пред. §

$$-\varphi(u)=\frac{\partial^2\log\Phi(u)}{\partial u^2}-c'=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\log\Phi(u)}{\partial u}-c'u\right), \tag{12}$$

мы можемъ это еще и такъ представить:

$$-\frac{6g_3\varphi(u)+\frac{1}{3}g_2^2}{[\varphi'(u)]^2}=\frac{\partial}{\partial u}\left[2\left(\frac{\partial\log\Phi(u)}{\partial u}-c'u\right)+\frac{4\varphi^2(u)-\frac{2}{3}g_2}{\varphi'(u)}\right]. \tag{13}$$

Внося изъ (8) и (13) въ (5), будемъ имѣть результатъ, который легко такъ представить:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{2\frac{\delta\varphi(u)}{\varphi'(u)}+2\left(u+2\frac{\varphi(u)}{\varphi'(u)}\right)d_1+\left[2\left(\frac{\partial\log\Phi(u)}{\partial u}-c'u\right)+\frac{4\varphi^2(u)-\frac{2}{3}g_2}{\varphi'(u)}\right]d_2\right\}=0. \tag{14}$$

Это равенство говоритъ намъ, что выраженіе въ скобкахъ { } отъ u независитъ, иначе есть постоянное; но какъ оно нечетное, то это постоянное можетъ быть только нулемъ. Итакъ:

$$2\frac{\delta\varphi(u)}{\varphi'(u)}+2\left(u+2\frac{\varphi(u)}{\varphi'(u)}\right)d_1+\left[2\left(\frac{\partial\log\Phi(u)}{\partial u}-c'u\right)+\frac{4\varphi^2(u)-\frac{2}{3}g_2}{\varphi'(u)}\right]d_2=0, \quad (15)$$

или, умножая на $\varphi'(u)$:

$$2\delta\varphi(u)+2[u\varphi'(u)+2\varphi(u)]d_1+\left[2\left(\frac{\partial\log\Phi(u)}{\partial u}-c'u\right)\varphi'(u)+4\varphi^2(u)-\frac{2}{3}g_2\right]d_2=0. \quad (16)$$

Но теперь изъ (5) пред. §, совершая операцію δ, получимъ:

$$\delta\varphi(u)=-\frac{\partial^2[\delta\log\Phi(u)]}{\partial u^2}; \quad (17)$$

далѣе изъ очевиднаго по (5) пред. § равенства:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(u\frac{\partial\log\Phi(u)}{\partial u}\right)=\frac{\partial\log\Phi(u)}{\partial u}-u\varphi(u)+c'u, \quad (18)$$

дифференцируя еще разъ, опять по тому же (5) пред. § получимъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(u\frac{\partial\log\Phi(u)}{\partial u}\right)&=\frac{\partial^2\log\Phi(u)}{\partial u^2}-\varphi(u)+c'-u\varphi'(u)=\\&=2c'-2\varphi(u)-u\varphi'(u),\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

откуда получаемъ:

$$c'-2\varphi(u)-u\varphi'(u)=\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(u\frac{\partial\log\Phi(u)}{\partial u}\right)-c'=\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(u\frac{\partial\log\Phi(u)}{\partial u}-c'\frac{u^2}{2}\right), \quad (20)$$

и

$$u\varphi'(u)+2\varphi(u)=2c'-\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(u\frac{\partial\log\Phi(u)}{\partial u}\right)=\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(c'u^2-u\frac{\partial\log\Phi(u)}{\partial u}\right). \quad (21)$$

Раскрывая теперь вторую часть (5) *), будемъ имѣть оттуда:

*) Это сдѣлано во (2) § 90.

$$\frac{\Phi''(u)}{\Phi(u)} = c' - \varphi(u) + \left(\frac{\partial \log \Phi(u)}{\partial u}\right)^2; \tag{22}$$

дифференцируя это по u до двухъ разъ и пользуясь (5) этого § и § 74, потомъ (20) настоящаго §, будемъ имѣть:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\Phi''(u)}{\Phi(u)}\right) = -\varphi'(u) + 2\frac{\partial \log \Phi(u)}{\partial u}[c' - \varphi(u)]; \tag{23}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\frac{\Phi''(u)}{\Phi(u)}\right) &= -\left(6\varphi^2(u) - \frac{1}{2}g_2\right) + 2[c' - \varphi(u)]^2 - 2\varphi'(u)\frac{\partial \log \Phi(u)}{\partial u} = \\ &= -4\varphi^2(u) + \frac{1}{2}g_2 + 2c'[c' - 2\varphi(u) - u\varphi'(u)] - 2\varphi'(u)\left(\frac{\partial \log \Phi(u)}{\partial u} - c'u\right) = \\ &= -4\varphi^2(u) + \frac{1}{2}g_2 + 2c'\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(u\frac{\partial \log \Phi(u)}{\partial u} - c'\frac{u^2}{2}\right) - 2\varphi'(u)\left(\frac{\partial \log \Phi(u)}{\partial u} - c'u\right); \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

отсюда будемъ имѣть послѣ легкихъ преобразованій:

$$\left.\begin{aligned} & 4\varphi^2(u) - \frac{2}{3}g_2 + 2\varphi'(u)\left(\frac{\partial \log \Phi(u)}{\partial u} - c'u\right) = \\ & = \frac{\partial^2}{\partial u^2}\left[-\left(\frac{1}{12}g_2 + c'^2\right)u^2 + 2c'\left(u\frac{\partial \log \Phi(u)}{\partial u} - \frac{\Phi''(u)}{\Phi(u)}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Внося теперь изъ (17), (21) и (25) въ (16), мы дадимъ этому равенству такой видъ:

$$\left.\begin{aligned} & -\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left\{2\delta \log \Phi(u) + 2\left(u\frac{\partial \log \Phi(u)}{\partial u} - c'u^2\right)d_1 + \right. \\ & \left. + \left[\frac{\Phi''(u)}{\Phi(u)} - 2c'u\frac{\partial \log \Phi(u)}{\partial u} + \left(\frac{1}{12}g_2 + c'^2\right)u^2\right]d_2\right\} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Это равенство говоритъ намъ, что выраженіе въ скобкахъ { } есть линейная функція отъ u; но какъ она четная, какъ нетрудно видѣть, то эта линейная функція отъ u можетъ имѣть лишь нуль коэффиціентомъ при u, другими словами есть постоянное. Итакъ:

$$\left.\begin{aligned} & 2\delta \log \Phi(u) + 2\left(u\frac{\partial \log \Phi(u)}{\partial u} - c'u^2\right)d_1 + \\ & + \left[\frac{\Phi''(u)}{\Phi(u)} - 2c'u\frac{\partial \log \Phi(u)}{\partial u} + \left(\frac{1}{12}g_2 + c'^2\right)u^2\right]d_2 = C. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Эту постоянную можно опредѣлить, давъ u какое либо частное значеніе, напримѣръ принявъ $u=0$. Изъ (4) § 155, гдѣ лѣвая часть представляетъ именно $\log \Phi(u)$, видно, что

$$\delta \log \Phi(u)\big|_{u=0} = 0, \tag{28}$$

ибо отъ g_2 и g_3 правая часть зависитъ чрезъ посредство ω и ω', дифференцированіе же по этимъ величинамъ, какъ легко видѣть изъ (10) и (11), не даетъ членовъ, несодержащихъ въ числителѣ множителемъ положительной степени u. Далѣе будетъ:

$$u\frac{\partial \log \Phi(u)}{\partial u} = u\frac{\Phi'(u)}{\Phi(u)} = \frac{\Phi'(u)}{\dfrac{\Phi(u)}{u}} \tag{29}$$

$=1$ при $u=0$, когда $\Phi(u)$ означаемъ основную $\Theta(u)$, и $=0$, когда $\Phi(u)$ означаетъ какую-либо изъ союзныхъ Θ-функцій, ибо тогда не будетъ $\Phi(0)=0$, какъ въ первомъ случаѣ, но будетъ $\Phi'(0)=0$, какъ производная четной функціи. Далѣе въ первомъ случаѣ будетъ:

$$\frac{\Phi''(u)}{\Phi(u)}\bigg|_{u=0} = 3c', \tag{30}$$

какъ то слѣдуетъ изъ (1) § 90, гдѣ только нужно будетъ вмѣсто $\dfrac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} = \zeta(u)$ [(17) § 89] поставить ея разложеніе изъ (1) § 213; для случая же союзной $\Theta_i(u)$, это приведется къ $c'-e_i$. Въ самомъ дѣлѣ изъ (12) § 155 имѣемъ:

$$\log \Theta_i(u) = (c'-e_i)\frac{u^2}{2} + \log \psi(u), \tag{31}$$

гдѣ

$$\psi(u) = \prod_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n}\left(1-\frac{u}{w_i}\right)e^{\frac{u}{w_i}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{w_i^2}}; \tag{32}$$

отсюда

$$\frac{\Theta_i''(u)}{\Theta_i(u)} - \left(\frac{\Theta_i'(u)}{\Theta_i(u)}\right)^2 = c'-e_i + \frac{\psi''(u)}{\psi(u)} - \left(\frac{\psi'(u)}{\psi(u)}\right)^2; \tag{33}$$

*

но $\Theta_i(u)$ четная функція u (какъ то слѣдуетъ изъ (3) § 155, которое можно такъ написать:

$$\frac{\Theta(\omega_i + u)}{\Theta(\omega_i)} e^{-\eta_i u} = \frac{\Theta(\omega_i - u)}{\Theta(\omega_i)} e^{\eta_i u} \Big), \tag{34}$$

а потому $\Theta_i'(u) = 0$ при $u = 0$; равнымъ образомъ и $\psi(u)$ есть четная функція отъ u, какъ нетрудно видѣть, а потому $\psi'(u) = 0$ при $u = 0$; слѣдовательно для $u = 0$ изъ (33) будемъ имѣть:

$$\frac{\Theta_i''(0)}{\Theta_i(0)} = c' - e_i + \frac{\psi''(0)}{\psi(0)} = c' - e_i, \tag{35}$$

ибо

$$\frac{\psi''(0)}{\psi(0)} = 0. \tag{36}$$

Дѣйствительно:

$$\log \psi(u) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n} \left[\log\left(1 - \frac{u}{w_i}\right) + \frac{u}{w_i} + \frac{1}{2}\frac{u}{w_i^2} \right]; \tag{37}$$

если это разложить въ рядъ, то нисшая степень u, которая здѣсь остается, будетъ u^3; слѣдовательно

$$\log \psi(u) = u^3 \mathfrak{P}(u^2), \tag{38}$$

и потому

$$\psi'(u) = u^2 \mathfrak{P}_1(u^2) \psi(u) = u^2 \mathfrak{P}_2(u),$$

[ибо $\psi(u) = 1 + u \mathfrak{P}_3(u)$]; далѣе:

$$\psi''(u) = u \mathfrak{P}_4(u),$$

слѣдовательно

$$\psi''(0) = 0.$$

На основаніи этого, полагая $u = 0$ въ (27), получимъ для перваго случая:

$$C = 2d_1 + c'd_2; \tag{39}$$

для второго:

$$C = c' - e_i. \tag{40}$$

Внося эти значенія въ (27) будемъ имѣть для основной Θ-функціи:

$$\left.\begin{aligned}&2\delta\log\Theta(u)+\left[2\left(u\frac{\partial\log\Theta(u)}{\partial u}-1\right)-c'u^2\right]d_1+\\&+\left[\frac{\Theta''(u)}{\Theta(u)}-c'-2c'\left(u\frac{\partial\log\Theta(u)}{\partial u}\right)+\left(\frac{1}{12}g_2+c'^2\right)u^2\right]d_2=0,\end{aligned}\right\}\quad(41)$$

для союзной $\Theta_i(u)$:

$$\left.\begin{aligned}&2\delta\log\Theta_i(u)+2\left[u\frac{\partial\log\Theta_i(u)}{\partial u}-c'u^2\right]d_1+\\&+\left[\frac{\Theta_i''(u)}{\Theta_i(u)}-c'+e_i-2c'\left(u\frac{\partial\log\Theta_i(u)}{\partial u}\right)+\left(\frac{1}{12}g_2+c'^2\right)u^2\right]d_2=0.\end{aligned}\right\}\quad(42)$$

217. Каждое изъ этихъ уравненій распадается на два. Мы имѣемъ:

$$\delta\log\Phi(u)=\frac{\partial\log\Phi(u)}{\partial g_2}\delta g_2+\frac{\partial\log\Phi(u)}{\partial g_3}\delta g_3;\quad(1)$$

внося сюда вмѣсто δg_2 и δg_3 ихъ выраженія чрезъ d_1 и d_2 изъ (3) пред. §, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}\delta\log\Phi(u)=&-\left(4g_2\frac{\partial\log\Phi(u)}{\partial g_2}+6g_3\frac{\partial\log\Phi(u)}{\partial g_3}\right)d_1-\\&-\left(6g_3\frac{\partial\log\Phi(u)}{\partial g_3}+\frac{1}{3}g_2^2\frac{\partial\log\Phi(u)}{\partial g_3}\right)d_2;\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

на основаніи этого равенства (41) и (42) пред. § по произвольности величинъ d_1 и d_2 распадаются каждое на два: (41) на два такихъ:

$$\left(u\frac{\partial\log\Theta(u)}{\partial u}-1\right)-4g_2\frac{\partial\log\Theta(u)}{\partial g_2}-6g_3\frac{\partial\log\Theta(u)}{\partial g_3}-\frac{1}{2}c'u^2=0\ ^{*});\quad(3)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\Theta''(u)}{\Theta(u)}-2c'\left(u\frac{\partial\log\Theta(u)}{\partial u}\right)-12g_3\frac{\partial\log\Theta(u)}{\partial g_2}-\frac{2}{3}g_2^2\frac{\partial\log\Theta(u)}{\partial g_3}+\\&+\left(\frac{1}{12}g_2+c'^2\right)u^2-c'=0,\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

*) По раздѣленіи на 2.

(42) на два такихъ:

$$u\frac{\partial \log \Theta_i(u)}{\partial u} - 4g_2\frac{\partial \log \Theta_i(u)}{\partial g_2} - 6g_3\frac{\partial \log \Theta_i(u)}{\partial g_3} - c'u^2 = 0\,,^{*)} \qquad (5)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\Theta_i''(u)}{\Theta_i(u)} - 2c'u\frac{\partial \log \Theta_i(u)}{\partial u} - 12g_3\frac{\partial \log \Theta_i(u)}{\partial g_2} - \frac{2}{3}g_2^2\frac{\partial \log \Theta_i(u)}{\partial g_3} + \\ &\qquad + \left(\frac{1}{12}g_2 + c'^2\right)u^2 - c' + e_i = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Умножая (3) и (4) на $\Theta(u)$, (5) и (6) на $\Theta_i(u)$, мы дадимъ этимъ равенствамъ такой видъ:

$$u\frac{\partial \Theta(u)}{\partial u} - 4g_2\frac{\partial \Theta(u)}{\partial g_2} - 6g_3\frac{\partial \Theta(u)}{\partial g_3} - \left(1 + \frac{1}{2}c'u^2\right)\Theta(u) = 0\,; \qquad (7)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 \Theta(u)}{\partial u^2} - 2c'u\frac{\partial \Theta(u)}{\partial u} - 12g_3\frac{\partial \Theta(u)}{\partial g_2} - \frac{2}{3}g_2^2\frac{\partial \Theta(u)}{\partial g_3} + \\ &\qquad + \left[\left(\frac{1}{12}g_2 + c'^2\right)u^2 - c'\right]\Theta(u) = 0;\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

$$u\frac{\partial \Theta_i(u)}{\partial u} - 4g_2\frac{\partial \Theta_i(u)}{\partial g_2} - 6g_3\frac{\partial \Theta_i(u)}{\partial g_3} - c'u^2\Theta_i(u) = 0\,; \qquad (9)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 \Theta_i(u)}{\partial u^2} - 2c'u\frac{\partial \Theta_i(u)}{\partial u} - 12g_3\frac{\partial \Theta_i(u)}{\partial g_2} - \frac{2}{3}g_2^2\frac{\partial \Theta_i(u)}{\partial g_3} + \\ &\qquad + \left[\left(\frac{1}{12}g_2 + c'^2\right)u^2 - c' + e_i\right]\Theta_i(u) = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

218. Эти уравненія принимаютъ болѣе простой видъ для того частнаго случая Θ-функціи, для котораго $c' = 0$: въ этомъ случаѣ Θ-функціи переходятъ въ σ-функціи, для которыхъ такимъ образомъ будемъ имѣть слѣдующія уравненія въ частныхъ производныхъ:

*) По раздѣленіи на 2.

$$u\frac{\partial\sigma(u)}{\partial u}-4g_2\frac{\partial\sigma(u)}{\partial g_2}-6g_3\frac{\partial\sigma(u)}{\partial g_3}-\sigma(u)=0\,, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2\sigma(u)}{\partial u^2}-12g_3\frac{\partial\sigma(u)}{\partial g_2}-\frac{2}{3}g_2^2\frac{\partial\sigma(u)}{\partial g_3}+\frac{1}{12}g_2u^2\sigma(u)=0\,; \tag{2}$$

$$u\frac{\partial\sigma_i(u)}{\partial u}-4g_3\frac{\partial\sigma_i(u)}{\partial g_2}-6g_3\frac{\partial\sigma_i(u)}{\partial g_3}=0\,, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2\sigma_i(u)}{\partial u^2}-12g_3\frac{\partial\sigma_i(u)}{\partial g_2}-\frac{2}{3}g_2^2\frac{\partial\sigma_i(u)}{\partial g_3}+\left(\frac{1}{12}g_2u^2+e_i\right)\sigma_i(u)=0. \tag{4}$$

Уравненіе (1) выведено Halphen'омъ на основаніи теоремы Эйлера объ однородныхъ функціяхъ, ибо $\sigma(u)$, какъ то видно изъ ея разложенія на множители [(1) § 157], есть однородная функція перваго измѣренія относительно величинъ u, ω, ω'; если же разсматривать эту функцію зависящею отъ послѣднихъ двухъ чрезъ посредство инваріантовъ, то будетъ:

$$\frac{\partial\sigma(u)}{\partial\omega}=\frac{\partial\sigma(u)}{\partial g_2}\frac{\partial g_2}{\partial\omega}+\frac{\partial\sigma(u)}{\partial g_3}\frac{\partial g_3}{\partial\omega}\,; \tag{5}$$

$$\frac{\partial\sigma(u)}{\partial\omega'}=\frac{\partial\sigma(u)}{\partial g_2}\frac{\partial g_2}{\partial\omega'}+\frac{\partial\sigma(u)}{\partial g_3}\frac{\partial g_3}{\partial\omega'}\,; \tag{6}$$

помножая первое на ω, второе на ω' и складывая, получимъ:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma(u)}{\partial\omega}\omega+\frac{\partial\sigma(u)}{\partial\omega'}\omega'=\\&=\frac{\partial\sigma(u)}{\partial g_2}\left(\frac{\partial g_2}{\partial\omega}\omega+\frac{\partial g_2}{\partial\omega'}\omega'\right)+\frac{\partial\sigma(u)}{\partial g_3}\left(\frac{\partial g_3}{\partial\omega}\omega+\frac{\partial g_3}{\partial\omega'}\omega'\right);\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

но изъ (3) и (4) § 77 и (8) § 151 видно, что g_2 и g_3 однородныя функціи величинъ ω и ω' соотвѣтственно измѣреній -4 и -6, а потому по теоремѣ Эйлера будетъ:

$$\frac{\partial g_2}{\partial\omega}\omega+\frac{\partial g_2}{\partial\omega'}\omega'=-4g_2\,; \tag{8}$$

$$\frac{\partial g_3}{\partial\omega}\omega+\frac{\partial g_3}{\partial\omega'}\omega'=-6g_3\,; \tag{9}$$

и потому (7) приметъ такой видъ:

$$\frac{\partial \sigma(u)}{\partial \omega}\omega + \frac{\partial \sigma(u)}{\partial \omega'}\omega' = -4g_2\frac{\partial \sigma(u)}{\partial g_2} - 6g_3\frac{\partial \sigma(u)}{\partial g_3}. \tag{10}$$

Теперь по той же теоремѣ Эйлера будетъ:

$$\frac{\partial \sigma(u)}{\partial u}u + \frac{\partial \sigma(u)}{\partial \omega}\omega + \frac{\partial \sigma(u)}{\partial \omega'}\omega' = \sigma(u), \tag{11}$$

такъ какъ $\sigma(u)$ перваго измѣренія относительно u, ω, ω'; внося сюда изъ (10), получимъ:

$$u\frac{\partial \sigma(u)}{\partial u} - 4g_2\frac{\partial \sigma(u)}{\partial g_2} - 6g_3\frac{\partial \sigma(u)}{\partial g_3} = \sigma(u), \tag{12}$$

откуда по перенесеніи $\sigma(u)$ налѣво отъ знака равенства и получится равенство (1).

Точно также $\sigma_i(u)$ есть однородная функція тѣхъ же величинъ нулевого измѣренія, какъ то видно изъ ея разложенія на множители [(2) § 157] и (8) § 151, а потому по теоремѣ Эйлера будетъ:

$$\frac{\partial \sigma_i(u)}{\partial u}u + \frac{\partial \sigma_i(u)}{\partial \omega}\omega + \frac{\partial \sigma_i(u)}{\partial \omega'}\omega' = 0; \tag{13}$$

отсюда, такъ какъ преобразованіе (10) имѣетъ мѣсто и для этой функціи $\sigma_i(u)$, мы и получимъ равенство (3).

Однородность функцій $\sigma(u)$ и $\sigma_i(u)$ относительно u, ω, ω' и болѣе простая форма ихъ разложеній причиною, почему теперь, начиная съ открывшаго ихъ Вейерштрасса, ихъ главнымъ образомъ и разсматриваютъ въ теоріи эллиптическихъ функцій германскіе ученые, а вслѣдъ за ними и ученые другихъ странъ. Въ слѣдующемъ § мы покажемъ, какъ съ помощью найденныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ (2) и (4) Вейерштрассъ опредѣляетъ коэффиціенты при степеняхъ u въ разложеніи этихъ функцій $\sigma(u)$ и $\sigma_i(u)$, ограничиваясь лишь ими потому, что болѣе общія Θ-функціи выражаются очень просто чрезъ эти функцій при помощи формулъ (6) и (7) § 157; разложенія же ихъ самихъ, вслѣдствіе зависимости ихъ отъ c', не обѣщаютъ быть просты.

219. Разсматривая функцію $\sigma(u)$ какъ функцію отъ u, g_2, g_3, характера цѣлой функціи этихъ перемѣнныхъ, мы можемъ искать для нея разложеніе такого вида:

$$\sigma(u) = \sum_m^{\infty}{}_0 \sum_n^{\infty}{}_0 \sum_r^{\infty}{}_0 A_{m,n,r}\, g_2^m g_3^n u^r; \tag{1}$$

внося это въ (1) пред. §, которому оно должно удовлетворять тождественно, мы будемъ имѣть:

$$\sum_0^\infty{}_m \sum_0^\infty{}_n \sum_0^\infty{}_r (r-4m-6n-1)A_{m,n,r}\, g_2^m g_3^n u^r = 0\,, \tag{2}$$

откуда будетъ слѣдовать, что должно быть:

$$r-4m-6n-1=0\,, \tag{3}$$

откуда найдемъ

$$r=4m+6n+1\,. \tag{4}$$

На основанiи этого разложенiю (1) можно дать такую форму, измѣняя нѣсколько коэффицiенты:

$$\sigma(u)=\sum_0^\infty{}_m \sum_0^\infty{}_n a_{m,n}\left(\frac{1}{2}g_2\right)^m \left(2g_3\right)^n \frac{u^{4m+6n+1}}{(4m+6n+1)!}. \tag{5}$$

Внося это разложенiе въ равенство (2) пред. §, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_0^\infty{}_m \sum_0^\infty{}_n \Bigg\{ a_{m,n}\left(\frac{1}{2}g_2\right)^m \left(2g_3\right)^n \frac{u^{4m+6n-1}}{(4m+6n-1)!}- \\
&-3a_{m,n}\cdot m\left(\frac{1}{2}g_2\right)^{m-1} (2g_3)^{n+1}\cdot\frac{u^{4m+6n+1}}{(4m+6n+1)!}- \\
&-\frac{16}{3}a_{m,n}\cdot n\left(\frac{1}{2}g_2\right)^{m+2} (2g_3)^{n-1}\cdot\frac{u^{4m+6n+1}}{(4m+6n+1)!}+ \\
&+\frac{1}{6}a_{m,n}\left(\frac{1}{2}g_2\right)^{m+1} (2g_2)^{n}\cdot\frac{u^{4m+6n+3}}{(4m+6n+1)!}\Bigg\}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Отбирая члены, множащiеся на одинаковыя степени трехъ перемѣнныхъ u, g_2, g_3, мы должны во второй строчкѣ перемѣнить m на $m+1$, n на $n-1$, чтобы имѣть такiя же степени g_2 и g_3, какъ въ первой строчкѣ; тогда получится и для u тотъ же показатель, какъ въ первой строчкѣ, ибо

$$4(m+1)+6(n-1)+1=4m+6n-1\,;$$

въ третьей должно перемѣнить m на $m-2$ и n на $n+1$, что опять даетъ тотъ же показатель для u, ибо

$$4(m-2)+6(n+1)+1=4m+6n-1\,;$$

наконецъ въ послѣдней строчкѣ должно перемѣнить m на $m-1$, оставляя тоже n; тогда u опять будетъ имѣть тотъ же показатель, ибо

$$4(m-1)+6n+3=4m+6n-1\,;$$

но дѣлитель этой степени будетъ другой, ибо

$$4(m-1)+6n+1=4m+6n-3\,.$$

Такимъ образомъ собирая вмѣстѣ члены, множащіеся на $\left(\frac{1}{2}g_2\right)^m(2g_3)^n\frac{u^{4m+6n-1}}{(4m+6n-1)!}$, мы будемъ имѣть для коэффиціента его слѣдующее выраженіе, которое приравниваемъ нулю:

$$\left.\begin{aligned}&a_{m,n}-3(m+1)a_{m+1,n-1}-\frac{16}{3}(n+1)a_{m-2,n+1}+\\&+\frac{1}{3}(2m+3n-1)(4m+6n-1)a_{m-1,n}=0\,.\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

Отсюда получаемъ такую возвратную формулу для послѣдовательнаго вычисленія коэффиціентовъ:

$$\left.\begin{aligned}a_{m,n}=&\,3(m+1)a_{m+1,n-1}-\frac{16}{3}(n+1)a_{m-2,n+1}+\\&+\frac{1}{3}(2m+3n-1)(4m+6n-1)a_{m-1,n}\,.\end{aligned}\right\}\qquad(8)$$

При употребленіи этой формулы, каждый коэффиціентъ, получающій отрицательный значекъ, долженъ быть принимаемъ $=0$, а коэффиціентъ $a_{0,0}=1$, ибо разложеніе $\sigma(u)$ начинается съ члена u, какъ о томъ можно судить по опредѣляющему ее равенству (1) § 157 *).

220. Гальфенъ иначе находитъ разложеніе $\sigma(u)$ въ рядъ по степенямъ u. Такъ какъ изъ (1) § 157 видно, что первымъ членомъ разложенія этой нечетной функціи должно быть u, члена же съ u^3 не будетъ въ этомъ разложеніи, такъ какъ изъ (1) § 213 видно, что при $c'=0$ интегралъ $\int_{u_0}^{u}\zeta(u)du$ будетъ послѣ члена $\log u$ содержать тотчасъ членъ съ u^4, то онъ полагаетъ:

*) Коэффиціенты $a_{m,n}$ для всѣхъ m и n, для которыхъ число $4m+6n+1$ не превосходитъ число 35, даны въ таблицѣ, помѣщенной на стр. 7 Шварца „Formeln und Lehrzätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen“.

$$\sigma(u) = u + \sum_{n=2}^{n=\infty} b_n \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}, \tag{1}$$

гдѣ b_n функціи g_2 и g_3. Подставляя это разложеніе въ (1) § 218, онъ находитъ такую формулу для послѣдовательнаго вычисленія коэффиціентовъ:

$$b_n = 12 g_3 \frac{\partial b_{n-1}}{\partial g_2} + \frac{2}{3} g_2^2 \frac{\partial b_{n-1}}{\partial g_3} - \frac{(2n-1)(n-1)}{6} g_2 b_{n-2}. \tag{2}$$

Эта формула упрощается, если положить:

$$g_2 = 2h_2; \quad g_3 = \frac{2}{3} h_3; \tag{3}$$

тогда она приметъ такой видъ:

$$b_n = 4\left(h_3 \frac{\partial b_{n-1}}{\partial h_2} + h_2^2 \frac{\partial b_{n-1}}{\partial h_3} \right) - \frac{(2n-1)(n-1)}{3} h_2 b_{n-2}. \tag{4}$$

Отсюда послѣдовательно онъ находитъ:

$$\left.\begin{aligned} &b_2 = -h_2; \quad &&b_3 = -4h_3; \quad &&b_4 = -9h_2^2; \\ &b_5 = -24h_2h_3; \quad &&b_6 = -3.2^7.h_3^2 + 3.23h_2^3; \\ &b_7 = 2^2.3^2.19h_2^2h_3^2; \quad &&b_8 = 3h_2(2^7.23h_3^2 + 107h_2^3); \ldots \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

221. Вейерштрассъ въ упомянутомъ литографированномъ мемуарѣ для союзныхъ $\sigma_i(u)$ даетъ разложеніе въ рядъ по степенямъ u, предполагая коэффиціенты выраженными не черезъ инваріанты g_2 и g_3, но чрезъ величины e_i и ε_i, причемъ

$$\varepsilon_i = (e_i - e_j)(e_i - e_k), \tag{1}$$

гдѣ e_i корни полинома $4s^3 - g_2 s - g_3$, и притомъ разлагаетъ въ рядъ собственно то безконечное произведеніе, которое входитъ въ формулу (2) § 157. Инваріанты g_2 и g_3 очень просто выражаются чрезъ эти величины. Изъ (3) § 77 при помощи (2) того же § будемъ имѣть:

$$g_2 = -4[e_i(e_j + e_k) + e_j e_k] = 4(e_i^2 - e_j e_k); \tag{2}$$

изъ (1) настоящаго § при помощи той же формулы получимъ:

$$\varepsilon_i = e_i^2 - e_i(e_j + e_k) + e_j e_k = 2e_i^2 + e_j e_k, \tag{3}$$

на основанiи чего предыдущее такъ представится:

$$g_2 = 4(3e_i^2 - \varepsilon_i). \tag{4}$$

Изъ тождества:

$$4e_i^3 - g_2 e_i - g_3 = 0 \tag{5}$$

имѣемъ:

$$g_3 = 4e_i^3 - g_2 e_i; \tag{6}$$

внося сюда вмѣсто g_2 его выраженіе изъ (4), будемъ имѣть:

$$g_3 = 4e_i(\varepsilon_i - 2e_i^2). \tag{7}$$

[Замѣтимъ, что по извѣстной формулѣ Высшей Алгебры:

$$\varepsilon_i = \frac{1}{4}\frac{\partial S}{\partial s}\bigg|_{s=e_i} = 3e_i^2 - \frac{1}{4}g_2, \tag{8}$$

откуда опять слѣдуетъ (4)].

222. Теперь:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\sigma(u)}{\partial e_i} &= \frac{\partial\sigma(u)}{\partial g_2}\cdot\frac{\partial g_2}{\partial e_i} + \frac{\partial\sigma(u)}{\partial g_3}\cdot\frac{\partial g_3}{\partial e_i}; \\ \frac{\partial\sigma(u)}{\partial\varepsilon_i} &= \frac{\partial\sigma(u)}{\partial g_2}\cdot\frac{\partial g_2}{\partial\varepsilon_i} + \frac{\partial\sigma(u)}{\partial g_3}\cdot\frac{\partial g_3}{\partial\varepsilon_i}; \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

изъ (4) и (7) пред. § имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial g_2}{\partial e_i} &= 24e_i; \quad \frac{\partial g_3}{\partial e_i} = 4(\varepsilon_i - 6e_i^2); \\ \frac{\partial g_2}{\partial\varepsilon_i} &= -4; \quad \frac{\partial g_3}{\partial\varepsilon_i} = 4e_i; \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

внося это въ (1), по раздѣленіи на 4 будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{4}\frac{\partial\sigma(u)}{\partial e_i}&=6e_i\frac{\partial\sigma(u)}{\partial g_2}+(\varepsilon_i-6e_i^2)\frac{\partial\sigma(u)}{\partial g_3};\\ \frac{1}{4}\frac{\partial\sigma(u)}{\partial\varepsilon_i}&=-\frac{\partial\sigma(u)}{\partial g_2}+e_i\frac{\partial\sigma(u)}{\partial g_3};\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

рѣшая эти равенства, получимъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma(u)}{\partial g_2}&=\frac{1}{4\varepsilon_i}\left[e_i\frac{\partial\sigma(u)}{\partial e_i}+(6e_i^2-\varepsilon_i)\frac{\partial\sigma(u)}{\partial\varepsilon_i}\right];\\ \frac{\partial\sigma(u)}{\partial g_3}&=\frac{1}{4\varepsilon_i}\left[\frac{\partial\sigma(u)}{\partial e_i}+6e_i\frac{\partial\sigma(u)}{\partial\varepsilon_i}\right].\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

Помножая первое изъ этихъ на (4) пред. §, умноженное на 4, второе на (6) пред. §, умноженное на 6, получимъ:

$$4g_2\frac{\partial\sigma(u)}{\partial g_2}+6g_3\frac{\partial\sigma(u)}{\partial g_3}=2e_i\frac{\partial\sigma(u)}{\partial e_i}+4\varepsilon_i\frac{\partial\sigma(u)}{\partial\varepsilon_i}.\qquad(5)$$

Здѣсь вмѣсто $\sigma(u)$ можно поставить какую угодно функцію тѣхъ же перемѣнныхъ, стало быть и союзную $\sigma_j(u)$. На основаніи этого уравненія (1) и (3) § 218 такъ представятся:

$$u\frac{\partial\sigma(u)}{\partial u}-2e_i\frac{\partial\sigma(u)}{\partial e_i}-4\varepsilon_i\frac{\partial\sigma(u)}{\partial\varepsilon_i}-\sigma(u)=0;\qquad(6)$$

$$u\frac{\partial\sigma_j(u)}{\partial u}-2e_i\frac{\partial\sigma_j(u)}{\partial e_i}-4\varepsilon_i\frac{\partial\sigma_j(u)}{\partial\varepsilon_i}=0,\qquad(7)$$

гдѣ мы значекъ i формулы (3) § 218 перемѣнили на j, такъ какъ они могутъ быть и различны, хотя въ дальнѣйшемъ мы воспользуемся только случаемъ $j=i$.

Точно также, помножая первое изъ (3) наст. § на (6) пред. §, умноженное на 12, второе на квадратъ (4) пред. §, умноженный на $\frac{2}{3}$, по сложеніи результатовъ получимъ:

$$12g_3\frac{\partial\sigma(u)}{\partial g_2}+\frac{2}{3}g_2^2\frac{\partial\sigma(u)}{\partial g_3}=4\left\{\left(\frac{2}{3}\varepsilon_i-e_i^2\right)\frac{\partial\sigma(u)}{\partial e_i}+e_i\varepsilon_i\frac{\partial\sigma(u)}{\partial\varepsilon_i}\right\}.\qquad(8)$$

На основаніи этого и (4) пред. § уравненія (2) и (4) § 218 примутъ такой видъ:

$$\frac{\partial^2\sigma(u)}{\partial u^2}-4\left\{\left(\frac{2}{3}\varepsilon_i-e_i^2\right)\frac{\partial\sigma(u)}{\partial e_i}+e_i\varepsilon_i\frac{\partial\sigma(u)}{\partial\varepsilon_i}\right\}+\left(e_i^2-\frac{1}{3}\varepsilon_i\right)u^2\sigma(u)=0\,; \qquad (9)$$

$$\frac{\partial^2\sigma_j(u)}{\partial u^2}-4\left\{\left(\frac{2}{3}\varepsilon_i-e_i^2\right)\frac{\partial\sigma_j(u)}{\partial e_i}+e_i\varepsilon_i\frac{\partial\sigma_i(u)}{\partial\varepsilon_i}\right\}+\left(e_i^2+e_j-\frac{1}{3}\varepsilon_i\right)u^2\sigma_j(u)=0;\,(10)$$

въ дальнѣйшемъ опять мы ограничимся разсмотрѣніемъ случая $j=i$.

223. Обозначая чрезъ $\psi_i(u)$ безконечное произведеніе, входящее въ (2) § 157:

$$\psi_i(u)=\prod_{m,n}{}_{-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{u}{w_i}\right)e^{\frac{u}{w_i}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{w_i^2}}, \qquad (1)$$

будемъ имѣть:

$$\sigma_i(u)=\psi_i(u)e^{-\frac{1}{2}e_iu^2}\,; \qquad (2)$$

дифференцируя это по u до двухъ разъ и по e_i и ε_i по разу, будемъ имѣть:

$$\frac{\partial\sigma_i(u)}{\partial u}=\left(\frac{\partial\psi_i(u)}{\partial u}-\psi_i(u)e_iu\right)e^{-\frac{1}{2}e_iu^2}\,; \qquad (3)$$

$$\frac{\partial^2\sigma_i(u)}{\partial u^2}=\left(\frac{\partial^2\psi_i(u)}{\partial u^2}-2\frac{\partial\psi_i(u)}{\partial u}e_iu-\psi_i(u)e_i(1-e_iu^2)\right)e^{-\frac{1}{2}e_iu^2}\,; \qquad (4)$$

$$\frac{\partial\sigma_i(u)}{\partial e_i}=\left(\frac{\partial\psi_i(u)}{\partial e_i}-\frac{u^2}{2}\psi_i(u)\right)e^{-\frac{1}{2}e_iu^2}\,; \qquad (5)$$

$$\frac{\partial\sigma_i(u)}{\partial\varepsilon_i}=\frac{\partial\psi_i(u)}{\partial\varepsilon_i}e^{-\frac{1}{2}e_iu^2}. \qquad (6)$$

Внося отсюда въ (7) пред. § для $j=i$, будемъ имѣть:

$$u\frac{\partial\psi_i(u)}{\partial u}-2e_i\frac{\partial\psi_i(u)}{\partial e_i}-4\varepsilon_i\frac{\partial\psi_i(u)}{\partial\varepsilon_i}=0\,; \qquad (7)$$

внося въ (10) того же §, получимъ:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2\psi_i(u)}{\partial u^2}-2e_iu\frac{\partial\psi_i(u)}{\partial u}+\left(4e_i^2-\frac{8}{3}\varepsilon_i\right)\frac{\partial\psi_i(u)}{\partial e_i}-\\&-4e_i\varepsilon_i\frac{\partial\psi_i(u)}{\partial\varepsilon_i}+\varepsilon_iu^2\psi_i(u)=0;\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

придавая къ этому равенству предыдущее, умноженное на 2, будемъ имѣть:

$$\frac{\partial^2\psi_i(u)}{\partial u^2}-8\varepsilon_i\left(\frac{1}{3}\frac{\partial\psi_i(u)}{\partial e_i}+\frac{3}{2}e_i\frac{\partial\psi_i(u)}{\partial\varepsilon_i}\right)+\varepsilon_iu^2\psi_i(u)=0.\tag{9}$$

Положимъ вмѣстѣ съ Вейерштрассомъ:

$$\psi_i(u)=\sum_{0}^{\infty}{}_m\sum_{0}^{\infty}{}_n\sum_{0}^{\infty}{}_r\,C_{m,n,r}e_i^m\varepsilon_i^nu^r;\tag{10}$$

внося это въ (7), найдемъ, что должно быть:

$$r-2m-4n=0,\tag{11}$$

если $C_{m,n,r}$ не $=0$; отсюда

$$r=2m+4n.\tag{12}$$

На основаніи этого, измѣняя нѣсколько коэффиціенты въ (10), этому разложенію можно дать такой видъ:

$$\psi_i(u)=\sum_{0}^{\infty}{}_m\sum_{0}^{\infty}{}_n\,c_{m,n}(12e_i)^m(2\varepsilon_i)^n\cdot\frac{u^{2m+4n}}{(2m+4n)!}.\tag{13}$$

Внося это въ (9), будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{0}^{\infty}{}_m\sum_{0}^{\infty}{}_n\Big\{c_{m,n}(12e_i)^m(2\varepsilon_i)^n\cdot\frac{u^{2m+4n-2}}{(2m+4n-2)!}-\\&-\frac{8}{3}\varepsilon_i\cdot c_{m,n}\cdot 12m(12e_i)^{m-1}(2\varepsilon_i)^n\cdot\frac{u^{2m+4n}}{(2m+4n)!}-\\&-12e_i\varepsilon_i\cdot c_{m,n}(12e_i)^m\cdot 2n(2\varepsilon_i)^{n-1}\cdot\frac{u^{2m+4n}}{(2m+4n)!}+\\&+\varepsilon_i\cdot c_{m,n}(12e_i)^m\cdot(2\varepsilon_i)^n\cdot\frac{u^{2m+4n+2}}{(2m+4n)!}\Big\}=0.\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

Отберемъ члены, подобные общему члену въ первой строчкѣ. Для этого надобно изъ второй взять тотъ членъ, въ которомъ m на единицу больше, n на единицу меньше, при чемъ показатель степени u будетъ тотъ же, ибо

$$2(m+1)+4(n-1)=2m+4n-2\,;$$

изъ третьей нужно взять тотъ, въ которомъ m на единицу меньше при томъ же n, причемъ показатель степени u останется тотъ же, ибо

$$2(m-1)+4n=2m+4n-2\,;$$

наконецъ изъ послѣдней тотъ, въ которомъ n на единицу меньше при томъ же m; при этомъ показатель степени u будетъ тотъ же, ибо

$$2m+4(n-1)+2=2m+4n-2\,,$$

но дѣлитель будетъ только

$$(2m+4n-4)!\,;$$

помножая и дѣля на недостающихъ множителей:

$$(2m+4n-3)(2m+4n-2),$$

мы получимъ для коэффиціента разсматриваемаго члена такое выраженіе:

$$c_{m,n}-16(m+1)c_{m+1,n-1}-nc_{m-1,n}+(m+2n-1)(2m+4n-3)c_{m,n-1}; \quad (15)$$

приравнивая его нулю, получимъ уравненіе, изъ котораго найдемъ:

$$c_{m,n}=16(m+1)c_{m+1,n-1}+nc_{m-1,n}-(m+2n-1)(2m+4n-3)c_{m,n-1}. \quad (16)$$

Съ помощію этой формулы найдемъ всѣ коэффиціенты, принимая, какъ то прямо видно, $c_{0,0}=1$, а тѣ $c_{m,n}$, которыхъ одинъ изъ указателей или оба отрицательные, равными нулю *).

Гальфенъ даетъ два другіе способа для разложенія $\sigma_1(u)$ въ рядъ по степенямъ u: одинъ на стр. 237—238, и другой на стр. 302—305.

*) Въ томъ же литографированномъ мемуарѣ Вейерштрассъ даетъ аналогичное разложеніе и для $\sigma(u)$, коэффиціенты котораго онъ обозначаетъ буквою $b_{m,n}$. На стр. 10 этого мемуара находится таблица дающая $b_{m,n}$ и $c_{m,n}$ для значеній $2m+4n$ не превосходящихъ числа 12.

ЗАМѢЧЕННЫЯ ПОГРѢШНОСТИ.

Стр.	Строка	*Напечатано:*	*Должно быть:*
VII	24	потому	по тому
XII	17 сн.	степени x	степени относительно x.
IV	5	положительномъ	въ положительномъ
„	21	Oz'	$O'z'$
VIII	4	$\int_{z_0}^{Z} Udv,$	$\int_{z_0}^{Z} UdV,$
XI	16	$\Phi(X, x) - (x_0, x),$	$\Phi(X, y) - \Phi(x_0, y),$
XIII	6	паралелограмма	параллелограмма
XVI	8	§ 14	§ 15
XVII	24	$i\varepsilon^{\theta i}$	$i\varepsilon e^{\theta i}$
XVIII	2	$\Big\vert_{z=a}$	$\Big\vert_{z=\alpha}$
XIX	14	$\varepsilon^{(m-1)\theta i}$	$e^{(m-1)\theta i}$
„	19	$e^{-(m-1)\theta}$	$e^{-(m-1)\theta i}$
„	21	$\varepsilon^{-(m-1)\theta i}$	$e^{-(m-1)\theta i}$
XXIV	23	ціи	ція
XXV	18	Интегрируя же z_0	Интегрируя же по z_0
XXVI	1	$[\lambda_0 + \theta(z - z_0)]$	$[z_0 + \theta(z - z_0)]$
XXXIII	19	arcccos	arccos
XXXV	8	$-\frac{1}{2}(\varrho_k^2 - 1)$	$-\frac{1}{2}(\varrho_k^2 - 1)^2$
8	3	$\frac{R'(a)}{x - a}$	$\frac{R'(a)}{(x - a)\, 2\sqrt{R(a)}}$
9	9	$dx = -\frac{(a_i - a_j)(a_i - a_k)}{(y - a_i)^2},$	$dx = -\frac{(a_i - a_j)(a_i - a_k)}{(y - a_i)^2}\, dy,$
17	10	$A(c - a_i)$	$A(a_i - c)$
21	13	исклю-	исключе-
22	17	α	α'
„	„	β	β'

Стр.	Строка	*Напечатано:*	*Должно быть:*
24	3	то той-же	по той-же
28	3	$\vert_{x-a_0}$	$\vert_{x=a_0}$
30	24	стрѣлкѣ), то	стрѣлкѣ) m разъ и въ отрицательномъ (по часовой стрѣлкѣ) n разъ, то
31	8	$0'$	O'
43	24	$\frac{da}{2\sqrt{R(a)}}$;	$\frac{da}{2\sqrt{R(a)}}+C$;
44	8	$\varepsilon = t\mathfrak{P}(t^2)$,	$\varepsilon = Ct + t^2\mathfrak{P}(t^2)$,
45	8	§ 31	§ 30
46	21	(11) § 12	(1) § 12
48	7	(4) и (5)	(5) и (6)
„	9	$\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$	$C+\frac{1}{\sqrt{x}}\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$
„	11	$C+\frac{1}{x}\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right)$	$C_1+\frac{1}{\sqrt{x}}\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right)$
„	13	$e^{\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)}$	$e^{C+\frac{1}{\sqrt{x}}\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)}$
„	14	C	C_1
„	3 сн.	$\frac{1}{x}\mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{x}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{x}}\mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{x}\right)$
„	1 сн.	пред. $\left.\frac{K+\frac{1}{x}\mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{x}\right)}{C+\frac{1}{x}\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right)}\right\vert_{x=\infty}=\frac{K}{C}$	пред. $\left.\frac{K+\frac{1}{\sqrt{x}}\mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{x}\right)}{C_1+\frac{1}{\sqrt{x}}\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right)}\right\vert_{x=\infty}=\frac{K}{C_1}$
49	1	$\frac{K}{C}$	$\frac{K}{C_1}$
52	22	E^n	E_1^n
56	14	$2n_1$;	$2m_1$;
65	6	непроходитъ	непроходить
67	7	степень	степени
70	2	$\psi_2(x)$	$\psi_1(x)$
71	1 и 4	$\int_{a_0}^{a}\frac{(a-c)\,da}{2\sqrt{R(a)}}$	$\int_{x_0}^{x}\frac{(x-c)\,dx}{2\sqrt{R(x)}}$
„	5	$[\psi(x_0)+$	$[\varphi(x_0)+$
72	11	$0'$	O'

Стр.	Строка	*Напечатано:*	*Должно быть:*
72	18	обратистя	обратится
74	16	старшими членами будутъ	старшимъ членомъ будетъ
77	24	Anfzeichungen	Aufzeichungen
78	15	знаемъ,	знаемъ,)
86	2	$\int_{a_i}^{x_i}$	$\int_{a_j}^{x_i}$
87	1 сн.	$-\frac{4}{3}B^2$	$+\frac{4}{3}B^2$
88	8	противъ формулы поставить ея номеръ (2′).	
90	10	$4a_1'x'^3$	$4a_1'x'^3y'$
„	„	$4a_3'x'y'^2$	$4a_3'x'y'^3$
92	5 сн.	$+a_0y^2$	$+a_3y^2$
„	2 сн.	x^3y^2	x^3y
94	20	новыя	новыя, если въ опредѣлителѣ (4) пред. § строчки сдѣлать столбцами и наоборотъ.
98	10	$i=3$	$i=4$
104	14	предъ выраженіемъ (19) поставить множитель 2.	
105	4	$+a_1x^3$	$+4a_1x^3$
108	18	x^4	x'^4
109	3 сн.	противъ формулы направо поставить ея номеръ (14)	
111	9	$=k^2R_1(x)$	$=k^2R_1(x')$
113	3 сн.	$r_4(x-x_0)]^4$	$r_4(x-x_0)^4]$
116	2	$\left(\frac{R(x)}{(x-x_0)^2}-\frac{R'(x)}{4(x-x_0)^3}\right)\sqrt{R(x_0)}$	$\left(\frac{R(x)}{(x-x_0)^3}-\frac{R'(x)}{4(x-x_0)^2}\right)\sqrt{R(x_0)}$
„	5	дѣли	дѣли,
120	18	(8)	(7)
121	5	$\wp u+2\omega')$	$\wp(u+2\omega')$
123	10	(7)	(6)
„	„	(5)	(4)
„	11	(6)	(5)
124	2	(5) и (6)	(4) и (5)
„	25	чечкую	ческую
126	18	Бука	Букэ
127	2 сн.	$\wp(u^2)$	$\wp(u)$
135	8 сн.	$u_1\equiv 0$	$u_\lambda\equiv 0$

Стр.	Строка	*Напечатано:*	*Должно быть:*
135	5 сн.	$u \equiv$	$u_\lambda \equiv$
136	9	$\frac{\lambda}{2} - 2$;	$\frac{\lambda}{2} - 2$,
141	1	*параметровъ*	*параметромъ*
141	14	$\wp(u'^2)$	$\mathfrak{P}(u'^2)$
„	15	$\wp_1(u'^2)$	$\mathfrak{P}_1(u'^2)$
161	4	$2\frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)} +$	$2\frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)} u +$
162	11	$c' +$	$c' -$
164	6	$u = \tilde{\omega}$	$u = 2\tilde{\omega}$
167	3	$= - e^{Y(-u)}$	$= - e^{Y(+u)}$
„	17	$\tilde{\eta} = m\omega + n\omega'$;	$\tilde{\eta} = m\eta + n\eta'$;
169	19	$2mn(\eta'\omega - \eta'\omega)$;	$2mn(\eta\omega' - \eta'\omega)$;
172	9	$\zeta(u + \omega)$	$\zeta(u + \omega)$
174	5 сн.	$f(u - \omega')$	$f(u - \omega')$
176	2	$\Phi(u - \omega)$,	$\Phi(-\omega)$,
„	5 сн.	$e^{(a-2\eta')(u+\omega)}$	$e^{(a'-2\eta')(u+\omega')}$
179	16	XXII	XXV
188	5 сн.	$\Theta_i(\omega_i) =$	$\Theta_i(\omega_j) =$
189	3	$-\frac{\Theta'(0)\,\Theta(\omega')e^{\eta\omega''}}{\Theta(\omega')}$;	$-\frac{\Theta'(0)\,\Theta(\omega')e^{\eta\omega''}}{\Theta(\omega)}$;
190	1 сн.	$-e^{\pm\frac{\pi}{2}} =$	$-e^{\pm\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}} =$
192	4	$e^{\frac{\eta_i-\eta_k}{2}\omega_i}$,	$e^{\frac{\eta_j-\eta_k}{2}\omega_i}$,
193	3	$\sqrt[4]{e_1-e_2}$	$\sqrt[4]{e_1-e_3}$
194	5	$e^{\mp\eta_j u}$;	$e^{\pm\eta_j u}$;
„	12	$e^{-\frac{\eta_i\omega_j}{2}}$;	$e^{-\frac{\eta_j\omega_j}{2}}$;
195	2	$e^{\pm\eta_i u}$;	$e^{\pm\eta_j u}$;
„	13	(3)	(3) пред. §
196	9	(17)	(19)
197	5	$\sqrt[4]{e_1-e_2}\cdot\sqrt[4]{e_1-e_2}$	$\sqrt[4]{e_1-e_2}\cdot\sqrt[4]{e_1-e_3}$
198	2	$\pm\frac{1}{\sqrt{i}}$	$\mp\frac{1}{\sqrt{i}}$

Стр.	Строка	*Напечатано*:	*Должно быть*:
199	5 сн.	$-\Theta_1(\omega')$	$-\Theta_1(\omega')$
200	14	квадратъ то	квадратъ, то
203	7	$\Theta_3^2(\omega'')=0$;	$\Theta_3^2(\omega)=0$;
„	17	$\frac{A}{\Theta_3^2(\omega)}$	$\frac{B}{\Theta_3^2(\omega)}$
205	1	$\Theta_i(\omega_k)$	$\Theta_i^2(\omega_k)$
„	7	$\frac{\Theta_i^2(\omega_j)}{\Theta^2(\omega_k)}$	$\frac{\Theta_i^2(\omega_j)}{\Theta^2(\omega_j)}$
211	15	формулъ (5) и (6)	формулы (5) и (6)
223	5	)	);
225	10	единицу	$-\frac{1}{\sqrt{e_i-e_j}}$.

227 и 228 въ формулахъ (1), (2), (3) и (4) переставить значки i и k между собою въ показателѣ степени числа e.

Стр.	Строка	*Напечатано*:	*Должно быть*:
228	3 сн.	$\frac{\Theta(\omega'')}{\Theta(\omega')}$	$\frac{\Theta(\omega')}{\Theta(\omega'')}$
232	13	$\frac{\sqrt{e_i-e_j}}{\sqrt{e_i-e_k}}$	$\frac{\sqrt{e_i-e_k}}{\sqrt{e_i-e_j}}$
237	1	(5)	(7)
239	10	$\Theta_i(u\pm\omega_i)$	$\Theta_j(u\pm\omega_i)$
„	3 сн.	(11)	(12)

241 въ формулахъ (17) и (19) вмѣсто 1 должно быть i.

Стр.	Строка	*Напечатано*:	*Должно быть*:
„	2 сн.	$\mp\frac{i}{\sqrt{e_i-e_j}}\frac{\Theta_i(u)}{\Theta_j(u)}=$	$\mp\frac{i}{\sqrt{e_i-e_j}}\frac{\Theta_i(u)}{\Theta(u)}=$
243	10	но	по
245	9	(6)—(9)	(5)—(8)
246	2 сн.	§ 104	§ 122
248	1	$\mathrm{sn}^2(v_1\mp v_2)$	$\mathrm{sn}^2(v_1\pm v_2)$
249	2	$\pm k^2$	$\mp k^2$
253	18	(1)—(4);	(1)—(4) § 129;
256	1 сн.	$-\int_0^v(c-k^2\sin^2\mathrm{am}\,v)\,dv$.	$-\int_{v_0}^v(c-k^2\sin^2\mathrm{am}\,v)\,dv$.
257	4	сдѣлаемъ, тогда	сдѣлаемъ; тогда
258	2 сн.	ds	ds'
259	3	$s-c$	$s'-c$

Стр.	Строка	*Напечатано:*	*Должно быть:*
259	17	(10)	(9)
260	14 и 15	верхняго	нижняго
261	5	(20)	(21)
262	7 сн.	§ 138	§ 139
266	7	$s-e_i$	$s-e_j$
267	8	e_k-e_i	e_k-e_j
268	5	$v=e_j+\frac{e_i-e_j}{\sin^2 \mathrm{am}\, w}$,	$\wp(v)=e_j+(e_k-e_j)\sin^2 \mathrm{am}\, w$,
275	5	$\frac{1}{k\pi}$	$\frac{1}{\alpha+k\pi}$
„	2 сн.	$\frac{1}{z}+\sum_{-\infty}^{+\infty}($	$\frac{1}{z}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'($
„	1 сн.	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{z}$
279	1 сн.	$=0$,	$=z$,
280	5	$e^{\frac{z}{2k+1}}$	$e^{\frac{z}{(2k+1)\frac{\pi}{2}}}$
„	2 и 1 сн.	$+\frac{1}{\alpha+(k-1)\pi}\Big)=$	$-\frac{1}{\alpha+(k-1)\pi}\Big)=$
281	1 сн.	$(z-\pi)$	$(z+\pi)$
284	4 сн.	бедетъ	будетъ
290	6	$.2u.L$;	. мод. $2u.L$;
292	8	въ выраженіи ω_i;	въ выраженіи w_i;
„	8 сн.	(5)	(10)
„	5 сн.	(3)	(5)
„	4 сн.	приведенія	приведеніи
„	2 сн.	$(u+v)^2$	$(v+w)^2$
293	2	$\left(\frac{-u}{1-\frac{u}{v+w}}\right)$	$\left(\frac{-u^2}{1-\frac{u}{v+w}}\right)$
308	4	$\wp(u\mp\omega_i)$	$\wp(u\pm\omega_i)$
310	3	положить	помножить
„	1 сн.	$\sqrt{e_k-e_i}=-i\sqrt{e_j-e_k}=\mp\frac{k}{\sqrt{\lambda}}$	$\sqrt{e_k-e_j}=i\sqrt{e_j-e_k}=\frac{k}{\sqrt{\lambda}}$
311	9	(17) и (17) и (18)	(17) и (18)
313	2	$n-v$	$u-v$

Стр.	Строка	*Напечатано:*	*Должно быть:*
313	4 сн.	$1 - \text{мод.}\left(e^{2\frac{v\pi}{2\omega}i}\right)e^{-2n\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right)\pi}$	$\left[1-\left(\text{мод.}\left(e^{2\frac{v\pi}{2\omega}i}\right)\right)e^{-2n\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right)\pi}\right]^2$
314	16	v	u
316	4 сн.	$\pi - m\pi$	$\pi + m\pi$
324	4 сн.	на	На
327	2	$\left(\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\right)$	$\left(\frac{v+2n\omega'}{2\omega}\pi\right)$
„	4	$\left(\frac{2n\omega'+v}{2\omega}\right)$	$\left(\frac{2n\omega'+v}{2\omega}\pi\right)$
327	3 сн.	$v - 2m$	$v + 2m$
328	8	$\prod\limits_{-\infty}^{+\infty}{}'$	$\prod\limits_{-\infty}^{+\infty}{}'_m$
329	9	$\prod\limits_{-\infty}^{+\infty}{}_m$	$\prod\limits_{-\infty}^{+\infty}{}_n$
330	8	$\operatorname{cotg}\frac{u\pi}{2\omega}$	$\operatorname{cotg}\frac{v\pi}{2\omega}$
331	9	$\left(\frac{2n\omega'+u}{2\omega}\pi\right)$ (въ первомъ произведенiи).	$\left(\frac{2n\omega'-u}{2\omega}\pi\right)$
332	6 сн.	$e^{\frac{-}{\omega}\frac{u^2}{2}}$	$e^{\frac{\eta}{\omega}\frac{u^2}{2}}$
338	1	$\sqrt{\wp(\wp - v) - e_2}$	$\sqrt{\wp(u - v) - e_2}$
339	3	членъ въ которомъ $n = v$	членъ, въ которомъ $n = v$,
„	9	пред. § для $i = 3$:	пред. §, для $i = 3$:
341	6 сн.	$\frac{1}{\sqrt{e_2 - e_3}} = \frac{\pi}{2\omega'}\Big\{$	$\frac{1}{\sqrt{e_2 - e_3}}\,\frac{\pi}{2\omega'}\Big\{$
342	9	$\sec\left(\frac{2m\omega'}{2\omega}\pi\right)$	$\sec\left(\frac{2n\omega'}{2\omega}\pi\right)$
347	1 сн.	получена	получено
350	8	$-(2n - 1(K'i$	$-(2n - 1)K'i$
352	16	$\}]$; (1)	$]\}$; (1)
357	4 сн.	$\operatorname{cotg}\left(\frac{n\pi}{2\omega}\right)$	$\operatorname{cotg}\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)$
„	4 сн.	$\sin\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)$	$\sin\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)$
„	4 сн.	$\cos\left(\frac{n\pi}{\omega}\right)$	$\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)$
„	2 сн.	$(-1)^{n\cos}\left(\frac{2n\omega'}{2\omega}\pi\right)$	$(-1)^n\cos\left(\frac{2n\omega'}{2\omega}\pi\right)$
„	1 сн.	$(-1)^{m\cos}\left(\frac{2m\omega}{2\omega'}\pi\right)$	$(-1)^m\cos\left(\frac{2m\omega}{2\omega'}\pi\right)$

Стр.	Строка	*Напечатано:*	*Должно быть:*
358	2	$\sin\left(\frac{u\pi}{2\omega'}\right)$	$\sin\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)$
"	2	$\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2\omega'}\right)$	$\operatorname{cotg}\left(\frac{u\pi}{2\omega'}\right)$
"	2 сн.	§ 177	§ 178
363	10	$q=e^{-\tau\pi i}$	$q=e^{\tau\pi i}$
365	2 сн.	$(1+q^{2(n-1)})\cos\frac{u\pi}{\omega}$	$(1+q^{2(2n-1)})\cos\frac{u\pi}{\omega}$
"	1 сн.	$(1+q'^{2(m-1)})\cos\frac{u\pi}{\omega'}$	$(1+q'^{2(2m-1)})\cos\frac{u\pi}{\omega'}$
366	2	$\frac{1}{\cos\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)}$	$\frac{1}{\cos^2\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)}$
367	5 сн.	$\cos\left(\frac{2n\omega'}{2\omega}\pi\right)$	$\cos\left(\frac{2n\omega'}{\omega}\pi\right)$
368	4	$+\cos\left(\frac{n-(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\right)$	$+\cos\left(\frac{u-(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi\right)$
369	8	$-\frac{4\pi i}{\omega}\sin^2\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)$	$+\frac{4\pi i}{\omega}\sin^2\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)$
"	9	$+\frac{\pi}{2\omega'}\Big\{$	$-\frac{\pi}{2\omega'}\Big\{$
373	6	$1-2q'^{2m-1}\cos\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)+q'^{2(2m-1)}$	$1+2q'^{2m-1}\cos\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)+q'^{2(2m-1)}$
374	1 сн.	$1-2q^{2m}\cos\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)+q'^{4m}$	$1-2q'^{2m}\cos\left(\frac{u\pi}{\omega'}\right)+q'^{4m}$
375	7	$\frac{q^{\frac{2n-1}{2}}(1-q^{2n-1})}{(1-q^{2n-1})}$	$\frac{q^{\frac{2n-1}{2}}(1-q^{2n-1})}{(1+q^{2n-1})^2}$
376	6—7	(7) (номеръ формулы)	(5)
379	1	$q^{-\frac{1}{2}}$	$q^{-\frac{1}{4}}$
380	1 сн.	ω'	ω'
384	2	(4)	(3)
385	4 сн.	$\vartheta'(u)$	$\vartheta'(0)$
396	4	$e^{(2k+1)\frac{u\pi}{\omega'}i}$	$e^{(2k+1)\frac{u\pi}{2\omega'}i}$
397	1	$-\vartheta(u-\omega'')$	$-\vartheta(u-\omega')$
"	3	$\cos(2k+)\frac{u\pi}{2\omega'}$.	$\cos(2k+1)\frac{u\pi}{2\omega'}$.
398	15	$\sum_{j=1}^{j=4}[u+m_j\omega']^2\frac{\pi i}{4\omega\omega'}$	$\sum_{j=1}^{j=4}[u_j+m_j\omega']^2\frac{\pi i}{4\omega\omega'}$

Стр.	Строка	*Напечатано:*	*Должно быть:*
401	9 сн.	$= \frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{[\sigma(u)]^2[\sigma(v)]^2}$,	$= -\frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{[\sigma(u)]^2[\sigma(v)]^2}$,
402	8 сн.	$\theta_1(y-x)+$	$\theta_1(y-z)+$
415	5	$\frac{(-1)^m}{m}$	$\frac{(-1)^{m-1}}{m}$
„	8	(12)	(20)
418	7 сн.	$24c_3u$,	$24c_3u$;
419	2	,	;
420	3	$c_3 = \frac{g_3}{28}$	$c_3 = \frac{g_3}{28}$.
424	5	$[\varphi(u)]^2$	$[\varphi'(u)]^2$
427	10	означаемъ	означаетъ
428	11	$\frac{1}{2}\frac{u}{w_i^2}$	$\frac{1}{2}\frac{u^2}{w_i^2}$
429	6 сн.	$6g_3\frac{\partial \log \Phi(u)}{\partial g_3}$	$6g_3\frac{\partial \log \Phi(u)}{\partial g_2}$
431	3	$-4g_3$	$-4g_2$
„	6 сн.	$\frac{\partial\sigma(u)}{\partial g_3}\left(\frac{\partial g_2}{\partial\omega}\omega + \frac{\partial g_3}{\partial\omega'}\omega'\right)$;	$\frac{\partial\sigma(u)}{\partial g_3}\left(\frac{\partial g_3}{\partial\omega}\omega + \frac{\partial g_3}{\partial\omega'}\omega'\right)$;
434	6	образомъ собирая	образомъ, собирая
438	4	$+ e_i\varepsilon_i\frac{\partial\sigma_i(u)}{\partial\varepsilon_i}\}$	$+ e_i\varepsilon_i\frac{\partial\sigma_j(u)}{\partial\varepsilon_i}\}$

ВО ВСѢХЪ КНИЖНЫХЪ МАГАЗИНАХЪ

„НОВАГО ВРЕМЕНИ“,

ТАКЖЕ

А. Дрёдера (Харьковъ, Московская ул., № 21), **А. Карчагина** (тамъ-же, № 6) и **Ф. Михайлова** (Харьковъ, Университетская горка) можно получать слѣдующія сочиненія проф. **М. Тихомандрицкаго:**

1) **О гипергеометрическихъ рядахъ.** Спб., 1876 г. 2 р. —
2) Ueber das Umkehrproblem der elliptischen Integralle. 2 Note. (Изъ Mathem. Annalen, Bd. XXV). Leipzig, 1884 г. . . — 20 к.
3) Обращеніе эллиптическихъ интеграловъ. (Переводъ предыдущей статьи. Изъ „Сообщеній Математическаго Общества при Императорскомъ Харьковскомъ Университетѣ за 1884 г.“). Харьковъ, 1885 г. — 20 к.
4) Отчетъ о занятіяхъ въ Лейпцигѣ. (Изъ „Сообщеній Математическаго Общества при Императорскомъ Харьковск. Университетѣ за 1884 г.“). Харьковъ, 1885 г. — 30 к.
5) **Курсъ теоріи конечныхъ разностей.** Харьковъ, 1889 года. (Изданіе книжнаго магазина Д. Н. Полуэхтова) . . . 2 р. —
6) Разложеніе тригонометрическихъ и эллиптическихъ функцій на частныя дроби и въ безконечныя произведенія. (Изъ „Сообщеній Харьковскаго Математическаго Общества“. Вторая серія. Т. II, № 4). Харьковъ, 1890 г. — 40 к.
7) **Курсъ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій.** (съ примѣрами для упражненій). Харьковъ, 1891 г. 2 р. 50 к.
8) **Краткій курсъ Высшей Алгебры.** Изданіе 2-е, исправленное и дополненное. Харьковъ, 1892 г. 2 р. 20 к.
9) ☞ **Основанія теоріи Абелевыхъ интеграловъ.** Харьковъ, 1895 г. 4 р. —
10) ☞ **Теорія эллиптическихъ интеграловъ и эллиптическихъ функцій.** Харьковъ, 1895 г. 5 р. —

Вспомогательныя таблицы для вычисленія пожизненныхъ эмеритальныхъ пенсій. Составлены *А. Н. Тихомандрицкимъ.* С.-Петербургъ, 1875 г. 3 р. —

(Послѣднюю книгу можно получать также въ С.-Петербургѣ, Галерная ул., № 30. кв. 11).

На пересылку „Курсовъ“ и „Таблицъ“ прилагается по 30 к., на пересылку „Теоріи эллиптическихъ интеграловъ и функцій“ 50 к.

[illegible]

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Tichomandritzky, Matvy Alexandrowitsch

Teoria ėlliptičeskich integralov i ėlliptičeskich funkcij auch mit dem französ. Titel: Theories des intégrales et des fonctions elliptiques. (Beilage zu den Zapiski der Universität Charkow.) 1859.)

Charkow 1895

Math.p. 578 z
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11651800-3